605: Για την εξεταστέα ύλη, 2020

Η εξεταστέα ύλη περιγράφεται στις διαφάνειες που έχουν αναρτηθεί στην η-τάξη. Είναι αυτονόητο ότι μπορεί να ζητηθούν πλήρεις αποδείξεις. Τα επόμενα *θεωρούνται γνωστά και χρησιμοποιούνται*, αλλά δεν θα ζητηθούν αποδείξεις:

1. Παρατήρηση στο Θεώρημα Fejér: Γενικότερα, αν υπάρχουν τα πλευρικά όρια $f(t_+)$ και $f(t_-)$, τότε $\sigma_n(f,t) \to \frac{f(t_+)+f(t_-)}{2}$.
2. Για κάθε $a \in (0,1)$, μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα σύνολο «τύπου Cantor» C^a (δηλ. συμπαγές, με κενό εσωτερικό, χωρίς μεμονωμένα σημεία) με μέτρο a.
3. Θεώρημα Luzin: Αν $f : X \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη, τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $F_\epsilon \subseteq X$ κλειστό με $\lambda(X \setminus F_\epsilon) < \epsilon$ ώστε η $f|_{F_\epsilon}$ να είναι συνεχής.
4. Μια φραγμένη συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν και μόνον αν είναι σχεδόν παντού συνεχής, αν δηλαδή το σύνολο των ασυνεχειών της έχει μέτρο μηδέν. Τότε η f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη και τα δύο ολοκληρώματα συμπίπτουν.
5. Θεώρημα Riesz-Fischer για τον L^p: Θεωρείται γνωστό και χρησιμοποιείται, αλλά η απόδειξη μπορεί να ζητηθεί μόνον για $p = 1$.
6. Μια τριγωνομετρική σειρά που δεν είναι σειρά Fourier μιας $L^1(\mathbb{T})$: Δεν θα ζητηθούν οι αποδείξεις των Προτάσεων και Λημμάτων στην υποπαράγραφο αυτή, αλλά μόνον η χρήση τους.