605: Ασκήσεις V

1. (α) Αν $E \subseteq \mathbb{R}$ μετρήσιμο με $\lambda(E) < \infty$, δείξτε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει κλιμακωτή συνάρτηση f που μηδενίζεται έξω από ένα φραγμένο διάστημα ώστε $\|\chi_E - f\|_1 < \epsilon$.

   Υπόδειξη Θυμηθείτε την πρώτη απ' τις τρεις αρχές του Littlewood.
   Παρατηρείστε επίσης ότι η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι κλιμακωτή που μηδενίζεται έξω από ένα φραγμένο διάστημα αν και μόνον αν υπάρχουν $x_0, \dots x_n \in \mathbb{R},\ x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ ώστε η f να είναι σταθερή σε κάθε (x_{i-1}, x_i) και $f(t) = 0$ για κάθε $t \notin [x_0, x_n]$.

   (β) Αν $I \subseteq \mathbb{R}$ είναι ένα φραγμένο διάστημα και $\epsilon > 0$, δείξτε ότι υπάρχει συνεχής συνάρτηση g *με συμπαγή φορέα* ώστε $\|\chi_I - g\|_1 < \epsilon$.

   (γ) Με βάση τα προηγούμενα, δείξτε ότι οι ακόλουθοι γραμμικοί υπόχωροι είναι πυκνοί στον $L^1(\mathbb{R})$:

   (i) Ο χώρος των απλών ολοκληρώσιμων συναρτήσεων.

   (ii) Ο χώρος των κλιμακωτών ολοκληρώσιμων συναρτήσεων.

   (iii) Ο χώρος $C_c(\mathbb{R})$ των συνεχών συναρτήσεων με συμπαγή φορέα.

2. Υποθέτουμε ότι $f, f_n : \mathbb{R} \to [0, +\infty], n \in \mathbb{N}$, είναι μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις και $f_n \searrow f$ *σ.π.* Δείξτε με ένα παράδειγμα ότι δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $\int f d\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} \int f_n d\lambda$.
   Υποθέτοντας επιπλέον ότι υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $\int f_k d\lambda < \infty$, δείξτε ότι τότε $\int f d\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} \int f_n d\lambda$.

3. Έστω $p \in [1, \infty)$ και $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$. Για κάθε $t \in \mathbb{R}$, ορίζουμε $f_t(s) = f(s - t)$. Δείξτε ότι $f_t \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ και ότι $\lim\limits_{t\to 0} \|f - f_t\|_p = 0$.

   Υπόδειξη Εξετάστε πρώτα την περίπτωση $f \in C_c(\mathbb{R})$.

4. Έστω $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $f > 0$ *σ.π.* Αν $\int_E f d\lambda = 0$ για κάποιο μετρήσιμο σύνολο E, δείξτε ότι $\lambda(E) = 0$.

5. Έστω $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι
$$\int_{\mathbb{R}} f d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{[-n,n]} f d\lambda \quad \text{δηλ.} \quad \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} f d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} f d\lambda\,.$$

6. Έστω $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι
$$\int_{-\infty}^{\infty} f d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{\{f \geq \frac{1}{n}\}} f d\lambda.$$

7. Έστω X μετρήσιμο σύνολο και $f : X \to [-\infty, +\infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι, για κάθε $a \in \mathbb{R}$, η συνάρτηση $f_a : X \to [-\infty, +\infty]$ με
$$f_a(x) = \begin{cases} f(x) & \text{αν } f(x) \leq a \\ a & \text{αν } f(x) > a, \end{cases}$$
   είναι μετρήσιμη.

8. Έστω $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι
$$\int_{-\infty}^{\infty} f d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{\{f \leq n\}} f d\lambda.$$

9. Έστω $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Είναι σωστό ότι $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$?

10. (α) Δείξτε ότι για κάθε $X \in \mathcal{M}$, $L^1(X) = \{fg : f, g \in L^2(X)\}$.

    (β) Αν $f \geq 0$, δείξτε ότι $f \in L^2([-\pi, \pi])$ αν και μόνον αν $f^2 \in L^1([-\pi, \pi])$. Ισχύει το ίδιο όταν $f([-\pi, \pi]) \subseteq \mathbb{R}$;