7 Μέση τετραγωνική σύγκλιση

Ας ξεκινήσουμε με μια απλή, αλλά κρίσιμη παρατήρηση:

Πρόταση 7.1 (Βέλτιστης μέσης τετραγωνικής προσέγγισης [Απ 30.6]). *Έστω $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ Riemann-ολοκληρώσιμη συνάρτηση και $n \in \mathbb{N}$. Τότε για κάθε τριγωνομετρικό πολυώνυμο p βαθμού $\deg(p) \leq n$ ισχύει*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f-p|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f-S_n(f)|^2 + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|S_n(f)-p|^2. \tag{1}$$

Συνεπώς ισχύει η ανισότητα

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f-p|^2 \geq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f-S_n(f)|^2 \tag{2}$$

και ισότητα έχουμε αν και μόνον αν $p = S_n$.

Δηλαδή, το S_n είναι το μοναδικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο που ελαχιστοποιεί το ολοκλήρωμα $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f-p|^2$ ως προς όλες τις επιλογές τριγωνομετρικών πολυωνύμων p βαθμού το πολύ n.

Ειδικότερα αν $m \leq n$ τότε $\quad \|f - S_m(f)\|_2 \geq \|f - S_n(f)\|_2$.

Απόδειξη. Είναι φανερό ότι η (2) έπεται αμέσως από την (1) και ότι ισότητα ισχύει στην (2) αν και μόνον αν ο τελευταίος όρος στην (1) μηδενίζεται, πράγμα που συμβαίνει αν και μόνον αν $p = S_n$.

Έστω λοιπόν $p(t) = \sum\limits_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}$. Αν θέσουμε $g = f - S_n(f)$ και $q = S_n(f) - p$ έχουμε

$$f - p = (f - S_n(f)) + (S_n(f) - p) = g + q.$$

Παρατηρούμε ότι, αν $e_k(t) = e^{ikt}$, $|k| \leq n$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\overline{e_k} = \hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_n(f)\overline{e_k}$$

(από τον ορισμό του $S_n(f)$), άρα

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g\overline{e_k} = 0, \qquad |k| \leq n.$$

Εφόσον η $q = \sum_{k=-n}^{n}(\hat{f}(k) - c_k)e_k$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $\{e_k : |k| \leq n\}$, έπεται ότι

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g\bar{q} = 0,$$

οπότε

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f-p|^2 =& \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|g+q|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(g+q)(\overline{g+q}) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g\bar{g} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g\bar{q} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} q\bar{g} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} q\bar{q} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|g|^2 + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|q|^2\end{aligned}$$

και η (1) αποδείχθηκε. □

Η προηγούμενη Πρόταση οδηγεί στη μελέτη της ποσότητας

$$\|f\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2 dt\right)^{1/2} \qquad f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C} \text{ ολοκληρώσιμη.}$$

Αν f, g είναι δύο (Riemann) ολοκληρώσιμες συναρτήσεις στο $[-\pi, \pi]$ ορίζουμε

$$\|f-g\|_2 := \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)-g(t)|^2 dt\right)^{1/2}$$

και $$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}dt\,.$$

Παρατηρούμε ότι η $\|\cdot\|_2$ ικανοποιεί

$$\|f-g\|_2 \le \|f-g\|_\infty := \sup\{|f(t)-g(t)| : t\in[-\pi,\pi]\}$$

και ότι $\|f\|_2 = \langle f, f\rangle^{1/2}$.

Παρατήρηση $\hat{f}(k) = \langle f, e_k\rangle,\ k\in\mathbb{Z}$.

Λήμμα 7.2. *Αν $f, g : [-\pi,\pi]\to\mathbb{C}$ είναι δύο (Riemann) ολοκληρώσιμες συναρτήσεις, έχουμε*

$$(a)\ |\langle f, g\rangle| \le \|f\|_2\,\|g\|_2$$
$$(b)\ \|f+g\|_2 \le \|f\|_2 + \|g\|_2\,.$$

Απόδειξη. (a) Για να δείξω ότι $|\langle f, g\rangle| \le \|f\|_2\,\|g\|_2$ αρκεί να υποθέσω[1] ότι $\|g\|_2 = 1$. Αν $\lambda\in\mathbb{C}$, από τον ορισμό του $\langle\cdot,\cdot\rangle$ έχουμε

$$\begin{aligned}0 \le \langle f-\lambda g, f-\lambda g\rangle &= \|f\|_2^2 - \bar{\lambda}\langle f, g\rangle - \lambda\langle g, f\rangle + |\lambda|^2\,\|g\|_2^2\\ &= \|f\|_2^2 - \bar{\lambda}\langle f, g\rangle - \lambda\langle g, f\rangle + |\lambda|^2\end{aligned}$$

οπότε, θέτοντας $\lambda = \langle f, g\rangle$, έχουμε $0 \le \|f\|_2^2 - 2|\langle f, g\rangle|^2 + |\langle f, g\rangle|^2$ άρα $|\langle f, g\rangle|^2 \le \|f\|_2^2 = \|f\|_2^2\,\|g\|_2^2$ και η ζητούμενη ανισότητα αποδείχθηκε.

(b) Για κάθε f, g έχουμε

$$\begin{aligned}\|f+g\|_2^2 &= \langle f+g, f+g\rangle = \langle f, f\rangle + \langle f, g\rangle + \langle g, f\rangle + \langle g, g\rangle\\ &= \langle f, f\rangle + 2\,\mathrm{Re}\langle f, g\rangle + \langle g, g\rangle\\ &\le \langle f, f\rangle + 2|\langle f, g\rangle| + \langle g, g\rangle\\ &\le \|f\|_2^2 + 2\,\|f\|_2\,\|g\|_2 + \|g\|_2^2 = (\|f\|_2 + \|g\|_2)^2\end{aligned}$$

από το (a), άρα $\|f+g\|_2 \le \|f\|_2 + \|g\|_2$. □

Πόρισμα 7.3. *Η απεικόνιση $(f, g)\to\langle f, g\rangle$ είναι εσωτερικό γινόμενο και η $(f, g)\to d_2(f, g) := \|f-g\|_2$ είναι μετρική στον γραμμικό χώρο $C([-\pi,\pi])$ [2] δηλαδή ικανοποιούν*

	$\langle f, g\rangle\in\mathbb{C}$	$d_2(f, g)\in\mathbb{R}_+$
(i)	$\langle f+\lambda g, \eta\rangle = \langle f, \eta\rangle + \lambda\langle g, \eta\rangle$	$(a)\ d_2(f, g) = d_2(g, f)$
(ii)	$\langle g, f\rangle = \overline{\langle f, g\rangle}$	$(b)\ d_2(f, g) \le d_2(f, h) + d_2(h, g)$
(iii)	$\langle f, f\rangle \ge 0$	$(c)\ d_2(f, g) = 0 \iff f = g.$
(iv)	$\langle f, f\rangle = 0 \iff f = 0.$	

[1] Αν $\|g\|_2 = 0$ η ανισότητα ισχύει τετριμένα και αν $\|g\|_2 \ne 0$ αντικαθιστώ την g με την $\frac{g}{\|g\|_2}$.

[2] δεν είναι όμως μετρική στον χώρο των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων, γιατί η ισότητα $\|f-g\|_2 = 0$ δεν συνεπάγεται την $f(t) = g(t)$ για κάθε $t\in[-\pi,\pi]$. Μπορεί πχ. η $f-g$ να είναι $\ne 0$ σε ένα μόνο σημείο του διαστήματος. Θα δούμε αργότερα ότι το μόνο που μπορεί κανείς τότε να συμπεράνει είναι ότι η ισότητα $f = g$ ισχύει «σχεδόν παντού» - μιά έννοια που θα ορίσουμε τότε.

Απόδειξη. Οι σχέσεις $(i), (ii)$ και (iii) είναι άμεσες συνέπειες της *γραμμικότητας του ολοκληρώματος*.

Για να δείξουμε ότι η d_2 είναι πράγματι μετρική στον $C[-\pi,\pi]$, παρατηρούμε αμέσως από τον ορισμό της ότι

$$d_2(f,g) = d_2(g,f) \quad \text{και} \quad d_2(f,g) \geq 0$$

για κάθε f, g. Επίσης, αν οι f, g είναι *συνεχείς* και διαφορετικές, τότε υπάρχει $\delta > 0$ και ανοικτή περιοχή $V \subseteq [-\pi,\pi]$ (της μορφής $(a,b) \cap [-\pi,\pi]$) ώστε $|f(t) - g(t)| \geq \delta$ για κάθε $t \in V$, οπότε

$$d_2(f,g)^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - g(t)|^2 dt \geq \frac{1}{2\pi}\int_V |f(t) - g(t)|^2 dt \geq \frac{1}{2\pi}\delta^2 m(V) > 0$$

(όπου $m(V)$ το μήκος της περιοχής V) άρα $d_2(f,g) = 0$ αν και μόνον αν $f = g$ (αποδείχθηκε λοιπόν και η (iv)). Απομένει η τριγωνική ανισότητα: αν f, g, η είναι συνεχείς,

$$d_2(f,g) = \|(f-\eta) + (\eta - g)\|_2 \leq \|f - \eta\|_2 + \|\eta - g\|_2 = d_2(f,\eta) + d_2(\eta, g)$$

από το προηγούμενο Λήμμα. □

Παρατηρήσεις 7.4. *(a) Η στοιχειώδης, αλλά βασική παρατήρηση ότι η παράσταση $\langle f, g\rangle := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\bar{g}$ έχει ιδιότητες αντίστοιχες με εκείνες του εσωτερικού γινομένου στον Ευκλείδειο χώρο επιτρέπει την εισαγωγή γεωμετρικών μεθόδων και εννοιών όπως η καθετότητα.*

(β) Η ισότητα (1) στο Λήμμα 7.1 γράφεται

$$\|f - p\|_2^2 = \|f - S_n(f)\|_2^2 + \|S_n(f) - p\|_2^2$$

και η απόδειξή της χρησιμοποιεί μόνο τις ιδιότητες $(i), (ii)$ και (iii): είναι εφαρμογή του Πυθαγορείου Θεωρήματος $\langle f, g\rangle = 0 \;\Rightarrow\; \|f+g\|_2^2 = \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2$, αν παρατηρήσει κανείς ότι $\langle f - S_n(f), S_n(f) - p\rangle = 0$.

Το επόμενο Θεώρημα, όπως θα δείξουμε αργότερα, ισχύει και για ολοκληρώσιμες συναρτήσεις.

Παρόλο που η ακολουθία $(S_n(f))$ μιάς συνεχούς f μπορεί να μην συγκλίνει, ούτε σημειακά, συγκλίνει στην f ως προς τη μετρική d_2:

Θεώρημα 7.5. *Αν η $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής και 2π-περιοδική, τότε*

$$S_n(f) \xrightarrow{\|\cdot\|_2} f$$

δηλαδή

$$\lim_n \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |S_n(f) - f|^2 = 0.$$

Απόδειξη. Εφόσον η f είναι συνεχής, από το Θεώρημα του Féjer ξέρουμε ότι $\sigma_n(f) \to f$ ομοιόμορφα. Συνεπώς

$$\|\sigma_n(f) - f\|_2 \leq \|\sigma_n(f) - f\|_\infty \to 0\,.$$

Όμως, το $\sigma_n(f)$ είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού το πολύ n, άρα από το Λήμμα βέλτιστης προσέγγισης 7.1 έχουμε $\|f - S_n(f)\|_2 \leq \|f - \sigma_n(f)\|_2$ οπότε $\|f - S_n(f)\|_2 \to 0$. □

Ο επόμενος στόχος μας είναι να συσχετίσουμε την $\|f\|_2$ με τους συντελεστές Fourier της f.

Παρατήρηση 7.6. *Αν $p(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}$ είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο, τότε*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |p|^2 = \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 = \sum_{k=-n}^{n} |\widehat{p}(k)|^2.$$

Απόδειξη. Εφόσον $\widehat{p}(k) = c_k = \langle p, e_k \rangle$ για $|k| \le n$, έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|p|^2 =& \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}p\bar{p} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}p\sum_{k=-n}^{n}\bar{c}_k\bar{e_k} \\ &= \sum_{k=-n}^{n}\bar{c}_k\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}p\bar{e_k} = \sum_{k=-n}^{n}\bar{c}_k c_k = \sum_{k=-n}^{n}|c_k|^2.\end{aligned}$$

Πρόταση 7.7 (Ανισότητα Bessel [Απ 30.7])**.** *Έστω $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ ολοκληρώσιμη. Τότε*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|\hat{f}(k)|^2 \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f|^2.$$

Απόδειξη. Έστω $n \in \mathbb{N}$. Εφαρμόζουμε την (1) για $p = 0$ και έχουμε

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f - S_n(f)|^2 + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|S_n(f)|^2 \ge \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|S_n(f)|^2 \tag{3}$$

Αλλά το $S_n(f)$ είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο με συντελεστές $\hat{f}(k)$ για $|k| \le n$ και 0 για $|k| > n$, άρα από την προηγούμενη Παρατήρηση έχουμε

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f|^2 \ge \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|S_n(f)|^2 = \sum_{k=-n}^{n}|\hat{f}(k)|^2.$$

Εφόσον η ανισότητα αυτή ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η ανισότητα Bessel αποδείχθηκε.

Θα δείξουμε αργότερα ότι στην πραγματικότητα ισχύει ισότητα.

Άμεσο πόρισμα της ανισότητας Bessel είναι το θεμελιώδες

Θεώρημα 7.8 (Riemann - Lebesgue [Ap 30.8])**.** *Αν $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση, τότε*

$$\lim_{k\to+\infty}\hat{f}(k) = \lim_{k\to\infty}\hat{f}(-k) = 0$$

$$\textit{ισοδύναμα} \quad \lim_{n\to+\infty}a_n(f) = \lim_{n\to\infty}b_n(f) = 0.$$

Πόρισμα 7.9 (Ισότητα Parseval [Ap 30.41])**.** *An $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής συνάρτηση, τότε*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty}|\hat{f}(k)|^2.$$

Απόδειξη. Έχουμε δείξει ότι $d_2(S_n(f), f) \to 0$. Εφόσον η d_2 είναι μετρική στον $C([-\pi, \pi])$, από την τριγωνική ανισότητα έχουμε

$$|d_2(f, 0) - d_2(S_n(f), 0)| \le d_2(S_n(f), f)$$

άρα $d_2(S_n(f), 0) \to d_2(f, 0)$, δηλαδή

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|S_n(f)|^2 \to \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f|^2.$$

Αλλά από την Παρατήρηση 7.6 έχουμε $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|S_n(f)|^2 = \sum_{k=-n}^{n}|\hat{f}(k)|^2$, άρα

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\hat{f}(k)|^2 = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n}|\hat{f}(k)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f|^2.$$

Σημείωση Ας τονίσουμε ξανά ότι οι προτάσεις αυτής της παραγράφου γενικεύονται και ισχυροποιούνται, αν χρησιμοποιηθεί το ολοκλήρωμα Lebesgue αντί του ολοκληρώματος Riemann.

8 Ο πυρήνας του Poisson

Αν $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση, για κάθε $0 \leq r < 1$, η σειρά

$$A_r(f)(t) = f_r(t) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} r^{|k|} \hat{f}(k) e^{ikt}, \qquad t \in [-\pi, \pi]$$

συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα, άρα ορίζει συνεχή συνάρτηση $f_r : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ (παρόλο που για $r = 1$ η σειρά, δηλαδή η σειρά Fourier της f, μπορεί να μην συγκλίνει ούτε κατά σημείο). Πράγματι η (διπλή) ακολουθία $(\hat{f}(k))$ είναι φραγμένη, γιατί

$$|\hat{f}(k)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) e^{-ikt}| dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt := \|f\|_1$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ και συνεπώς

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| r^{|k|} \hat{f}(k) e^{ikt} \right| \leq \|f\|_1 \sum_{k \in \mathbb{Z}} r^{|k|} < \infty.$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}
f_r(t) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} \hat{f}(n) e^{int} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-ins} ds \right) e^{int} \\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-in(t-s)} ds \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{-in(t-s)} \right) ds \quad \text{(ομοιόμορφη σύγκλιση)} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) P_r(t-s) ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{όπου} \quad P_r(t) &:= \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{int} = \sum_{n=-\infty}^{-1} r^{-n} e^{int} + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{int} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} r^k e^{-ikt} + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{int} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos nt
\end{aligned}$$

ο πυρήνας του Poisson. Αν γράψουμε $z = re^{it}$ έχουμε $|z| < 1$ και

$$\begin{aligned}
P_r(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \bar{z}^k + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{\bar{z}}{1 - \bar{z}} + 1 + \frac{z}{1 - z} \\
&= \frac{\bar{z}}{1 - \bar{z}} + \frac{1}{1 - z} = \frac{\bar{z}(1 - z) + (1 - \bar{z})}{(1 - \bar{z})(1 - z)} = \frac{1 - |z|^2}{|1 - z|^2} = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos t + r^2}
\end{aligned}$$

η σχέση αυτή δείχνει ότι $P_r(t) \geq 0$ για κάθε t. Επίσης, εφόσον η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα, για κάθε $r \in (0, 1)$ και $k \in \mathbb{Z}$ έχουμε

$$\widehat{P_r}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t) e^{-ikt} dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)t} dt = r^{|k|}$$

$$\text{και ειδικότερα} \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t) dt = r^0 = 1.$$

Παρατήρηση 8.1. *Ο πυρήνας του Poisson έχει τις εξής ιδιότητες:*

(α) *για κάθε* $r \in [0,1)$, *η συνάρτηση* $P_r : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ *είναι συνεχής και μη αρνητική.*

(β) *Αν* $\delta \in (0,\pi/2)$, *τότε στο σύνολο* $[-\pi,-\delta] \cup [\delta,\pi]$, *έχουμε* $P_r(t) \to 0$ *ομοιόμορφα ως προς* t *καθώς* $r \nearrow 1$.

(γ) $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} P_r(x)dx = 1$ *για κάθε* $r \in [0,1)$.

Απόδειξη. Μόνον η (β) μένει να αποδειχθεί: Αν $0 < \delta < \pi/2$ τότε για κάθε t με $\delta \le |t| \le \pi$ έχουμε $\cos t \le \cos\delta$, επομένως

$$0 \le P_r(t) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2} \le \frac{1-r^2}{1-2r\cos\delta + r^2}$$

και η δεξιά παράσταση τείνει στο 0 καθώς $r \nearrow 1$. □

Αν λοιπόν η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη, άρα και φραγμένη, θα έχουμε

$$|f_r(t)| \le \|f\|_\infty \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |P_r(t-s)|ds = \|f\|_\infty \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(s)ds = \|f\|_\infty$$

(αφού η P_r είναι 2π-περιοδική και μη αρνητική) για κάθε t και r.

Αν επιπλέον η f είναι *συνεχής* και 2π-περιοδική, τότε επαναλαμβάνοντας λέξη προς λέξη την απόδειξη του Θεωρήματος Fejér (που στηρίχθηκε αποκλειστικά στις αντίστοιχες ιδιότητες (α), (β) και (γ) του πυρήνα Fejér) καταλήγουμε στο ακόλουθο

Θεώρημα 8.2. *Αν* f *είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο* $[-\pi,\pi]$ *και* 2π-*περιοδική, τότε σε κάθε σημείο συνέχειας*[3] t *της* f *έχουμε* $\lim\limits_{r\nearrow 1} f_r(t) = f(t)$.

Αν η f *είναι επιπλέον* συνεχής, *τότε* $\lim\limits_{r\nearrow 1} f_r(t) = f(t)$ ομοιόμορφα, *δηλαδή* $\lim\limits_{r\nearrow 1} \|f_r - f\|_\infty = 0$.

Παρατήρηση 8.3. *Ας παρατηρήσουμε ότι, ενώ οι συναρτήσεις* f_r *δεν είναι (εν γένει) τριγωνομετρικά πολυώνυμα, εντούτοις είναι συνεχείς (μάλιστα παραγωγίσιμες - γιατί;) συναρτήσεις ορισμένες από απόλυτα και ομοιόμορφα συγκλίνουσες σειρές Fourier.*

[3]Συνέχεια στα σημεία $\pm\pi$ σημαίνει ότι τα πλευρικά όρια υπάρχουν και $\lim_{t\nearrow\pi} f(t) = f(\pi) = \lim_{s\searrow -\pi} f(s)$.

9 Σημειακή σύγκλιση και η αρχή της τοπικότητας

(*Από τις σημειώσεις του Απ. Γιαννόπουλου (2012) Παράγραφος 3.3*)[4]

Ορισμός 9.1 (μιγαδικές συναρτήσεις στον μοναδιαίο κύκλο)**.** Συμβολίζουμε με $\mathbb{T}$ τον μοναδιαίο κύκλο

$$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{e^{i\theta} : \theta \in \mathbb{R}\}.$$

Αν $\phi : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ είναι μια συνάρτηση με μιγαδικές τιμές, ορίζουμε $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ με

$$f(\theta) = \phi(e^{i\theta}).$$

Παρατηρήστε ότι η f είναι 2π-περιοδική. Αντίστροφα, αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι μια 2π-περιοδική συνάρτηση, τότε η $\phi : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ με $\phi(e^{i\theta}) = f(\theta)$ είναι καλά ορισμένη. [5] Έχουμε λοιπόν μια $1-1$ αντιστοιχία ανάμεσα στις συναρτήσεις $\phi : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ και τις 2π-περιοδικές συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

Με βάση αυτήν την αντιστοιχία, λέμε ότι η ϕ είναι ολοκληρώσιμη αν η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάποιο (άρα σε κάθε) διάστημα μήκους 2π, η ϕ είναι συνεχής αν η f είναι συνεχής, η ϕ είναι παραγωγίσιμη αν η f είναι παραγωγίσιμη, η ϕ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη αν η f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη και ούτω καθεξής.

Στη συνέχεια, δεν θα κάνουμε διάκριση ανάμεσα στις ϕ και f.

Θεώρημα 9.1. *Έστω $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\theta_0 \in \mathbb{T}$, τότε*

$$S_n(f)(\theta_0) \to f(\theta_0).$$

Παρατήρηση 9.2. Εξετάζοντας την απόδειξη του Θεωρήματος παρατηρούμε ότι το συμπέρασμα $S_n(f)(\theta_0) \to f(\theta_0)$ εξακολουθεί να ισχύει αν κάνουμε την εξής ασθενέστερη υπόθεση για την f:

«η f είναι ολοκληρώσιμη και ικανοποιεί **συνθήκη Lipschitz** στο θ_0, δηλαδή, υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$|f(\theta_0 - t) - f(\theta_0)| \leq M|t|$$

για κάθε $t \in [-\pi, \pi]$».

Μπορούμε τότε να επαναλάβουμε την απόδειξη χωρίς καμία τροποποίηση.

Μια σημαντική συνέπεια του Θεωρήματος είναι η **αρχή τοπικότητας του Riemann**: η σύγκλιση ή μη της ακολουθίας $S_n(f)(\theta_0)$ εξαρτάται μόνο από τη συμπεριφορά της f *σε μια περιοχή του* θ_0. Αυτό δεν είναι καθόλου προφανές αν σκεφτούμε ότι τα μερικά αθροίσματα $S_n(f)(\theta_0)$ ορίζονται μέσω των συντελεστών Fourier $\widehat{f}(k)$, $|k| \leq n$, της f και οι συντελεστές Fourier προκύπτουν με ολοκλήρωση στο $[-\pi, \pi]$, δηλαδή παίρνουν υπ' όψιν τους τις τιμές της f σε *ολόκληρο το* $[-\pi, \pi]$.

Θεώρημα 9.3 (Αρχή τοπικότητας του Riemann)**.** *Έστω $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ δύο ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι, για κάποιο $\theta_0 \in \mathbb{T}$ και για κάποιο ανοικτό διάστημα $I \subset \mathbb{T}$ ώστε $\theta_0 \in I$, ισχύει*

$$f(\theta) = g(\theta) \qquad \text{για κάθε } \theta \in I.$$

Τότε,

$$S_n(f)(\theta_0) - S_n(g)(\theta_0) \to 0.$$

Ειδικότερα, η $\{S_n(f)(\theta_0)\}$ συγκλίνει αν και μόνο αν η $\{S_n(g)(\theta_0)\}$ συγκλίνει.

---

[4] Δείτε Επίσης το “Fourier Analysis”, των Stein & Shakarchi, Παράγραφος 3.2.1 και 3.2.2

[5] Πράγματι, αν $e^{i\theta_1} = e^{i\theta_2}$ για κάποιους $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ τότε $\theta_2 = \theta_1 + 2k\pi$ για κάποιον ακέραιο k, άρα $f(\theta_1) = f(\theta_2)$ από την 2π-περιοδικότητα της f.

10 Συμπληρώματα

Στόχος:

Θεώρημα 10.1. *Υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ για την οποία*

$$\limsup_{n\to\infty} |S_n(f)(0)| = +\infty.$$

Επομένως η $S[f](0)$ αποκλίνει.

Σημαντικό ρόλο στην απόδειξη παίζουν οι **τριγωνομετρικές σειρές**

$$\sum_{k\neq 0} \frac{e^{ikx}}{k} \qquad \text{και} \qquad \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{e^{ikx}}{k}.$$

Λήμμα 10.2. *Θεωρούμε την συνάρτηση*

$$f(x) = \begin{cases} i(\pi - x) & \text{αν } 0 < x < \pi \\ -i(\pi + x) & \text{αν } -\pi < x < 0 \end{cases}$$

και την επεκτείνουμε περιοδικά στο $\mathbb{R}$. Τότε, η σειρά Fourier της f είναι η

$$S[f](x) = \sum_{k\neq 0} \frac{e^{ikx}}{k}.$$

Πρόταση 10.3. *Έστω $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αν η $\{|k\widehat{f}(k)|\}_{k\in\mathbb{Z}}$ είναι φραγμένη ακολουθία, τότε τα μερικά αθροίσματα $S_n(f)$ της σειράς Fourier της f είναι ομοιόμορφα φραγμένα:*

$$\sup_n \|S_n(f)\|_\infty < +\infty.$$

Δηλαδή, υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$|S_n(f)(x)| \leq M$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in \mathbb{T}$.

Λήμμα 10.4. *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε το τριγωνομετρικό πολυώνυμο*

$$f_n(x) = \sum_{1\leq |k| \leq n} \frac{e^{ikx}}{k}.$$

Υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f_n(x)| \leq M$ για κάθε n και για κάθε x. □

Λήμμα 10.5. *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε το τριγωνομετρικό πολυώνυμο*

$$g_n(x) = \sum_{k=-n}^{-1} \frac{e^{ikx}}{k}.$$

Υπάρχει $c > 0$ ώστε $|g_n(0)| \geq c \log n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. □

Πόρισμα 10.6. *Δεν υπάρχει Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση $g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ ώστε*

$$S[g](x) = \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{e^{ikx}}{k}.$$

Σχόλιο. Θα δείξουμε αργότερα ότι υπάρχει μια Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση g ώστε $S[g](x) = \sum\limits_{k=-\infty}^{-1} \frac{e^{ikx}}{k}$.