Γραμμικοί Τελεστές (712)
Ασκήσεις I
6 Μαρτίου 2006

Άσκηση 1 Δείξτε ότι, αν $A = (a_{ij})$ είναι ένας $n \times n$ πίνακας μιγαδικών αριθμών, η παράσταση

$$\langle x, y \rangle_A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \bar{y}_i$$

ορίζει εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{C}^n$ αν και μόνον αν $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$ για κάθε i, j και οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι γνήσια θετικές.

Άσκηση 2 Έστω E γραμμικός χώρος και $\langle\!\langle ., . \rangle\!\rangle : E \times E \to \mathbb{K}$ απεικόνιση με τις ιδιότητες του εσωτερικού γινόμενου εκτός της (ιι).

(α) Αποδείξτε ότι $|\langle\!\langle x, y \rangle\!\rangle|^2 \leq \langle\!\langle x, x \rangle\!\rangle . \langle\!\langle y, y \rangle\!\rangle \quad (x, y \in E)$.

(β) Αποδείξτε ότι το σύνολο $N = \{x \in E : \langle\!\langle x, x \rangle\!\rangle = 0\}$ είναι γραμμικός υπόχωρος του E.

(γ) Στον χώρο πηλίκο E/N, ορίζουμε $\quad \langle [x], [y] \rangle = \langle\!\langle x, y \rangle\!\rangle \qquad (x, y \in E)$, όπου $[x] = \{x + z : z \in N\}$. Δείξτε ότι η απεικόνιση $\langle ., . \rangle$ είναι (καλά ορισμένο) εσωτερικό γινόμενο στον E/N.

Άσκηση 3 Έστω E_1, E_2 υπόχωροι του $\mathbb{C}^n$ ώστε $E_1 \cap E_2 = \{0\}$ και $E_1 + E_2 = \mathbb{C}^n$. Για κάθε $x \in \mathbb{C}^n$ γράφουμε $x = x_1 + x_2$ όπου $x_i \in E_i$. Αν $\|x_1\| \leq \|x\|$ για κάθε $x \in \mathbb{C}^n$ (όπου $\|.\|$ η Ευκλείδεια νόρμα), δείξτε ότι οι E_1, E_2 είναι κάθετοι.

Άσκηση 4 Αν E είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $A \subseteq E$, να αποδειχθεί ότι $A^\perp = (\overline{[A]})^\perp$. Είναι αλήθεια ότι $A^{\perp\perp} = \overline{[A]}$;

Άσκηση 5 Δείξτε ότι το άθροισμα δύο καθέτων κλειστών υποχώρων ενός χώρου Hilbert είναι κλειστός υπόχωρος.

Άσκηση 6 (*) Στόχος της άσκησης είναι να δειχθεί ότι το άθροισμα $M + N$ δύο κλειστών υποχώρων M, N ενός χώρου H, ακόμα και χώρου Hilbert, δεν είναι κατ' ανάγκη κλειστό: Στον χώρο Hilbert ℓ^2 ορίζω, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$x_n = e_{2n-1} \quad \text{και} \quad y_n = \cos(1/n) e_{2n-1} + \sin(1/n) e_{2n}$$

και ονομάζω M την κλειστή γραμμική θήκη του $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ και N την κλειστή γραμμική θήκη του $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$. (Παρατηρήστε ότι η «γωνία» μεταξύ των x_n και y_n είναι $1/n$.) Δείξτε ότι η τομή $M \cap N$ ισούται με $\{0\}$, και επομένως το άθροισμα $M + N$ είναι (αλγεβρικά) ευθύ.

Δείξτε ότι το διάνυσμα $y = (0, \sin(1), 0, \sin(1/2), 0, ...)$ ανήκει στο $\overline{M + N}$ αλλά όχι στο $M + N$.

Άσκηση 7 Έστω H απειροδιάστατος διαχωρίσιμος χώρος Hilbert και $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική βάση του H. Δείξτε ότι η $\{e_n\}$ δεν είναι αλγεβρική βάση του H. (Υπόδειξη: Αν το $x \in H$ είναι τέτοιο ώστε $\langle x, e_k \rangle \neq 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ (υπάρχουν πάντα τέτοια x;) τότε $x \notin [e_n : n \in \mathbb{N}]$).

Άσκηση 8 Αν $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ορθοκανονική ακολουθία στον χώρο Hilbert H και $M = \overline{[x_n : n \in \mathbb{N}]}$, δείξτε ότι $P_M(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, x_k \rangle x_k$ για κάθε $x \in H$.

Άσκηση 9 Αν H είναι διαχωρίσιμος χώρος Hilbert και N είναι κλειστός υπόχωρός του, δείξτε ότι ο N είναι διαχωρίσιμος. Δείξτε επίσης ότι κάθε ορθοκανονική οικογένεια $\{x_i\}$ σε διαχωρίσιμο χώρο Hilbert είναι αριθμήσιμη.
[Υπόδειξη: Επειδή $\|x_i - x_j\| = \sqrt{2}$ όταν $i \neq j$, οι ανοικτές μπάλλες $B(x_i, \frac{1}{2})$ είναι μη κενές και ξένες ανά δύο.]

Άσκηση 10 (α) Αν E είναι γραμμικός χώρος και $\phi : E \to \mathbb{C}$ γραμμική, παρατηρείστε ότι αν $\phi(x_o) \neq 0$ τότε $E = \ker \phi \oplus [x_o]$. (β) Αν E είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $\phi : E \to \mathbb{C}$ γραμμική, δείξτε ότι ο υπόχωρος $\ker \phi$ είναι ή κλειστός ή πυκνός στον E. (γ) Αν H είναι χώρος Hilbert και $\phi : E \to \mathbb{C}$ γραμμική και συνεχής, βρείτε τον υπόχωρο $(\ker \phi)^\perp$.

Άσκηση 11 Αποδείξτε ότι η απεικόνιση $\quad \phi : f \to \displaystyle\int_{1/2}^{1} f(t) dt$ είναι γραμμική μορφή στον $C([0, 1])$ και ότι είναι $\|.\|_2$-συνεχής, αλλά δεν υπάρχει *συνεχής* συνάρτηση g ώστε $\phi(f) = \langle f, g \rangle$ για κάθε $f \in C([0, 1])$.