# Ανάλυση Fourier
# και
# Ολοκλήρωμα Lebesgue

**Απόστολος Γιαννόπουλος**

**Τμήμα Μαθηματικών**
**Πανεπιστήμιο Αθηνών**
**Αθήνα – 2019**

# Περιεχόμενα


**1 Μέτρο Lebesgue** **3**

1.1 Εξωτερικό μέτρο Lebesgue . . . 3

1.1.1 Ορισμός του εξωτερικού μέτρου Lebesgue . . . 5

1.1.2 Ιδιότητες του εξωτερικού μέτρου Lebesgue . . . 6

1.1.3 Εξωτερικό μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^d$ . . . 8

1.2 Lebesgue μετρήσιμα σύνολα . . . 10

1.2.1 Βασικές ιδιότητες της κλάσης των μετρήσιμων συνόλων . . . 11

1.3 Μέτρο Lebesgue . . . 13

1.3.1 Μέτρο Lebesgue . . . 14

1.3.2 Borel σύνολα και Lebesgue μετρήσιμα σύνολα . . . 14

1.3.3 Περιγραφή των μετρήσιμων συνόλων . . . 16

1.3.4 Συνέχεια του μέτρου Lebesgue . . . 18

1.4 Το σύνολο του Cantor και το σύνολο του Vitali . . . 19

1.4.1 Το σύνολο του Cantor . . . 19

1.4.2 Το λήμμα του Steinhaus και το σύνολο του Vitali . . . 22

1.5 Ασκήσεις . . . 24

**2 Ολοκλήρωμα Lebesgue** **31**

2.1 Μετρήσιμες συναρτήσεις . . . 31

2.1.1 Ορισμός και βασικές ιδιότητες . . . 31

2.1.2 Ακολουθίες μετρήσιμων συναρτήσεων . . . 36

2.1.3 Η συνάρτηση Cantor–Lebesgue . . . 37

2.1.4 Προσέγγιση μετρήσιμων συναρτήσεων από απλές συναρτήσεις . . . 39

2.1.5 Οι τρεις «αρχές του Littlewood» . . . 42

2.2 Ολοκλήρωμα Lebesgue . . . 45

2.2.1 Απλές μετρήσιμες συναρτήσεις . . . 46

2.2.2 Μη αρνητικές συναρτήσεις . . . 48

2.2.3 Η γενική περίπτωση . . . 55

2.2.4 Ιδιότητες του ολοκληρώματος . . . 56

2.2.5 Θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης . . . 58

2.3 Ασκήσεις . . . 59

**3 Ολοκλήρωμα Riemann και Ολοκλήρωμα Lebesgue** **67**
3.1 Σύγκριση του ολοκληρώματος Lebesgue με το ολοκλήρωμα Riemann . . . . . . . . 67
3.2 Το θεώρημα παραγώγισης του Lebesgue . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 72
3.2.1 Η μεγιστική συνάρτηση των Hardy και Littlewood . . . . . . . . . . . . . . 74
3.2.2 Το θεώρημα παραγώγισης του Lebesgue . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 76
3.3 Συναρτήσεις φραγμένης κύμανσης . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 80
3.3.1 Ορισμός και παραδείγματα . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 80
3.3.2 Ο χώρος των συναρτήσεων φραγμένης κύμανσης . . . . . . . . . . . . . . . 84
3.3.3 Χαρακτηρισμός των συναρτήσεων φραγμένης κύμανσης . . . . . . . . . . . 86
3.4 Παραγωγισιμότητα μονότονων συναρτήσεων . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 87
3.5 Απόλυτα συνεχείς συναρτήσεις . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 91
3.6 Ασκήσεις . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 97

**4 Χώροι $L_p$** **101**
4.1 Χώροι $L_p$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 101
4.2 Θεώρημα Riesz-Fischer . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 104
4.2.1 Θεώρημα Riesz-Fischer . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 104
4.2.2 Ο χώρος $L_\infty(E)$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 106
4.2.3 Προσέγγιση συναρτήσεων στον $L_p$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 107
4.3 Θεώρημα Fubini . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 109
4.4 Συνέλιξη . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 118
4.5 Ασκήσεις . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 122

**5 Σειρές Fourier** **127**
5.1 Σειρές Fourier ολοκληρώσιμων συναρτήσεων . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 127
5.2 Τριγωνομετρικά πολυώνυμα . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 132
5.3 Βασικές ιδιότητες των σειρών Fourier . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 139
5.3.1 Μοναδικότητα σειρών Fourier . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 145
5.4 Ο πυρήνας του Dirichlet . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 147
5.5 Σειρές Fourier συνεχών συναρτήσεων . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 150
5.5.1 Μια κατασκευή του Lebesgue . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 155
5.6 Θεώρημα Dini και θεώρημα Marcinkiewicz . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 157
5.7 Ασκήσεις . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 161

**6 Προσεγγίσεις της μονάδας και Αθροισιμότητα** **167**
6.1 Οικογένειες καλών πυρήνων και προσεγγίσεων της μονάδας . . . . . . . . . . . . 167
6.2 Cesàro αθροισιμότητα . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 173
6.3 Ο πυρήνας του Fejér . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 174
6.4 Χαρακτηρισμός των τριγωνομετρικών σειρών που είναι σειρές Fourier . . . . . . . 179
6.5 Abel αθροισιμότητα και ο πυρήνας του Poisson . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 181
6.6 Ασκήσεις . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 184

**7 $L_2$-σύγκλιση σειρών Fourier** **189**
7.1 Χώροι Hilbert . . . . . 189
7.1.1 Χώροι με εσωτερικό γινόμενο και χώροι Hilbert . . . . . 189
7.1.2 Καθετότητα . . . . . 191
7.1.3 Ορθοκανονικές βάσεις . . . . . 192
7.2 Σύγκλιση στον $L_2(\mathbb{T})$ . . . . . 195
7.3 Ασκήσεις . . . . . 197

# Εισαγωγή

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

# Μέτρο Lebesgue

## 1.1 Εξωτερικό μέτρο Lebesgue

Θα θέλαμε να ορίσουμε το «μήκος» κάθε υποσυνόλου $A$ του $\mathbb{R}$, δηλαδή να αντιστοιχίσουμε σε κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$ έναν μη αρνητικό αριθμό $\lambda(A)$ (ή το $+\infty$). Είναι λογικό να ζητήσουμε να ισχύουν τα ακόλουθα:

(α) $\lambda([a,b]) = b - a$ για κάθε $a < b$ στο $\mathbb{R}$.

(β) Αναλλοίωτο ως προς μεταφορές: $\lambda(A + x) = \lambda(A)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(γ) Αριθμήσιμη προσθετικότητα: Αν $(A_n)$ είναι μια ακολουθία ξένων ανά δύο υποσυνόλων του $\mathbb{R}$, τότε

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n). \tag{1.1.1}$$

Όπως θα δούμε, η τελευταία ιδιότητα δημιουργεί προβλήματα. Η κατασκευή που παρουσιάζουμε οφείλεται στον Vitali και βασίζεται στο «αξίωμα της επιλογής» από την Θεωρία Συνόλων, το οποίο αποδεχόμαστε.

**Αξίωμα της Επιλογής**: Έστω $\mathcal{X} = \{X_a : a \in A\}$ μια μη κενή οικογένεια ξένων, μη κενών υποσυνόλων ενός συνόλου $\Omega$. Τότε, υπάρχει ένα σύνολο $E$ που περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο $x_a$ από κάθε σύνολο $X_a$. Δηλαδή, υπάρχει **συνάρτηση επιλογής** $f : A \to \Omega$ με $f(a) \in X_a$ για κάθε $a \in A$.

*Σημείωση.* Το Αξίωμα της Επιλογής, αν και φαίνεται «αθώο», αποδεικνύεται ανεξάρτητο από τα αξιώματα (Zermelo-Fraenkel) της Θεωρίας Συνόλων.

**Θεώρημα 1.1.1.** *Δεν υπάρχει συνάρτηση $\lambda : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ η οποία να ικανοποιεί τα* (α)–(γ).

*Απόδειξη.* Υποθέτουμε ότι υπάρχει τέτοια συνάρτηση $\lambda$. Παρατηρήστε ότι η $\lambda$ είναι μονότονη: αν $A \subseteq B$, λόγω της (γ) έχουμε

$$\lambda(B) = \lambda(A \cup (B \setminus A)) = \lambda(A) + \lambda(B \setminus A) \geqslant \lambda(A). \tag{1.1.2}$$

Ορίζουμε σχέση ισοδυναμίας $\sim$ στο $[0,1]$ ως εξής:

$$x \sim y \Longleftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}. \tag{1.1.3}$$

Παρατηρήστε ότι, αναγκαστικά, $x - y \in [-1,1]$. Η $\sim$ χωρίζει το $[0,1]$ σε κλάσεις ισοδυναμίας

$$E_x = \{y \in [0,1] : y = x + q \text{ για κάποιον } q \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}\}. \tag{1.1.4}$$

Αν συμβολίσουμε με $\mathcal{X} = \{X_a : a \in A\}$ την οικογένεια των διαφορετικών κλάσεων ισοδυναμίας, το αξίωμα της επιλογής μας λέει ότι υπάρχει ένα σύνολο $N = \{y_a : a \in A\} \subset [0,1]$ το οποίο περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο $y_a$ από κάθε κλάση $X_a$. Ειδικότερα, αν $a \neq b$ στο $N$ τότε $y_a - y_b \notin \mathbb{Q}$.

Θεωρούμε μια αρίθμηση $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ του $\mathbb{Q} \cap [-1,1]$ και θεωρούμε την ακολουθία συνόλων

$$N_n := N + q_n, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{1.1.5}$$

Τα σύνολα $N_n$ ικανοποιούν τα εξής:

(i) $N_n \subseteq [-1,2]$. Αυτό είναι απλό, αφού $N \subset [0,1]$ και $-1 \leqslant q_n \leqslant 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα $N_n = N + q_n \subset [-1,2]$ για κάθε $n$.

(ii) Αν $n \neq m$ τότε $N_n \cap N_m = \emptyset$. Πράγματι, αν υπήρχαν $y_a, y_b \in N$ ώστε $y_a + q_n = y_b + q_m$, τότε θα είχαμε $0 \neq y_a - y_b = q_m - q_n \in \mathbb{Q}$, δηλαδή θα είχαμε δύο στοιχεία $y_a, y_b$ του $N$ τα οποία θα ήταν ισοδύναμα (ως προς την $\sim$) και αυτό είναι άτοπο από τον τρόπο ορισμού του $N$.

(iii) $[0,1] \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$. Πράγματι, αν $x \in [0,1]$ τότε υπάρχει $a \in A$ ώστε $x \in X_a$. Αυτό σημαίνει ότι $x = y_a + q$ για κάποιον $q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]$. Όμως, τότε υπάρχει $n = n(x) \in \mathbb{N}$ ώστε $q = q_n$, δηλαδή, $x = y_a + q_n \in N_n$.

Αφού η $\lambda$ ικανοποιεί το (β), για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $\lambda(N_n) = \lambda(N)$. Από τις ιδιότητες των $N_n$ και από τη μονοτονία και την αριθμήσιμη προσθετικότητα της $\lambda$, παίρνουμε

$$1 = \lambda([0,1]) \leqslant \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(N_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(N) \leqslant 3, \tag{1.1.6}$$

το οποίο είναι άτοπο αφού το τελευταίο άθροισμα είναι ίσο με $0$ (αν $\lambda(N) = 0$) ή με $+\infty$ (αν $\lambda(N) > 0$). □

*Σημείωση.* Ακόμα κι αν ζητήσουμε την προσθετικότητα μόνο για ενώσεις πεπερασμένων το πλήθος ξένων ανά δύο συνόλων, αποδεικνύεται (αν δεχτούμε το Αξίωμα της Επιλογής) ότι *δεν* υπάρχει τρόπος να ορίσουμε το «μήκος» έτσι ώστε να ισχύουν οι δύο πρώτες ιδιότητες και η

$$\lambda(A \cup B) = \lambda(A) + \lambda(B) \tag{1.1.7}$$

για όλα τα $A, B \subset \mathbb{R}$ με $A \cap B = \emptyset$.

Η στρατηγική που θα ακολουθήσουμε είναι η εξής: αντί να περιορίσουμε τις απαιτήσεις μας, θα περιοριστούμε σε μια κλάση υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ στην οποία μπορεί να οριστεί το μήκος $\lambda$ έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι (α), (β) και (γ). Αυτά θα είναι τα «μετρήσιμα» σύνολα. Το ευτύχημα είναι ότι η κλάση αυτή είναι αρκετά μεγάλη.

### 1.1.1 Ορισμός του εξωτερικού μέτρου Lebesgue

Σε κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$ θα αντιστοιχίσουμε έναν αριθμό $\lambda^*(A) \geqslant 0$ ή $+\infty$, το **εξωτερικό μέτρο** του $A$.

Έστω $I = (a, b)$ ένα φραγμένο ανοικτό διάστημα. Το μήκος του $I$ συμβολίζεται με

$$\ell(I) := b - a. \tag{1.1.8}$$

Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ και $(I_n)$ είναι μια πεπερασμένη ή άπειρη ακολουθία φραγμένων ανοικτών διαστημάτων με την ιδιότητα $A \subseteq \bigcup_n I_n$, λέμε ότι η $(I_n)$ είναι μια **κάλυψη** του $A$. Αν η $(I_n)$ είναι κάλυψη του $A$, το άθροισμα $\sum_n \ell(I_n)$ δίνει μια «από πάνω» εκτίμηση για το «μέτρο» του $A$. Είναι δηλαδή λογικό να ζητήσουμε

$$\lambda^*(A) \leqslant \sum_n \ell(I_n) \tag{1.1.9}$$

για όλες τις καλύψεις του $A$. Έτσι, οδηγούμαστε στον εξής ορισμό.

**Ορισμός 1.1.2** (εξωτερικό μέτρο Lebesgue)**.** Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Το **εξωτερικό μέτρο** του $A$ είναι το

$$\lambda^*(A) = \inf \left\{ \sum_n \ell(I_n) : (I_n) \text{ κάλυψη του } A \right\}. \tag{1.1.10}$$

**Παρατηρήσεις 1.1.3.** (α) Μπορούμε, αν ορίσουμε $\ell(\emptyset) = 0$ και αν θεωρήσουμε το κενό σύνολο ως «διάστημα» με μηδενικό μήκος, να θεωρούμε ότι οι καλύψεις στον ορισμό είναι πάντα άπειρες αριθμήσιμες. Αν $(I_n)$ είναι μια κάλυψη του $A$ από πεπερασμένα το πλήθος (γνήσια) φραγμένα ανοικτά διαστήματα, την επεκτείνουμε σε «άπειρη» κάλυψη παίρνοντας επιπλέον το κενό σύνολο άπειρες φορές. Για το λόγο αυτό θα γράφουμε συνήθως $(I_n)_{n=1}^\infty$ για τις καλύψεις συνόλων, $\sum_{n=1}^\infty \ell(I_n)$ για τις εκτιμήσεις των εξωτερικών μέτρων, και ο ορισμός μας γίνεται

$$\lambda^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^\infty \ell(I_n) : A \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty I_n,\ I_n \text{ ανοικτό διάστημα ή } \emptyset \right\}. \tag{1.1.11}$$

(β) Συμφωνούμε ότι $\inf\{+\infty\} = +\infty$. Άρα, αν συμβεί να έχουμε

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty I_n \Longrightarrow \sum_{n=1}^\infty \ell(I_n) = +\infty, \tag{1.1.12}$$

τότε $\lambda^*(A) = +\infty$.

(γ) Με την παραπάνω σύμβαση, το εξωτερικό μέτρο ορίζεται καλά για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$ και είναι μη αρνητικός αριθμός ή $+\infty$. Πράγματι, κάθε υποσύνολο του $\mathbb{R}$ δέχεται τουλάχιστον μία κάλυψη, την $I_n = (-n, n)$, $n = 1, 2, \ldots$.

### 1.1.2 Ιδιότητες του εξωτερικού μέτρου Lebesgue

Οι επόμενες Προτάσεις περιγράφουν τις βασικές ιδιότητες του εξωτερικού μέτρου Lebesgue.

**Πρόταση 1.1.4.** *Αν $A \subseteq B$, τότε $\lambda^*(A) \leqslant \lambda^*(B)$.*

*Απόδειξη.* Αν $B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, τότε $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$. Άρα,

$$\Big\{ \sum_n \ell(I_n) : (I_n) \ \text{ κάλυψη του } A \Big\} \supseteq \Big\{ \sum_n \ell(I_n) : (I_n) \ \text{ κάλυψη του } B \Big\}, \tag{1.1.13}$$

απ' όπου έπεται ότι $\lambda^*(A) \leqslant \lambda^*(B)$. □

**Πρόταση 1.1.5.** *Αν το $A$ είναι πεπερασμένο ή άπειρο αριθμήσιμο σύνολο, τότε $\lambda^*(A) = 0$.*

*Απόδειξη.* Έστω $A = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ θεωρούμε την ακολουθία ανοικτών διαστημάτων

$$I_n = \Big( x_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, x_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \Big). \tag{1.1.14}$$

Τότε, $A \subseteq \bigcup_n I_n$ και

$$\sum_n \ell(I_n) = \sum_n \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon. \tag{1.1.15}$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $\lambda^*(A) = 0$. □

**Πρόταση 1.1.6.** *$\lambda^*(A + x) = \lambda^*(A)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.*

*Απόδειξη.* Αν $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, τότε $A + x \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$, όπου $J_n = I_n + x$. Παρατηρήστε ότι $\ell(I + x) = \ell(I) = b - a$ για κάθε ανοικτό διάστημα $I = (a, b)$. Συνεπώς,

$$\lambda^*(A + x) \leqslant \sum_n \ell(J_n) = \sum_n \ell(I_n). \tag{1.1.16}$$

Παίρνοντας infimum ως προς όλες τις καλύψεις $(I_n)$ του $A$, συμπεραίνουμε ότι

$$\lambda^*(A + x) \leqslant \lambda^*(A). \tag{1.1.17}$$

Για την αντίστροφη ανισότητα παρατηρήστε ότι $A = (A + x) - x$, οπότε εφαρμόζοντας την (1.1.17) (με το $A + x$ στην θέση του $A$ και το $-x$ στην θέση του $x$) έχουμε $\lambda^*(A) = \lambda^*((A + x) - x) \leqslant \lambda^*(A + x)$. □

**Πρόταση 1.1.7.** *Για κάθε $a < b$ στο $\mathbb{R}$ ισχύει $\lambda^*([a, b]) = b - a$.*

*Απόδειξη.* Για κάθε $\varepsilon > 0$ έχουμε $[a, b] \subset I_\varepsilon := (a - \varepsilon, b + \varepsilon)$. Άρα,

$$\lambda^*([a, b]) \leqslant \ell(I_\varepsilon) = (b - a) + 2\varepsilon. \tag{1.1.18}$$

Συνεπώς, $\lambda^*([a, b]) \leqslant b - a$.

Για την αντίστροφη ανισότητα πρέπει να δείξουμε ότι αν $(I_n)$ είναι μια καλυψη του $[a, b]$ από ανοικτά διαστήματα, τότε

$$b - a \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n). \tag{1.1.19}$$

*Βήμα 1:* Έστω ότι $[a,b] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$. Αφού το $[a,b]$ είναι συμπαγές, από το Θεώρημα Heine-Borel υπάρχει πεπερασμένη υποκάλυψη της $(I_n)$: μπορούμε δηλαδή να βρούμε $N \in \mathbb{N}$ ώστε

$$[a,b] \subset I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_N. \tag{1.1.20}$$

*Βήμα 2:* Έστω ότι $[a,b] \subset (c_1,d_1) \cup \cdots \cup (c_N,d_N)$. Θα δείξουμε ότι

$$b-a < \sum_{n=1}^{N}(d_n-c_n). \tag{1.1.21}$$

Η απόδειξη της (1.1.21) μπορεί να γίνει με επαγωγή ως προς το $N$. Αν $N=1$ τότε έχουμε $[a,b] \subset (c_1,d_1)$, οπότε $c_1 < a < b < d_1$ και είναι φανερό ότι $b-a < d_1-c_1$. Για το επαγωγικό βήμα, υποθέτουμε ότι $[a,b] \subset (c_1,d_1) \cup \cdots \cup (c_{N+1},d_{N+1})$ και χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι $a \in (c_1,d_1)$. Αν $d_1 > b$ τότε το ζητούμενο ισχύει (αφού ήδη έχουμε $b-a < d_1-c_1$). Αν $d_1 \leqslant b$, τότε $[d_1,b] \subset (c_2,d_2) \cup \cdots \cup (c_N,d_N)$ και εφαρμόζοντας την επαγωγική υπόθεση (για το $[d_1,b]$ το οποίο καλύπτεται από $N$ ανοικτά διαστήματα) παίρνουμε

$$b-d_1 \leqslant \sum_{n=2}^{N+1}(d_n-c_n). \tag{1.1.22}$$

Έχουμε και την $[a,d_1) \subset (c_1,d_1)$, άρα

$$d_1-a \leqslant d_1-c_1. \tag{1.1.23}$$

Προσθέτοντας τις (1.1.22) και (1.1.23) παίρνουμε

$$b-a = (b-d_1)+(d_1-a) \leqslant (d_1-c_1) + \sum_{n=2}^{N+1}(d_n-c_n) = \sum_{n=1}^{N+1}(d_n-c_n). \tag{1.1.24}$$

Από τα Βήματα 1 και 2 προκύπτει ότι

$$b-a < \sum_{n=1}^{\infty}\ell(I_n) \tag{1.1.25}$$

για κάθε κάλυψη $(I_n)$ του $[a,b]$. Άρα, $\lambda^*([a,b]) \geqslant b-a$. □

**Παρατήρηση 1.1.8.** Από τις Προτάσεις 1.1.5 και 1.1.7 προκύπτει άμεσα ότι κάθε κλειστό διάστημα $[a,b]$ είναι υπεραριθμήσιμο σύνολο.

**Πρόταση 1.1.9.** $\lambda^*\big((a,b)\big) = b-a$.

*Απόδειξη.* Για κάθε $0 < \varepsilon < (b-a)/2$ έχουμε $[a+\varepsilon, b-\varepsilon] \subset (a,b) \subset [a,b]$. Από την Πρόταση 1.1.4 και την Πρόταση 1.1.7,

$$(b-a)-2\varepsilon = \lambda^*([a+\varepsilon,b-\varepsilon]) \leqslant \lambda^*\big((a,b)\big) \leqslant \lambda^*([a,b]) = b-a. \tag{1.1.26}$$

Αφού η ανισότητα ισχύει για όλα τα «μικρά» $\varepsilon > 0$, βλέπουμε ότι $\lambda^*\big((a,b)\big) = b-a$. □

**Πρόταση 1.1.10.** $\lambda^*\big((a,+\infty)\big) = +\infty$.

*Απόδειξη.* Για κάθε $N \in \mathbb{N}$ έχουμε $(a, +\infty) \supset (a, a+N)$, άρα

$$\lambda^*\big((a, +\infty)\big) \geqslant a + N - a = N. \tag{1.1.27}$$

Άρα, $\lambda^*\big((a+\infty)\big) = +\infty$. □

**Πρόταση 1.1.11** (αριθμήσιμη υποπροσθετικότητα του εξωτερικού μέτρου)**.** *Για κάθε πεπερασμένη ή άπειρη ακολουθία* $(A_n)$ *υποσυνόλων του* $\mathbb{R}$ *ισχύει*

$$\lambda^*\left(\bigcup_n A_n\right) \leqslant \sum_n \lambda^*(A_n). \tag{1.1.28}$$

*Απόδειξη.* Αν το δεξιό μέλος της ανισότητας είναι $+\infty$ δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $\sum_n \lambda^*(A_n) < +\infty$. Θα δείξουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει κάλυψη $(J_s)$ του $\bigcup_n A_n$ από ανοικτά διαστήματα, ώστε $\sum_s \ell(J_s) < \sum_n \lambda^*(A_n) + \varepsilon$.

Για κάθε $n$ θεωρούμε κάλυψη $(I_n^k)_k$ του $A_n$ με την ιδιότητα

$$\sum_k \ell(I_n^k) < \lambda^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}. \tag{1.1.29}$$

Αν πάρουμε σαν $(J_s)$ την (αριθμήσιμη) οικογένεια $(I_n^k)_{n,k}$ όλων αυτών των ανοικτών διαστημάτων, τότε

$$\bigcup_n A_n \subset \bigcup_{n,k} I_n^k \tag{1.1.30}$$

και

$$\sum_{n,k} \ell(I_n^k) = \sum_n \sum_k \ell(I_n^k) < \sum_n \left(\lambda^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) = \sum_n \lambda^*(A_n) + \varepsilon. \tag{1.1.31}$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται η (1.1.28). □

### 1.1.3 Εξωτερικό μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^d$

Σε αυτήν την υποπαράγραφο δίνουμε εν συντομία τον ορισμό και τις βασικές ιδιότητες του εξωτερικού μέτρου Lebesgue στον $\mathbb{R}^d$ για $d > 1$. Η ιδέα του ορισμού αλλά και οι αποδείξεις των ιδιοτήτων είναι γενικά ίδιες με εκείνες της προηγούμενης παραγράφου. Τον ρόλο των διαστημάτων $(a, b)$ παίζουν τώρα τα ανοικτά ορθογώνια $I = \prod_{j=1}^d (a_j, b_j)$, $-\infty < a_j \leqslant b_j < \infty$ στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^d$, τα οποία ονομάζουμε και πάλι *ανοικτά διαστήματα*. Παρατηρήστε ότι το κενό σύνολο είναι κι αυτό ανοικτό διάστημα (έχουμε επιτρέψει την ισότητα $a_j = b_j$, και τότε $(a_j, b_j) = \emptyset$). Η οικογένεια $\mathcal{C}$ των ανοικτών διαστημάτων του $\mathbb{R}^d$ είναι *σ-κάλυψη* του $\mathbb{R}^d$: έχουμε

$$\mathbb{R}^d = \bigcup_{n=1}^{\infty} (-n, n)^d. \tag{1.1.32}$$

Για κάθε ανοικτό διάστημα $I = \prod_{j=1}^d (a_j, b_j)$ του $\mathbb{R}^d$ ορίζουμε

$$\ell(I) = \prod_{j=1}^d (b_j - a_j). \tag{1.1.33}$$

Η $\mathcal{C}$ και η $\ell$ επάγουν το εξωτερικό μέτρο $\lambda^*$ στον $\mathbb{R}^d$. Για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}^d$ το **εξωτερικό μέτρο Lebesgue** του $A$ είναι το

$$\lambda_d^*(A) = \inf\left\{ \sum_n \ell(I_n) : (I_n) \text{ κάλυψη του } A \right\}. \tag{1.1.34}$$

Για ευκολία θα συμβολίζουμε το $\lambda_d$ με $\lambda$. Στο επόμενο θεώρημα συνοψίζουμε τις βασικές ιδιότητες του $\lambda_d^*$.

**Θεώρημα 1.1.12.** *Το εξωτερικό μέτρο Lebesgue $\lambda := \lambda_d$ ικανοποιεί τα εξής:*

(α) *Αν $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^d$, τότε $\lambda_d^*(A) \leqslant \lambda_d^*(B)$.*

(β) *Αν το $A$ είναι πεπερασμένο ή άπειρο αριθμήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ τότε $\lambda_d^*(A) = 0$.*

(γ) *Για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}^d$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$ ισχύει $\lambda_d^*(A + x) = \lambda_d^*(A)$.*

(δ) *Για κάθε πεπερασμένη ή άπειρη ακολουθία $(A_n)$ υποσυνόλων του $\mathbb{R}^d$ ισχύει*

$$\lambda_d^*\left(\bigcup_n A_n\right) \leqslant \sum_n \lambda_d^*(A_n). \tag{1.1.35}$$

(ε) *Για κάθε κλειστό διάστημα $I = \prod_{j=1}^d (a_j, b_j)$ στον $\mathbb{R}^d$ ισχύει $\lambda_d^*(I) = \ell(I) = \prod_{j=1}^d (b_j - a_j)$.*

*Απόδειξη.* Η απόδειξη των (α), (γ) και (δ) είναι ακριβώς η ίδια με την απόδειξη των Προτάσεων 1.1.4, 1.1.6 και 1.1.11 αντίστοιχα. Για την απόδειξη του (β) δουλεύουμε όπως στην Πρόταση 1.1.5: Θεωρούμε ένα αριθμήσιμο σύνολο $A = \{x_1, x_2, \ldots\}$ και για τυχόν $\varepsilon > 0$ θεωρούμε μια ακολουθία ανοικτών διαστημάτων $I_n$ με $x_n \in I_n$ και $\ell(I_n) = \varepsilon 2^n$ (μπορούμε να θεωρήσουμε ανοικτό κύβο $I_n$ που έχει κέντρο το $x_n$ και μήκος ακμής ίσο με $(\varepsilon/2^n)^{1/d}$). Τότε, $A \subseteq \bigcup_n I_n$ και

$$\sum_n \ell(I_n) = \sum_n \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon. \tag{1.1.36}$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $\lambda_d^*(A) = 0$.

Μένει να δείξουμε το (ε). Η ανισότητα $\lambda_d^*(I) \leqslant \ell(I)$ είναι απλή. Για τυχόν $\varepsilon > 0$ καλύπτουμε το $I$ με το ανοικτό διάστημα $J_\varepsilon = \prod_{j=1}^d (a_j - \varepsilon, b_j + \varepsilon)$, οπότε

$$\lambda_d^*(I) \leqslant \ell(J_\varepsilon) = \prod_{j=1}^d (b_j - a_j + 2\varepsilon). \tag{1.1.37}$$

Αφού

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \prod_{j=1}^d (b_j - a_j + 2\varepsilon) = \prod_{j=1}^d (b_j - a_j) = \ell(I), \tag{1.1.38}$$

έπεται ότι $\lambda_d^*(I) \leqslant \ell(I)$.

Για την αντίστροφη ανισότητα πρέπει να δείξουμε ότι αν $(J_n)$ είναι μια καλυψη του $I$ από ανοικτά διαστήματα, τότε

$$\ell(I) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \ell(J_n). \tag{1.1.39}$$

Αφού το $I$ είναι συμπαγές, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $I \subset J_1 \cup \cdots \cup J_N$. Δείχνουμε ότι

$$\ell(I) \leqslant \sum_{n=1}^{N} \ell(J_n). \tag{1.1.40}$$

Για την απόδειξη της (1.1.40) δείχνουμε προηγουμένως τα εξής:

(i) Έστω $I = \prod_{j=1}^{d}[a_j, b_j]$. Για κάθε $j = 1, \ldots, d$ θεωρούμε μια διαμέριση $a_j = c_j^0 < c_j^1 < \cdots < c_j^{m_j} = b_j$ του $[a_j, b_j]$ και, για κάθε $1 \leqslant i_1 \leqslant m_1, \ldots, 1 \leqslant i_k \leqslant m_k$ ορίζουμε $J_{i_1,\ldots,i_k} = \prod_{j=1}^{k}(c_j^{i_j-1}, c_j^{i_j}]$. Τότε,

$$\ell(I) = \sum_{1\leqslant i_1\leqslant m_1,\ldots,1\leqslant i_k\leqslant m_k} \ell(J_{i_1,\ldots,i_k}). \tag{1.1.41}$$

(ii) Έστω $I, J_1, \ldots, J_s$ κλειστά διαστήματα στον $\mathbb{R}^d$. Υποθέτουμε ότι τα $J_1, \ldots, J_s$ είναι μη επικαλυπτόμενα (έχουν ξένα εσωτερικά) και ότι $I = J_1 \cup \cdots \cup J_s$. Τότε,

$$\ell(I) = \ell(J_1) + \cdots + \ell(J_s). \tag{1.1.42}$$

Οι λεπτομέρειες αφήνονται ως άσκηση (θα συμπληρωθούν εδώ εν καιρώ). □

## 1.2 Lebesgue μετρήσιμα σύνολα

Ο αρχικός μας στόχος ήταν να πετύχουμε την αριθμήσιμη προσθετικότητα του «μέτρου»: θα θέλαμε λοιπόν να ισχύει η

$$\lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n) \tag{1.2.1}$$

αν τα $A_n$ είναι ξένα ανά δύο υποσύνολα του $\mathbb{R}$ (και γενικότερα, του $\mathbb{R}^d$). Το εξωτερικό μέτρο που ορίσαμε δεν έχει την ιδιότητα της προσθετικότητας: ακόμα κι αν περιοριστούμε στην περίπτωση *δύο* ξένων υποσυνόλων $A$ και $B$ του $[0,1]$, μπορούμε να δώσουμε παράδειγμα (δείτε τις ασκήσεις) όπου

$$\lambda^*(A \cup B) < \lambda^*(A) + \lambda^*(B). \tag{1.2.2}$$

Αυτό που θα κάνουμε είναι να περιοριστούμε σε μια κλάση $\mathcal{M}$ υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ έτσι ώστε ο περιορισμός της «συνάρτησης εξωτερικού μέτρου» $\lambda^*$ στην $\mathcal{M}$ να ικανοποιεί την ιδιότητα της αριθμήσιμης προσθετικότητας. Η $\mathcal{M}$ είναι η κλάση των **Lebesgue μετρήσιμων συνόλων**. Η διαδικασία είναι η ίδια στον $\mathbb{R}^d$ για κάθε $d \geqslant 1$.

**Ορισμός 1.2.1** (Lebesgue μετρήσιμο σύνολο)**.** Ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^d$ λέγεται **Lebesgue μετρήσιμο** αν για κάθε $X \subseteq \mathbb{R}^d$ ισχύει

$$\lambda^*(X) = \lambda^*(X \cap A) + \lambda^*(X \cap A^c). \tag{1.2.3}$$

Δηλαδή, ένα σύνολο είναι μετρήσιμο αν «χωρίζει σωστά» – ως προς το εξωτερικό μέτρο – οποιοδήποτε άλλο σύνολο. Η κλάση των Lebesgue μετρήσιμων συνόλων συμβολίζεται με $\mathcal{M}$.

**Παρατήρηση 1.2.2.** Από την $X = (X \cap A) \cup (X \cap A^c)$ και από την υποπροσθετικότητα του $\lambda^*$, έχουμε πάντα την ανισότητα

$$\lambda^*(X) \leqslant \lambda^*(X \cap A) + \lambda^*(X \cap A^c). \tag{1.2.4}$$

Αυτό λοιπόν που χρειαζόμαστε για να δείξουμε τη μετρησιμότητα του $A$ είναι η αντίστροφη ανισότητα

$$\lambda^*(X) \geqslant \lambda^*(X \cap A) + \lambda^*(X \cap A^c) \tag{1.2.5}$$

για κάθε $X \subseteq \mathbb{R}$.

### 1.2.1 Βασικές ιδιότητες της κλάσης των μετρήσιμων συνόλων

Οι επόμενες Προτάσεις περιγράφουν τις βασικές ιδιότητες της κλάσης των Lebesgue μετρήσιμων συνόλων.

**Πρόταση 1.2.3.** *Αν $\lambda^*(A) = 0$, τότε $A \in \mathcal{M}$.*

*Απόδειξη.* Έστω $X \subseteq \mathbb{R}^d$. Τότε, $X \cap A \subseteq A$ άρα $\lambda^*(X \cap A) = 0$. Επίσης, $X \supseteq X \cap A^c$ άρα

$$\lambda^*(X) \geqslant \lambda^*(X \cap A^c) = \lambda^*(X \cap A) + \lambda^*(X \cap A^c). \tag{1.2.6}$$

Από την Παρατήρηση 1.2.2 έπεται το ζητούμενο. □

**Πρόταση 1.2.4.** *Το συμπλήρωμα μετρήσιμου συνόλου είναι μετρήσιμο σύνολο: αν $A \in \mathcal{M}$ τότε $A^c = \mathbb{R}^d \setminus A \in \mathcal{M}$.*

*Απόδειξη.* Έστω $X \subseteq \mathbb{R}^d$. Παρατηρήστε ότι

$$\lambda^*(X) \geqslant \lambda^*(X \cap A) + \lambda^*(X \cap A^c) = \lambda^*(X \cap A^c) + \lambda^*(X \cap (A^c)^c), \tag{1.2.7}$$

όπου η πρώτη ανισότητα ισχύει διότι $A \in \mathcal{M}$ και η ισότητα μετά προκύπτει από το γεγονός ότι $A = (A^c)^c$. Από την Παρατήρηση 1.2.2 έπεται το ζητούμενο. □.

**Πρόταση 1.2.5.** *Η ένωση δύο μετρήσιμων συνόλων είναι μετρήσιμο σύνολο: αν $A, B \in \mathcal{M}$, τότε $A \cup B \in \mathcal{M}$.*

*Απόδειξη.* Έστω $X \subseteq \mathbb{R}^d$. Παρατηρούμε ότι

$$X \cap (A \cup B) = X \cap (A \cup (A^c \cap B)) = (X \cap A) \cup (X \cap A^c \cap B) \tag{1.2.8}$$

και, χρησιμοποιώντας τη μετρησιμότητα των $A$ και $B$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\lambda^*(X \cap (A \cup B)) + \lambda^*(X \cap (A \cup B)^c) &= \lambda^*((X \cap A) \cup (X \cap A^c \cap B)) \\
&+ \lambda^*(X \cap (A \cup B)^c) \\
&\leqslant \lambda^*(X \cap A) + \lambda^*((X \cap A^c) \cap B) \\
&+ \lambda^*((X \cap A^c) \cap B^c) \\
&\leqslant \lambda^*(X \cap A) + \lambda^*(X \cap A^c) \\
&= \lambda^*(X).
\end{aligned}$$

Από την Παρατήρηση 1.2.2 έπεται ότι το $A \cup B$ είναι μετρήσιμο. □

**Πρόταση 1.2.6.** *Η τομή δύο μετρήσιμων συνόλων είναι μετρήσιμο σύνολο: αν* $A, B \in \mathcal{M}$, *τότε* $A \cap B \in \mathcal{M}$.

*Απόδειξη:* Παρατηρούμε ότι $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$ και χρησιμοποιούμε τις Προτάσεις 1.2.4 και 1.2.5. □

**Πρόταση 1.2.7.** *Αν* $A, B \in \mathcal{M}$ *και* $A \cap B = \emptyset$ *τότε, για κάθε* $X \subseteq \mathbb{R}^d$,

$$\lambda^*(X \cap (A \cup B)) = \lambda^*(X \cap A) + \lambda^*(X \cap B). \tag{1.2.9}$$

*Απόδειξη.* Αρκεί να υποθέσουμε ότι το ένα από τα δύο σύνολα, ας πούμε το $A$, είναι μετρήσιμο. Γράφουμε

$$\begin{aligned}\lambda^*(X \cap (A \cup B)) &= \lambda^*([X \cap (A \cup B)] \cap A) + \lambda^*([X \cap (A \cup B)] \cap A^c)\\ &= \lambda^*(X \cap A) + \lambda^*(x \cap B),\end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $[X \cap (A \cup B)] \cap A^c = (X \cap A \cap A^c) \cup (X \cap B \cap A^c) = X \cap B$ και $[X \cap (A \cup B)] \cap A = (X \cap A) \cup (X \cap A \cap B) = X \cap A$, λόγω της $A \cap B = \emptyset$. □

**Πόρισμα 1.2.8.** *Αν* $A, B \in \mathcal{M}$ *και* $A \cap B = \emptyset$, *τότε*

$$\lambda^*(A \cup B) = \lambda^*(A) + \lambda^*(B). \tag{1.2.10}$$

*Απόδειξη.* Παίρνουμε $X = \mathbb{R}^d$ στην Πρόταση 1.2.7. □

**Πόρισμα 1.2.9.** *Αν* $B_1, \ldots, B_m$ *είναι ξένα ανά δύο σύνολα στην* $\mathcal{M}$ *τότε, για κάθε* $X \subseteq \mathbb{R}$,

$$\lambda^*(X \cap (B_1 \cup \cdots \cup B_m)) = \sum_{i=n}^{m} \lambda^*(X \cap B_n). \tag{1.2.11}$$

*Απόδειξη.* Με επαγωγή ως προς $m$, χρησιμοποιώντας την Πρόταση 1.2.7. □

**Πρόταση 1.2.10.** *Αν* $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ *είναι μια ακολουθία μετρήσιμων συνόλων, τότε η ένωσή τους* $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ *είναι μετρήσιμο σύνολο.*

*Απόδειξη.* Θεωρούμε την ακολουθία συνόλων

$$B_1 = A_1,\ B_2 = A_2 \setminus A_1 = A_2 \cap A_1^c, \ldots,\ B_n = A_n \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}), \ldots. \tag{1.2.12}$$

Από τις ιδιότητες που έχουμε αποδείξει, κάθε $B_n$ είναι μετρήσιμο σύνολο. Από τον τρόπο ορισμού τους, τα $B_n$ είναι ξένα ανά δύο και

$$A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n. \tag{1.2.13}$$

Έστω $X \subseteq \mathbb{R}$. Για κάθε $m \in \mathbb{N}$, το $B_1 \cup \cdots \cup B_m$ είναι μετρήσιμο, άρα

$$\begin{aligned}\lambda^*(X) &= \lambda^*(X \cap (B_1 \cup \cdots \cup B_m)) + \lambda^*(X \setminus (B_1 \cup \cdots \cup B_m))\\ &= \sum_{n=1}^{m} \lambda^*(X \cap B_n) + \lambda^*(X \setminus (B_1 \cup \cdots \cup B_m))\\ &\geqslant \sum_{n=1}^{m} \lambda^*(X \cap B_n) + \lambda^*(X \setminus A),\end{aligned}$$

από το Πόρισμα 1.2.9 και τον εγκλεισμό $X \setminus A \subseteq X \setminus (B_1 \cup \cdots \cup B_m)$. Αφήνοντας το $m \to \infty$, παίρνουμε

$$\lambda^*(X) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(X \cap B_n) + \lambda^*(X \setminus A) \geqslant \lambda^*(X \cap A) + \lambda^*(X \setminus A), \tag{1.2.14}$$

λόγω της αριθμήσιμης υποπροσθετικότητας του εξωτερικού μέτρου. Άρα, το $A$ είναι μετρήσιμο. □

## 1.3 Μέτρο Lebesgue

Συνοψίζουμε όσα έχουμε κάνει ως τώρα. Ορίσαμε το εξωτερικό μέτρο $\lambda^*(A)$ για κάθε υποσύνολο $A$ του $\mathbb{R}^d$. Θεωρήσαμε μια κλάση $\mathcal{M}$ υποσυνόλων του $\mathbb{R}$, τα οποία ονομάσαμε μετρήσιμα σύνολα. Είδαμε ότι αυτή η κλάση έχει τις εξής ιδιότητες:

(i) $\mathbb{R} \in \mathcal{M}$.

(ii) $A \in \mathcal{M} \Longrightarrow \mathbb{R} \setminus A \in \mathcal{M}$.

(iii) Αν $A_n \in \mathcal{M}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$.

Οι ιδιότητες αυτές χαρακτηρίζουν τις **$\sigma$-άλγεβρες**:

**Ορισμός 1.3.1** ($\sigma$-άλγεβρα)**.** Έστω $\Omega$ ένα μη κενό σύνολο. Μία κλάση $\mathcal{A}$ υποσυνόλων του $\Omega$ λέγεται $\sigma$-άλγεβρα αν

(i) $\Omega \in \mathcal{A}$.

(ii) Αν $A \in \mathcal{A}$, τότε $\Omega \setminus A \in \mathcal{A}$.

(iii) Αν $A_n \in \mathcal{A}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Με άλλα λόγια, μια κλάση υποσυνόλων του $\Omega$ λέγεται $\sigma$-άλγεβρα αν είναι «κλειστή ως προς συμπληρώματα και αριθμήσιμες ενώσεις». Έπεται ότι είναι κλειστή και ως προς αριθμήσιμες τομές και διαφορές:

(iv) Αν $A_n \in \mathcal{A}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right)^c \in \mathcal{A}. \tag{1.3.1}$$

(v) Αν $A, B \in \mathcal{A}$, τότε $A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{A}$.

**Παρατήρηση 1.3.2.** Με βάση τον Ορισμό 1.3.1 η κλάση $\mathcal{M}$ των μετρήσιμων συνόλων είναι $\sigma$-άλγεβρα. Ειδικότερα, αν $A_n \in \mathcal{M}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$, και αν $A, B \in \mathcal{M}$, τότε $A \setminus B \in \mathcal{M}$.

### 1.3.1 Μέτρο Lebesgue

Ορίζουμε $\lambda : \mathcal{M} \to [0, +\infty)$ με $A \mapsto \lambda(A) := \lambda^*(A)$. Δηλαδή, η $\lambda$ είναι ο περιορισμός της συνολοσυνάρτησης $\lambda^*$ (του εξωτερικού μέτρου) στην κλάση $\mathcal{M}$. Η συνάρτηση $\lambda$ ονομάζεται **μέτρο Lebesgue** ή απλά **μέτρο**.

**Θεώρημα 1.3.3.** *Έστω $\mathcal{M} = \{A \subseteq \mathbb{R} : A$ Lebesgue μετρήσιμο $\}$. Η $\mathcal{M}$ είναι σ-άλγεβρα και η συνολοσυνάρτηση $\lambda : \mathcal{M} \to [0, +\infty)$ που ορίζεται μέσω της*

$$A \mapsto \lambda(A) := \lambda^*(A) \tag{1.3.2}$$

*είναι* **αριθμήσιμα προσθετική** *(ή, σ-προσθετική). Δηλαδή, αν $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία ξένων ανά δύο Lebesgue μετρήσιμων συνόλων ($A_n \in \mathcal{M}$ για κάθε $n$ και $A_n \cap A_m = \emptyset$ αν $n \neq m$), τότε*

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n). \tag{1.3.3}$$

*Απόδειξη.* Μένει να δείξουμε ότι το μέτρο $\lambda$ είναι αριθμήσιμα προσθετική συνολοσυνάρτηση. Έστω $A_n$, $n \in \mathbb{N}$, ξένα ανά δύο μετρήσιμα σύνολα. Από την Πρόταση 1.2.10 το $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ είναι μετρήσιμο.

Χρησιμοποιώντας τη μονοτονία του μέτρου και το Πόρισμα 1.2.8, βλέπουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{m} \lambda(A_n) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{m} A_n\right) \leqslant \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \tag{1.3.4}$$

για κάθε $m \in \mathbb{N}$, άρα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) \leqslant \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right). \tag{1.3.5}$$

Η αντίστροφη ανισότητα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) \geqslant \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \tag{1.3.6}$$

προκύπτει άμεσα από την αριθμήσιμη υποπροσθετικότητα του (εξωτερικού) μέτρου (Πρόταση 1.1.11). □

### 1.3.2 Borel σύνολα και Lebesgue μετρήσιμα σύνολα

Ποιά σύνολα είναι μετρήσιμα; Ήδη γνωρίζουμε ότι τα σύνολα που έχουν εξωτερικό μέτρο 0 (και τα συμπληρώματά τους) ανήκουν στην $\mathcal{M}$. Όπως θα δούμε, η $\mathcal{M}$ είναι αρκετά πλούσια: όλα τα «καλά» - από τοπολογική άποψη - υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$ είναι Lebesgue μετρήσιμα.

**Πρόταση 1.3.4.** *Όλα τα διαστήματα $I$ του $\mathbb{R}^d$ είναι Lebesgue μετρήσιμα.*

*Απόδειξη.* Θα δώσουμε την απόδειξη μόνο για την περίπτωση $d = 1$ (η περίπτωση $d > 1$ αφήνεται για τις ασκήσεις). Θεωρούμε πρώτα τυχούσα κλειστή ημιευθεία της μορφής $J = [a, +\infty)$. Έστω $X \subseteq \mathbb{R}$. Θέλουμε να δείξουμε ότι

$$\lambda^*(X) \geqslant \lambda^*(X \cap [a, +\infty)) + \lambda^*(X \cap (-\infty, a)). \tag{1.3.7}$$

Σύμφωνα με τον ορισμό του εξωτερικού μέτρου, αρκεί να δείξουμε ότι αν $(I_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μία κάλυψη του $X$ από ανοιχτά διαστήματα, τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) \geqslant \lambda^*(X \cap [a,+\infty)) + \lambda^*(X \cap (-\infty,a)). \tag{1.3.8}$$

Έστω ότι $X \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, και ας υποθέσουμε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < +\infty$ (αλλιώς, δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε). Θα δείξουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) + \varepsilon \geqslant \lambda^*(X \cap [a,+\infty)) + \lambda^*(X \cap (-\infty,a)). \tag{1.3.9}$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$I_n' = I_n \cap (a,+\infty) \quad , \quad I_n'' = I_n \cap (-\infty,a), \tag{1.3.10}$$

και

$$I_0 = \left(a - \frac{\varepsilon}{2}, a + \frac{\varepsilon}{2}\right). \tag{1.3.11}$$

Καθένα από τα $I_n', I_n''$ είναι ανοιχτό διάστημα ή το κενό σύνολο, και (εξηγήστε γιατί)

$$\ell(I_n) = \ell(I_n') + \ell(I_n''). \tag{1.3.12}$$

Επίσης,

$$X \cap [a,+\infty) \subseteq I_0 \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n' \tag{1.3.13}$$

και

$$X \cap (-\infty,a) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n''. \tag{1.3.14}$$

Άρα,

$$\begin{aligned}
\lambda^*(X \cap [a,+\infty)) + \lambda^*(X \cap (-\infty,a)) &\leqslant \ell(I_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n') + \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n'') \\
&= \varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} \big(\ell(I_n') + \ell(I_n'')\big) \\
&= \varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n).
\end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει ότι το $J = [a,+\infty)$ είναι μετρήσιμο.

Αν $J = (a,+\infty)$, τότε γράφοντας

$$(a,+\infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a + 1/n, +\infty) \tag{1.3.15}$$

και χρησιμοποιώντας την Πρόταση 1.2.10 και το αποτέλεσμα για κλειστές ημιευθείες, βλέπουμε ότι $J \in \mathcal{M}$.

Τώρα, βλέπουμε αμεσως ότι τα $(-\infty, a)$ και $(-\infty, a]$ είναι μετρήσιμα σύνολα ως συμπληρώματα μετρήσιμων συνόλων.

Τέλος, εύκολα βλέπουμε ότι διαστήματα της μορφής $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$ και $(a, b)$ είναι μετρήσιμα. Για παράδειγμα,

$$[a, b] = \mathbb{R} \setminus \big((-\infty, a) \cup (b, +\infty)\big) \tag{1.3.16}$$

δηλαδή το $[a, b]$ είναι μετρήσιμο ως συμπλήρωμα του μετρήσιμου συνόλου $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$. □

**Ορισμός 1.3.5** (Borel $\sigma$-άλγεβρα)**.** Η μικρότερη $\sigma$-άλγεβρα υποσυνόλων του $\mathbb{R}^d$ που περιέχει όλα τα ανοικτά διαστήματα λέγεται **$\sigma$-άλγεβρα των Borel υποσυνόλων του** $\mathbb{R}$ (ή Borel $\sigma$-άλγεβρα) και συμβολίζεται με $\mathcal{B}$. Τυπικά, ορίζουμε

$$\mathcal{B} = \bigcap \big\{\mathcal{A} \subseteq P(\mathbb{R}) : \mathcal{A}\ \ \sigma - \text{άλγεβρα και κάθε ανοικτό διάστημα ανήκει στην } \mathcal{A}\big\}, \tag{1.3.17}$$

και ελέγχουμε ότι η $\mathcal{B}$ είναι $\sigma$-άλγεβρα, ότι κάθε ανοικτό διάστημα ανήκει στην $\mathcal{B}$ και ότι $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ για κάθε $\sigma$-άλγεβρα $\mathcal{A}$ που έχει αυτήν την ιδιότητα.

Από τον ορισμό της Borel $\sigma$-άλγεβρας, από το γεγονός ότι η $\mathcal{M}$ είναι $\sigma$-άλγεβρα και από την Πρόταση 1.3.4 συμπεραίνουμε ότι κάθε Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι μετρήσιμο:

**Πρόταση 1.3.6.** $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{M}$. □

**Πρόταση 1.3.7.** *Κάθε ανοικτό και κάθε κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ είναι σύνολο Borel, άρα είναι μετρήσιμο σύνολο.*

*Απόδειξη.* Κάθε ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ είναι αριθμήσιμη ένωση ανοιχτών διαστημάτων - και μάλιστα ξένων ανά δύο (γνωστό από την Πραγματική Ανάλυση για $d = 1$, η περίπτωση $d > 1$ θα εξηγηθεί στις ασκήσεις). Αφού η $\mathcal{B}$ είναι $\sigma$-άλγεβρα και περιέχει τα ανοικτά διαστήματα, η $\mathcal{B}$ περιέχει όλα τα ανοικτά, άρα και όλα τα κλειστά, σύνολα. □

**Παρατηρήσεις 1.3.8.** (α) Η Borel $\sigma$-άλγεβρα περιέχει πολύ περισσότερα σύνολα από τα ανοικτά και τα κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$. Όλες οι αριθμήσιμες τομές ανοικτών συνόλων (τα λεγόμενα **$G_\delta$-σύνολα**) είναι Borel σύνολα, όλες οι αριθμήσιμες ενώσεις κλειστών συνόλων (τα λεγόμενα **$F_\sigma$-σύνολα**) είναι Borel σύνολα, και ούτω καθεξής.

(β) Η κλάση $\mathcal{M}$ των μετρήσιμων συνόλων είναι γνήσια μεγαλύτερη από την κλάση $\mathcal{B}$ των Borel συνόλων: υπάρχουν μετρήσιμα σύνολα που δεν είναι Borel. Μπορεί κανείς να δώσει παράδειγμα συνόλου που δεν είναι Borel και έχει εξωτερικό μέτρο 0 (άρα, είναι μετρήσιμο). Θα περιγράψουμε τέτοια παραδείγματα αργότερα.

### 1.3.3 Περιγραφή των μετρήσιμων συνόλων

Τα μετρήσιμα σύνολα προσεγγίζονται από Borel σύνολα, με την εξής έννοια:

**Πρόταση 1.3.9.** *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(i) *Το $A$ είναι μετρήσιμο.*

(ii) *Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ανοικτό $G \subseteq \mathbb{R}$ με $A \subseteq G$ και $\lambda^*(G \setminus A) < \varepsilon$.*

(iii) *Υπάρχει $G_\delta$-σύνολο $B$ ώστε $A \subseteq B$ και $\lambda^*\big(B \setminus A\big) = 0$.*

*Απόδειξη.* (i) $\Rightarrow$ (ii). Υποθέτουμε ότι το $A$ είναι μετρήσιμο και, αρχικά, ότι $\lambda(A) < +\infty$. Έστω $\varepsilon > 0$. Από τον ορισμό του $\lambda(A) = \lambda^*(A)$, υπάρχει ακολουθία ανοικτών διαστημάτων $(I_n)$ ώστε $A \subseteq \bigcup_n I_n$ και

$$\sum_n \lambda(I_n) = \sum_n \ell(I_n) < \lambda(A) + \varepsilon. \tag{1.3.18}$$

Ορίζουμε $G = \bigcup_n I_n$. Το $G$ είναι ανοικτό σύνολο, $A \subseteq G$ και έχουμε

$$\lambda(A) \leqslant \lambda(G) = \lambda\left(\bigcup_n I_n\right) \leqslant \sum_n \lambda(I_n) < \lambda(A) + \varepsilon. \tag{1.3.19}$$

Αφού τα $A$ και $G$ είναι μετρήσιμα, έχουμε ότι το $G \setminus A$ είναι μετρήσιμο και

$$\lambda(G) = \lambda(A \cup (G \setminus A)) = \lambda(A) + \lambda(G \setminus A) \tag{1.3.20}$$

από το Πόρισμα 1.2.8. Συνεπώς,

$$\lambda^*(G \setminus A) = \lambda(G \setminus A) = \lambda(G) - \lambda(A) < \varepsilon, \tag{1.3.21}$$

από την (1.3.19).

Έστω τώρα ότι $\lambda(A) = +\infty$. Έστω $\varepsilon > 0$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $A_n = A \cap (-n, n)$. Κάθε $A_n$ είναι μετρήσιμο, $\lambda(A_n) < +\infty$ και $A = \bigcup_n A_n$. Με βάση την περίπτωση που εξετάσαμε παραπάνω, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ βρίσκουμε ανοικτό σύνολο $G_n$ ώστε $A_n \subseteq G_n$ και $\lambda(G_n \setminus A_n) < \varepsilon/2^n$. Ορίζουμε $G = \bigcup_n G_n$. Τότε, το $G$ είναι ανοικτό σύνολο, $G = \bigcup_n G_n \supseteq \bigcup_n A_n = A$ και εύκολα ελέγχουμε ότι

$$G \setminus A = \left(\bigcup_n G_n\right) \setminus \left(\bigcup_n A_n\right) \subseteq \bigcup_n (G_n \setminus A_n). \tag{1.3.22}$$

Συνεπώς,

$$\lambda(G \setminus A) \leqslant \lambda\left(\bigcup_n (G_n \setminus A_n)\right) \leqslant \sum_n \lambda(G_n \setminus A_n) < \sum_n \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon. \tag{1.3.23}$$

Έτσι, έχουμε αποδείξει το (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Υποθέτοντας το (ii), για κάθε $k \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε ανοικτό $G_k \subseteq \mathbb{R}$ με $A \subseteq G_k$ και $\lambda^*(G_k \setminus A) < 1/k$. Ορίζουμε $B = \bigcap_{k=1}^\infty G_k$. Το $B$ είναι $G_\delta$-σύνολο και $A \subseteq B$. Παρατηρούμε ότι

$$\lambda^*(B \setminus A) \leqslant \lambda^*(G_k \setminus A) < \frac{1}{k} \tag{1.3.24}$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$, άρα

$$\lambda^*(B \setminus A) = 0. \tag{1.3.25}$$

Έχουμε λοιπόν αποδείξει το (iii).

Παρατηρήστε επίσης ότι

$$\lambda^*(B) = \lambda^*(A \cup (B \setminus A)) \leqslant \lambda^*(B) + \lambda^*(B \setminus A) = \lambda^*(A). \tag{1.3.26}$$

Αφού $A \subseteq B$, ισχύει και η αντίστροφη ανισότητα $\lambda^*(A) \leqslant \lambda^*(B)$. Συνεπώς, $\lambda^*(B) = \lambda^*(A)$.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Υποθέτουμε ότι υπάρχει $G_\delta$-σύνολο $B$ ώστε $A \subseteq B$ και $\lambda^*\big(B \setminus A\big) = 0$. Από την Πρόταση 1.2.3 το $B \setminus A$ είναι μετρήσιμο. Το $B$ ανήκει στην Borel $\sigma$-άλγεβρα (ως αριθμήσιμη τομή ανοικτών συνόλων). Άρα, το $B$ είναι μετρήσιμο. Γράφοντας

$$A = B \setminus (B \setminus A) \tag{1.3.27}$$

συμπεραίνουμε ότι το $A$ είναι μετρήσιμο. □

### 1.3.4 Συνέχεια του μέτρου Lebesgue

Ολοκληρώνουμε αυτήν την παράγραφο με δύο ακόμα ιδιότητες του μέτρου Lebesgue, οι οποίες είναι συνέπειες της αριθμήσιμης προσθετικότητας:

**Πρόταση 1.3.10.** (i) *Αν $(A_n)$ είναι αύξουσα ακολουθία μετρήσιμων συνόλων και $A := \bigcup_{n=1}^\infty A_n$, τότε*

$$\lambda(A_n) \to \lambda(A). \tag{1.3.28}$$

(ii) *Αν $(B_n)$ είναι φθίνουσα ακολουθία μετρήσιμων συνόλων με $\lambda(B_1) < +\infty$ και $B := \bigcap_{n=1}^\infty B_n$, τότε*

$$\lambda(B_n) \to \lambda(B). \tag{1.3.29}$$

**Απόδειξη:** (i) Γράφουμε το $A$ σαν ξένη ένωση:

$$A = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_3 \setminus A_2) \cup \cdots , \tag{1.3.30}$$

και χρησιμοποιώντας την αριθμήσιμη προσθετικότητα του μέτρου παίρνουμε

$$\begin{aligned} \lambda(A) &= \lambda(A_1) + \lambda(A_2 \setminus A_1) + \cdots + \lambda(A_n \setminus A_{n-1}) + \cdots \\ &= \lim_{n\to\infty} \big(\lambda(A_1) + \lambda(A_2 \setminus A_1) + \cdots + \lambda(A_n \setminus A_{n-1})\big) \\ &= \lim_{n\to\infty} \lambda(A_n). \end{aligned}$$

(ii) Παρατηρούμε πρώτα ότι αν $C, D \in \mathcal{M}$ με $D \subset C$ και $\lambda(D) < +\infty$, τότε

$$\lambda(C \setminus D) = \lambda(C) - \lambda(D). \tag{1.3.31}$$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $A_n = B_1 \setminus B_n$. Τότε, η $(A_n)$ είναι αύξουσα, οπότε

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(A_n) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(B_1 \setminus B_n)\right) = \lambda\left(B_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lambda(B_1) - \lambda(B), \tag{1.3.32}$$

από το (i). Επίσης,

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(A_n) = \lim_{n\to\infty} \big(\lambda(B_1) - \lambda(B_n)\big) = \lambda(B_1) - \lim_{n\to\infty} \lambda(B_n). \tag{1.3.33}$$

Άρα, $\lambda(B) = \lim_{n\to\infty} \lambda(B_n)$. □

**Παρατήρηση 1.3.11.** Η υπόθεση $\lambda(B_1) < +\infty$ στο (ii) μπορεί να αντικατασταθεί από την $\lambda(B_k) < +\infty$ για *κάποιο* $k$ (εξηγήστε γιατί). Δεν μπορούμε όμως να την αφαιρέσουμε τελείως: αν $B_n = [n, +\infty)$, τότε $B_n \searrow \emptyset$ αλλά $\lambda(B_n) = +\infty$ για κάθε $n$ ενώ $\lambda(\emptyset) = 0$.

## 1.4 Το σύνολο του Cantor και το σύνολο του Vitali

Έχουμε ήδη συζητήσει το σύνολο του Cantor και την κατασκευή του Vitali. Έχοντας πλέον ορίσει το μέτρο Lebesgue $\lambda$ στο $\mathbb{R}$ επιστρέφουμε σε αυτά τα δύο σύνολα για να τα δούμε μέσα στο πλαίσιο που έχουμε αναπτύξει.

### 1.4.1 Το σύνολο του Cantor

Όπως είδαμε στην εισαγωγή, το σύνολο του Cantor ορίζεται ως η τομή μιας φθίνουσας ακολουθίας κλειστών υποσυνόλων του $[0,1]$. Θεωρούμε το διάστημα $C_0 = [0,1]$ και το χωρίζουμε σε τρία ίσα διαστήματα. Αφαιρούμε το ανοικτό μεσαίο διάστημα και ονομάζουμε $C_1$ το σύνολο που απομένει. Το $C_1$ αποτελείται από δύο ξένα κλειστά διαστήματα μήκους $1/3$. Χωρίζουμε καθένα από αυτά σε τρία ίσα διαστήματα, από καθένα από αυτά αφαιρούμε το μεσαίο ανοικτό διάστημα, και ονομάζουμε $C_2$ το κλειστό σύνολο που απομένει. Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο, κατασκευάζουμε για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ ένα κλειστό σύνολο $C_n$ έτσι ώστε η ακολουθία $(C_n)$ να έχει τις εξής ιδιότητες:

(i) $C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \cdots$.

(ii) Το $C_n$ είναι η ένωση $2^n$ κλειστών διαστημάτων, καθένα από τα οποία έχει μήκος $1/3^n$.

Το σύνολο του Cantor είναι το σύνολο

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n. \tag{1.4.1}$$

Τα διαστήματα της μορφής $\big[k/3^n, (k+1)/3^n\big]$, $n \in \mathbb{N}$, $k = 0, 1, \ldots, 3^n - 1$, ονομάζονται τριαδικά διαστήματα.

Το $C$ είναι μη κενό, αφού περιέχει τα άκρα όλων των τριαδικών διαστημάτων που απαρτίζουν κάθε $C_n$ (όπως θα δούμε παρακάτω περιέχει και πολλά άλλα σημεία). Επίσης το $C$ είναι κλειστό, αφού η τομή κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο. Επιπλέον, το $C$ έχει τις εξής ιδιότητες:

(1) *Το $C$ είναι τέλειο σύνολο*, δηλαδή είναι κλειστό και κάθε σημείο του $C$ είναι σημείο συσσώρευσης του $C$.

*Απόδειξη.* Είδαμε ότι το $C$ είναι κλειστό. Για να δείξουμε ότι κάθε $x \in C$ είναι σημείο συσσώρευσης του $C$, παρατηρούμε ότι για το τυχόν $x \in C$ υπάρχει μοναδική ακολουθία κλειστών τριαδικών διαστημάτων $I_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, με $x \in I_n(x)$, $I_n(x) \subset C_n$ και $\ell(I_n(x)) = \frac{1}{3^n}$. Οι ακολουθίες $(\alpha_n(x))$ και $(\delta_n(x))$ των αριστερών και δεξιών άκρων των $I_n(x)$ αντίστοιχα περιέχονται στο $C$, καθεμία από αυτές συγκλίνει στο $x$, και η μία τουλάχιστον από τις δύο δεν είναι τελικά σταθερή. Άρα, το $x$ είναι σημείο συσσώρευσης του $C$. $\square$

(2) *Το $C$ έχει μέτρο ίσο με $0$.*

*Απόδειξη.* Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $C \subset C_n$ και $\lambda(C_n) = \frac{2^n}{3^n}$, αφού το $C_n$ είναι ένωση $2^n$ ξένων ανά δύο κλειστών διαστημάτων, καθένα από τα οποία έχει μήκος $\frac{1}{3^n}$. Άρα,

$$\lambda(C) \leqslant \lambda(C_n) = \frac{2^n}{3^n} \tag{1.4.2}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε $\lambda(C) = 0$. $\square$

*Παρατήρηση.* Ειδικότερα, το $C$ δεν περιέχει κανένα διάστημα.

(3) *Το $C$ είναι υπεραριθμήσιμο.*

*Απόδειξη.* Από ένα γενικό θεώρημα της Τοπολογίας, κάθε μη κενό τέλειο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι υπεραριθμήσιμο. Αφού δείξαμε ότι το $C$ είναι τέλειο, έπεται ο ισχυρισμός. Θα δώσουμε όμως μια δεύτερη απόδειξη, η οποία μάς δίνει την αφορμή να δούμε μια διαφορετική περιγραφή του συνόλου $C$ που παρουσιάζει γενικότερο ενδιαφέρον.

Μπορούμε να ορίσουμε μία ένα προς ένα και επί απεικόνιση $\Phi$ του $C$ στο σύνολο

$$\{0,2\}^{\mathbb{N}} = \big\{(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} : \text{για κάθε } n,\ \alpha_n = 0 \text{ ή } \alpha_n = 2\big\}. \tag{1.4.3}$$

Το $\{0,2\}^{\mathbb{N}}$ είναι υπεραριθμήσιμο (θυμηθείτε το διαγώνιο επιχείρημα του Cantor). Άρα, το $C$ είναι υπεραριθμήσιμο. Η απεικόνιση $\Phi$ ορίζεται ως εξής:

Για κάθε $x \in C$ υπάρχει μοναδική ακολουθία κλειστών διαστημάτων $I_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, ώστε: $I_1(x) \supset I_2(x) \supset \cdots$, και για κάθε $n$, $x \in I_n(x)$ και το $I_n(x)$ είναι ένα από τα τριαδικά διαστήματα μήκους $\frac{1}{3^n}$ που απαρτίζουν το $C_n$.

Με βάση αυτήν την ακολουθία διαστημάτων ορίζουμε μια ακολουθία $(\alpha_n^x)_{n=1}^{\infty} \in \{0,2\}^{\mathbb{N}}$ ως εξής:

(α) $n = 1$: Θέτουμε $\alpha_1^x = 0$ αν $I_1(x) = \big[0, 1/3\big]$ (δηλαδή, αν $x \in \big[0, 1/3\big]$) και $\alpha_1^x = 2$ αν $I_1(x) = \big[2/3, 1\big]$ (δηλαδή, αν $x \in \big[2/3, 1\big]$).

(β) *Επαγωγικό βήμα:* Για κάθε $n$, αν $I_n(x) = \big[k/3^n, (k+1)/3^n\big]$ τότε το $I_{n+1}(x)$ είναι ένα από τα δύο διαστήματα $\big[k/3^n, (k/3^n) + (1/3^{n+1})\big]$, $\big[(k/3^n) + (2/3^{n+1}), (k+1)/3^n\big]$: εκείνο που περιέχει το $x$. Θέτουμε $\alpha_{n+1}^x = 0$ αν $I_{n+1}(x)$ είναι το πρώτο διάστημα, και $\alpha_{n+1}^x = 2$ αν $I_{n+1}(x)$ είναι το δεύτερο διάστημα.

Παρατηρούμε ότι αν $x \neq y$, τότε για κάποιο $n$ θα ισχύει $I_n(x) \neq I_n(y)$, αλλιώς θα έπρεπε να έχουμε $|x - y| \leqslant \frac{1}{3^n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $n_0$ είναι ο πρώτος φυσικός για τον οποίο $I_{n_0}(x) \neq I_{n_0}(y)$, τότε από τον ορισμό των $\alpha_n^x$ βλέπουμε ότι $\alpha_{n_0}^x \neq \alpha_{n_0}^y$, άρα οι δύο ακολουθίες $(\alpha_n^x)_{n=1}^{\infty}$ και $(\alpha_n^y)_{n=1}^{\infty}$ είναι διαφορετικές. Αυτό αποδεικνύει ότι η απεικόνιση $\Phi : C \to \{0,2\}^{\mathbb{N}}$ με $\Phi(x) = (\alpha_n^x)_{n=1}^{\infty}$ είναι ένα προς ένα.

Αντίστροφα, αν $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία από $0$ ή $2$, η ακολουθία αυτή ορίζει μοναδική ακολουθία τριαδικών διαστημάτων $(I_n)_{n=1}^{\infty}$ με $I_1 \supset I_2 \supset \cdots$, ώστε για κάθε $n$ το $I_n$ να είναι ένα από τα τριαδικά διαστήματα μήκους $\frac{1}{3^n}$ που απαρτίζουν το $C_n$:

(α) $n = 1$: Θέτουμε $I_1 = \big[0, 1/3\big]$ αν $\alpha_1 = 0$ ή $I_1 = \big[2/3, 1\big]$ αν $\alpha_1 = 2$.

(β) Γενικά, το $I_{n+1}$ ορίζεται να είναι ένα από τα δύο τριαδικά υποδιαστήματα μήκους $\frac{1}{3^{n+1}}$ του $I_n$ που περιέχονται στο $C_{n+1}$: το αριστερό αν $\alpha_{n+1} = 0$, ή το δεξιό αν $\alpha_{n+1} = 2$.

Αφού τα μήκη των διαστημάτων $I_n$ φθίνουν στο 0, η τομή τους είναι μονοσύνολο: έστω

$$\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n. \tag{1.4.4}$$

(Θυμηθείτε ότι η τομή είναι μη κενή λόγω του θεωρήματος των κιβωτισμένων διαστημάτων). Αφού $I_n \subset C_n$ για κάθε $n$, είναι φανερό ότι $x \in C$. Επίσης, $I_n(x) = I_n$ για κάθε $n$, και από τον τρόπο ορισμού των $I_n$ έχουμε

$$(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} = (\alpha_n^x)_{n=1}^{\infty} = \Phi(x). \tag{1.4.5}$$

Αυτό αποδεικνύει ότι η $\Phi$ είναι επί του $\{0, 2\}^{\mathbb{N}}$, άρα το $C$ είναι υπεραριθμήσιμο.

Ο τρόπος ορισμού της $\Phi$ μάς οδηγεί σε μια άλλη περιγραφή του συνόλου του Cantor. Αν $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία με $a_n \in \{0, 1, 2\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ συγκλίνει σε έναν αριθμό $x \in [0, 1]$. Αν $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ με $a_n \in \{0, 1, 2\}$ για κάθε $n$, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ (ή η ακολουθία $(a_n)_{n=1}^{\infty}$) λέγεται **τριαδική παράσταση** του $x$. Γράφουμε $x = (a_1, a_2, \ldots)$ αντί της $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$.

Κάθε αριθμός $x$ στο διάστημα $[0, 1]$ έχει τριαδική παράσταση. Η ακολουθία $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ μπορεί να επιλεγεί ως εξής: Χωρίζουμε το $[0, 1]$ στα τρία υποδιαστήματα $[0, 1/3]$, $(1/3, 2/3)$ και $[2/3, 1]$. Θέτουμε

$$a_1 = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1/3] \\ 1, & x \in (1/3, 2/3) \\ 2, & x \in [2/3, 1] \end{cases}$$

Με αυτόν τον ορισμό, σε κάθε περίπτωση έχουμε

$$\frac{a_1}{3} \leqslant x \leqslant \frac{a_1}{3} + \frac{1}{3}. \tag{1.4.6}$$

Ας υποθέσουμε ότι $x \in [0, 1/3]$. Χωρίζουμε αυτό το διάστημα στα τρία υποδιαστήματα $[0, 1/9]$, $(1/9, 2/9)$, $[2/9, 1/3]$ και θέτουμε $a_2 = 0, 1$ ή $2$ αντίστοιχα αν το $x$ ανήκει στο αριστερό, στο μεσαίο ή στο δεξιό από αυτά τα διαστήματα. Ανάλογα ορίζεται το $a_2$ όταν $x \in (1/3, 2/3)$ ή $x \in [2/3, 1]$, έτσι ώστε σε κάθε περίπτωση να έχουμε

$$\frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} \leqslant x \leqslant \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{1}{3^2}. \tag{1.4.7}$$

Συνεχίζουμε την επιλογή των $a_n$ με αυτόν τον τρόπο έτσι ώστε για κάθε $n$ να έχουμε

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^k} \leqslant x \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^k} + \frac{1}{3^n}. \tag{1.4.8}$$

Αφού λοιπόν

$$0 \leqslant x - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^k} \leqslant \frac{1}{3^n}, \tag{1.4.9}$$

έπεται ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{3^k}$ συγκλίνει στον $x$, δηλαδή

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{3^k}. \tag{1.4.10}$$

*Παραδείγματα.* Ελέγξτε ότι $1/8=(0,1,0,1,0,1,\dots)$ και $1/4=(2,0,2,0,2,0,\dots)$.

Είναι φανερό ότι αν $x\neq y$ τότε η τριαδική παράσταση του $x$ είναι διαφορετική από αυτήν του $y$, αφού μια σειρά δεν μπορεί να συγκλίνει σε δύο διαφορετικά όρια.

Υπάρχουν όμως αριθμοί $x\in[0,1]$ που έχουν δύο διαφορετικές τριαδικές παραστάσεις. Για παράδειγμα, αν $x=1/3$ τότε

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{3}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{0}{3^k}\quad \text{και}\quad \frac{1}{3}=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2}{3^k}. \tag{1.4.11}$$

(Με τον τρόπο επιλογής της $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ που παρουσιάσαμε παραπάνω, θα βρίσκαμε την δεύτερη παράσταση).

Γενικότερα, ισχύει το εξής: Ο $x\in[0,1]$ έχει δύο διαφορετικές τριαδικές παραστάσεις αν και μόνο αν ο $x$ είναι τριαδικός ρητός: δηλαδή αν $x=k/3^n$ για κάποιον $n\in\mathbb{N}$ και κάποιον $1\leqslant k\leqslant 3^n$ (αφήνεται ως άσκηση).

Το θεώρημα που ακολουθεί δίνει έναν άλλο τρόπο περιγραφής του συνόλου του Cantor.

**Θεώρημα 1.4.1.** *Έστω $x\in[0,1]$. Τότε, $x\in C$ αν και μόνο αν ο $x$ έχει μία τριαδική παράσταση η οποία περιέχει μόνο τα ψηφία 0 και 2.* □

*Απόδειξη.* Έστω $x\in[0,1]$. Αν η ακολουθία $(a_n)$ επιλεγεί με τον τρόπο που παρουσιάσαμε παραπάνω, τότε ισχύει το εξής: $x\in C$ αν και μόνο αν $a_n\neq 1$ για κάθε $n$. Αυτό αποδεικνύει ότι αν $x\in C$ τότε ο $x$ έχει μία τριαδική παράσταση που περιέχει μόνο τα ψηφία 0 και 2. Η ολοκλήρωση της απόδειξης αφήνεται ως άσκηση. □

### 1.4.2 Το λήμμα του Steinhaus και το σύνολο του Vitali

Στην §1.3.2 ορίσαμε την $\sigma$-άλγεβρα $\mathcal{B}$ των Borel υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ και την μεγαλύτερη $\sigma$-άλγεβρα $\mathcal{M}$ των μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Από τους ορισμούς έπονται άμεσα οι εγκλεισμοί

$$\mathcal{B}\subseteq\mathcal{M}\subseteq\mathcal{P}(\mathbb{R}). \tag{1.4.12}$$

Το ερώτημα όμως αν αυτοί οι δύο εγκλεισμοί είναι γνήσιοι (δηλαδή, αν υπάρχουν υποσύνολα του $\mathbb{R}$ που δεν είναι μετρήσιμα και αν υπάρχουν μετρήσιμα σύνολα που δεν είναι Borel) δεν είναι καθόλου απλό. Ουσιαστικά, είδαμε παράδειγμα μη μετρήσιμου συνόλου στην §1.1 (το σύνολο $N$ που ορίζεται εκεί, με βάση τον ορισμό των μετρήσιμων συνόλων που δώσαμε αργότερα, είναι μη μετρήσιμο). Σε αυτήν την παράγραφο θα κατασκευάσουμε παράδειγμα μη μετρήσιμου συνόλου, χρησιμοποιώντας το **λήμμα του Steinhaus**.

**Πρόταση 1.4.2** (Steinhaus). *Έστω $A$ μετρήσιμο σύνολο με $\lambda(A)>0$. Τότε, το «σύνολο διαφορών»*

$$A-A:=\{x-y:x\in A,y\in A\} \tag{1.4.13}$$

*του $A$ περιέχει διάστημα της μορφής $(-t,t)$ για κάποιο $t>0$.*

*Απόδειξη.* Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $0 < \lambda(A) < \infty$ (αν $\lambda(A) = \infty$, θεωρούμε $B \subseteq A$ με $0 < \lambda(B) < \infty$, δείχνουμε ότι το $B - B$ περιέχει διάστημα της μορφής $(-t, t)$ για κάποιο $t > 0$, και τότε, $A - A \supseteq B - B \supseteq (-t, t)$).

Έστω λοιπόν $A$ μετρήσιμο σύνολο με $0 < \lambda(A) < \infty$. Από την Πρόταση 1.3.9, για τυχόν $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε ανοικτό σύνολο $G \supseteq A$ ώστε $\lambda(G) < (1+\varepsilon)\lambda(A)$. Μπορούμε να γράψουμε το $G$ σαν αριθμήσιμη ένωση $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ μη επικαλυπτόμενων διαστημάτων. Θέτουμε $A_k = A \cap I_k$. Τότε,

$$\lambda(G) = \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) \quad \text{και} \quad \lambda(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A_k). \tag{1.4.14}$$

Από την $\lambda(G) < (1+\varepsilon)\lambda(A)$ έπεται ότι: υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\ell(I_k) \leqslant (1+\varepsilon)\lambda(A \cap I_k). \tag{1.4.15}$$

Παίρνοντας $\varepsilon = 1/3$ συμπεραίνουμε ότι υπάρχει διάστημα $I$ ώστε

$$\lambda(A \cap I) \geqslant \frac{3\ell(I)}{4}. \tag{1.4.16}$$

Θέτουμε $t = \frac{\ell(I)}{2}$. Θα δείξουμε ότι

$$(A \cap I) - (A \cap I) \supseteq (-t, t). \tag{1.4.17}$$

Αν αυτό δεν ισχύει, υπάρχει $s \in (-t, t)$ ώστε τα σύνολα $A \cap I$ και $(A \cap I) + s$ να είναι ξένα. Ταυτόχρονα, περιέχονται στο $I \cup (I + s)$, το οποίο είναι διάστημα μήκους $\ell(I) + |s|$. Έπεται ότι

$$2\lambda(A \cap I) = \lambda(A \cap I) + \lambda((A \cap I) + s) \leqslant \ell(I) + s < \frac{3\ell(I)}{2}, \tag{1.4.18}$$

δηλαδή $\lambda(A \cap I) < \frac{3\ell(I)}{4}$, το οποίο είναι άτοπο. Έπεται ότι $A - A \supseteq (A \cap I) - (A \cap I) \supseteq (-t, t)$. □

**Θεώρημα 1.4.3.** *Υπάρχει μη μετρήσιμο $E \subseteq \mathbb{R}$.*

*Απόδειξη.* Ορίζουμε σχέση ισοδυναμίας $\sim$ στο $\mathbb{R}$ ως εξής:

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}. \tag{1.4.19}$$

Η $\sim$ χωρίζει το $\mathbb{R}$ σε κλάσεις ισοδυναμίας

$$E_x = \{y \in \mathbb{R} : y = x + q \text{ για κάποιον } q \in \mathbb{Q}\}. \tag{1.4.20}$$

Αν συμβολίσουμε με $\mathcal{X} = \{X_a : a \in A\}$ την οικογένεια των διαφορετικών κλάσεων ισοδυναμίας, το αξίωμα της επιλογής μας λέει ότι υπάρχει ένα σύνολο $E = \{y_a : a \in A\} \subset \mathbb{R}$ το οποίο περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο $y_a$ από κάθε κλάση $X_a$. Ειδικότερα, αν $a \neq b$ στο $A$ τότε $y_a - y_b \notin \mathbb{Q}$.

Θεωρούμε μια αρίθμηση $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ του $\mathbb{Q}$ και θεωρούμε την ακολουθία συνόλων

$$E_n := E + q_n, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{1.4.21}$$

Τα σύνολα $E_n$ ικανοποιούν τα εξής:

(i) Αν $n \neq m$ τότε $E_n \cap E_m = \emptyset$. Πράγματι, αν υπήρχαν $y_a, y_b \in E$ ώστε $y_a + q_n = y_b + q_m$, τότε θα είχαμε $0 \neq y_a - y_b = q_m - q_n \in \mathbb{Q}$, το οποίο είναι άτοπο από τον τρόπο ορισμού του $E$.

(ii) $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Πράγματι, αν $x \in \mathbb{R}$ τότε υπάρχει $a \in A$ ώστε $x \in X_a$. Αυτό σημαίνει ότι $x = y_a + q$ για κάποιον $q \in \mathbb{Q}$. Όμως, τότε υπάρχει $n = n(x) \in \mathbb{N}$ ώστε $q = q_n$, δηλαδή, $x = y_a + q_n \in E_n$.

Ας υποθέσουμε ότι το $E$ είναι μετρήσιμο. Τότε, το $E_n = E + q_n$ είναι μετρήσιμο για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\lambda(E_n) = \lambda(E)$. Από τις ιδιότητες των $E_n$ και από την αριθμήσιμη προσθετικότητα του μέτρου, παίρνουμε

$$+\infty = \lambda(\mathbb{R}) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E). \tag{1.4.22}$$

Συνεπώς, $\lambda(E) > 0$. Από το λήμμα του Steinhaus, το $E - E$ περιέχει διάστημα $(-t, t)$ για κάποιον $t > 0$. Όμως αυτό είναι άτοπο, διότι το $E - E$ δεν μπορεί να περιέχει ρητό διαφορετικό από το 0: αν $x \neq y$ στο $E$ τότε ο $x - y$ είναι άρρητος, από τον τρόπο ορισμού του $E$. Έπεται ότι το $E$ δεν είναι μετρήσιμο σύνολο. □

**Παρατήρηση 1.4.4.** Με μια παραλλαγή αυτού του επιχειρήματος μπορούμε να δείξουμε ότι κάθε μετρήσιμο $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(A) > 0$ έχει μη μετρήσιμο υποσύνολο. Χρησιμοποιώντας τα σύνολα $E_n$ που ορίστηκαν στην (1.4.21) γράφουμε

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap E_n), \tag{1.4.23}$$

και υποθέτοντας ότι κάθε $A \cap E_n$ είναι μετρήσιμο καταλήγουμε στην

$$0 < \lambda(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A \cap E_n). \tag{1.4.24}$$

Συνεπώς, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\lambda(A \cap E_n) > 0$ και από το λήμμα του Steinhaus το $A \cap E_n - A \cap E_n$, άρα και το $E_n - E_n$, περιέχει διάστημα $(-t, t)$ για κάποιον $t > 0$. Αυτό οδηγεί σε άτοπο.

## 1.5 Ασκήσεις

### Ομάδα Α

**1.** (α) Έστω $A$ φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Δείξτε ότι $\lambda^*(A) < +\infty$.

(β) Έστω ότι το $A \subseteq \mathbb{R}^d$ έχει τουλάχιστον ένα εσωτερικό σημείο. Δείξτε ότι $\lambda^*(A) > 0$.

**2.** (α) Αν το $A$ είναι μετρήσιμο και $\lambda(A \triangle B) = 0$, τότε το $B$ είναι μετρήσιμο και $\lambda(B) = \lambda(A)$ (με $A \triangle B$ συμβολίζουμε τη συμμετρική διαφορά $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ των $A$ και $B$).

(β) Αν τα $A, B$ είναι μετρήσιμα, τότε

$$\lambda(A \cup B) + \lambda(A \cap B) = \lambda(A) + \lambda(B).$$

(γ) Αν τα $A, B$ είναι μετρήσιμα, $A \subseteq B$ και $\lambda(A) = \lambda(B) < +\infty$, τότε $\lambda(B \setminus A) = 0$.

(δ) Δώστε παράδειγμα μετρήσιμων συνόλων $A, B$ με $A \subseteq B$ και $\lambda(A) = \lambda(B)$, αλλά $\lambda(B \setminus A) > 0$.

**3.** (α) Αν $A, B \subseteq \mathbb{R}$ και $\lambda^*(B) = 0$, δείξτε ότι $\lambda^*(A \cup B) = \lambda^*(A)$.

(β) Αν $A, B \subseteq \mathbb{R}$ και $\lambda^*(A \triangle B) = 0$, δείξτε ότι $\lambda^*(A) = \lambda^*(B)$.

**4.** (α) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $t > 0$. Συμβολίζουμε με $tA$ το σύνολο $tA = \{tx \mid x \in A\}$. Δείξτε ότι $\lambda^*(tA) = t\,\lambda^*(A)$.

(β) Έστω $f : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση Lipschitz με σταθερά $C$, δηλαδή $|f(x) - f(y)| \leqslant C|x - y|$ για κάθε $x, y \in B$. Δείξτε ότι

$$\lambda^*(f(A)) \leqslant C\lambda^*(A)$$

για κάθε $A \subseteq B$.

(γ) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(A) = 0$. Δείξτε ότι το σύνολο $A' = \{x^2 \mid x \in A\}$ έχει επίσης μέτρο $\lambda(A') = 0$.

*Υπόδειξη:* Εξετάστε πρώτα την περίπτωση όπου $A \subseteq [-M, M]$ για κάποιο $M > 0$.

**5.** (α) Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ με $0 < \lambda^*(E) < +\infty$ και έστω $0 < \alpha < 1$. Δείξτε ότι υπάρχει ανοιχτό διάστημα $I$ με την ιδιότητα

$$\lambda^*(E \cap I) > \alpha\,\ell(I).$$

(β) Έστω $A$ μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και $\delta > 0$ ώστε $\lambda(A \cap I) \geqslant \delta\,\ell(I)$ για κάθε ανοιχτό διάστημα. Δείξτε ότι $\lambda(A^c) = 0$.

**6.** Έστω $A, B \subseteq \mathbb{R}$ με

$$\mathrm{dist}(A, B) = \inf\{|x - y| : x \in A, y \in B\} > 0.$$

Δείξτε ότι

$$\lambda^*(A \cup B) = \lambda^*(A) + \lambda^*(B).$$

**7.** Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Δείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:

(i) Το $A$ είναι μετρήσιμο.

(ii) Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει κλειστό $F \subseteq \mathbb{R}$ με $F \subseteq A$ και $\lambda^*(A \setminus F) < \varepsilon$.

(iii) Υπάρχει $F_\sigma$-σύνολο $\Gamma$ ώστε $\Gamma \subseteq A$ και $\lambda^*\big(A \setminus \Gamma\big) = 0$.

**8.** Έστω $E$ ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ορίζουμε το *εσωτερικό μέτρο Lebesgue* του $E$ θέτοντας

$$\lambda_{(i)}(E) = \sup\{\lambda(F) : F \subseteq E, F \text{ κλειστό}\}.$$

(α) Δείξτε ότι $\lambda_{(i)}(E) \leqslant \lambda^*(E)$.

(β) Υποθέτουμε ότι $\lambda^*(E) < \infty$. Δείξτε ότι το $E$ είναι Lebesgue μετρήσιμο αν και μόνο αν $\lambda_{(i)}(E) = \lambda^*(E)$.

(γ) Δείξτε ότι αν $\lambda^*(E) = \infty$ τότε η ισοδυναμία στο (β) δεν είναι πάντα σωστή.

**9.** Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μετρήσιμο σύνολο με $0 < \lambda(A) < +\infty$.

(α) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \lambda(A \cap (-\infty, x])$ είναι συνεχής.

(β) Δείξτε ότι υπάρχει μετρήσιμο σύνολο $F$ με $F \subseteq A$ και $\lambda(F) = \lambda(A)/2$.

**10.** (α) Έστω $(A_n)$ ακολουθία υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Ορίζουμε τα σύνολα

$$\limsup A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in A_n \text{ για άπειρα } n\}$$

και

$$\liminf A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{ υπάρχει } n_0(x) \in \mathbb{N} \text{ ώστε } x \in A_n \text{ για κάθε } n \geqslant n_0(x)\}.$$

Δείξτε ότι

$$\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \quad \text{και} \quad \liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

(β) Έστω $(A_n)$ ακολουθία μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι:

(i) Τα $\limsup A_n$ και $\liminf A_n$ είναι μετρήσιμα σύνολα.

(ii) $\lambda(\liminf A_n) \leqslant \liminf \lambda(A_n)$ και αν $\lambda(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) < +\infty$ τότε

$$\limsup \lambda(A_n) \leqslant \lambda(\limsup A_n).$$

(iii) (Λήμμα Borel-Cantelli) Αν $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) < +\infty$, τότε $\lambda(\limsup A_n) = 0$.

**11.** Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς:

(i) Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ και $\lambda^*(A) = 0$, τότε το $A$ είναι πεπερασμένο ή άπειρο αριθμήσιμο σύνολο.

(ii) Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ και το $A$ δεν είναι μετρήσιμο, τότε $\lambda^*(A) > 0$.

(iii) Αν $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $\lambda^*(A) < +\infty$, $B \subseteq A$, το $B$ είναι μετρήσιμο και $\lambda(B) = \lambda^*(A)$, τότε το $A$ είναι μετρήσιμο.

(iv) Έστω $A \subseteq [a, b]$. Τότε, $\lambda^*(A) = 0$ αν και μόνο αν υπάρχει κάλυψη του $A$ από μια ακολουθία ανοικτών διαστημάτων $(I_n)$ ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < +\infty$ και κάθε $x \in A$ ανήκει σε άπειρα το πλήθος από τα διαστήματα $I_n$.

(v) Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ τότε $\lambda(A) = 0$ αν και μόνο αν όλα τα υποσύνολα του $A$ είναι μετρήσιμα.

**12.** (α) Έστω $A \subseteq [a, b]$ με $\lambda(A) > 0$. Δείξτε ότι υπάρχουν $x, y \in A$ ώστε $x - y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

(β) (Λήμμα Steinhsus) Έστω $A$ μετρήσιμο σύνολο με $\lambda(A) > 0$. Δείξτε ότι το «σύνολο διαφορών»

$$A - A := \{x - y \mid x \in A, y \in A\}$$

του $A$ περιέχει διάστημα της μορφής $(-t, t)$ για κάποιο $t > 0$.

(γ) Έστω $E$ ένα Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda(E) > 1$. Δείξτε ότι υπάρχουν $x \neq y$ στο $E$ ώστε $x - y \in \mathbb{Z}$.

**13.** Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Δείξτε ότι το σύνολο

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \text{η } f \text{ είναι συνεχής στο } x\}$$

είναι σύνολο Borel.

**14.** Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ακολουθία συνεχών συναρτήσεων. Δείξτε ότι το σύνολο

$$B = \{x \in \mathbb{R} : \lim_{n \to \infty} f_n(x) = +\infty\}$$

είναι σύνολο Borel.

**15.** Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι για κάθε Borel $B \subseteq \mathbb{R}$ το $f^{-1}(B)$ είναι σύνολο Borel.

*Υπόδειξη:* Θεωρήστε την κλάση $\mathcal{A} = \{A \subseteq \mathbb{R} : \text{ το } f^{-1}(A) \text{ είναι σύνολο Borel}\}$.

**16.** Για κάθε $x \in [0,1)$ συμβολίζουμε με $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ την δεκαδική παράσταση του $x$ (αν το $x$ έχει δύο διαφορετικές δεκαδικές παραστάσεις θεωρούμε εκείνη που τελειώνει σε άπειρα μηδενικά). Βρείτε το εξωτερικό μέτρο καθενός από τα σύνολα:

(i) $A_1 = \{x \in [0,1) \mid x_1 \neq 5\}$.

(ii) $A_2 = \{x \in [0,1) \mid x_1 \neq 5 \ \text{ και } \ x_2 \neq 5\}$.

(iii) $A_3 = \{x \in [0,1) \mid \text{για κάθε } \ n = 1, 2, \ldots, \ x_n \neq 5\}$.

**17.** Έστω $\vartheta \in (0,1)$. Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία κατασκευής του συνόλου του Cantor με τη διαφορά ότι στο $n$-οστό βήμα αφαιρούμε κεντρικό ανοιχτό διάστημα μήκους $\vartheta/3^n$ από κάθε διάστημα που έχει απομείνει στο $(n-1)$-οστό βήμα. Καταλήγουμε σε ένα σύνολο $C_\vartheta$ «τύπου Cantor». Δείξτε ότι:

(α) Το $C_\vartheta$ είναι τέλειο και δεν περιέχει ανοιχτά διαστήματα.

(β) Το $C_\vartheta$ είναι υπεραριθμήσιμο.

(γ) Το $C_\vartheta$ είναι μετρήσιμο και $\lambda(C_\vartheta) = 1 - \vartheta > 0$.

**18.** Έστω $\{q_n\}_{n=1}^\infty$ μια αρίθμηση του $\mathbb{Q} \cap [0,1]$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ ορίζουμε

$$A(\varepsilon) = \bigcup_{n=1}^\infty \left( q_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, q_n + \frac{\varepsilon}{2^n} \right).$$

Τέλος, θέτουμε $A = \cap_{j=1}^\infty A(1/j)$.

(α) Δείξτε ότι $\lambda(A(\varepsilon)) \leqslant 2\varepsilon$.

(β) Αν $\varepsilon < \frac{1}{2}$ δείξτε ότι το $[0,1] \setminus A(\varepsilon)$ είναι μη κενό.

(γ) Δείξτε ότι $A \subseteq [0,1]$ και $\lambda(A) = 0$.

(δ) Δείξτε ότι $\mathbb{Q} \cap [0,1] \subseteq A$ και ότι το $A$ είναι υπεραριθμήσιμο.

**19.** (α) Έστω $\{A_n\}$ ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του $[0,1]$ με την ιδιότητα

$$\limsup_{n\to\infty} \lambda(A_n) = 1.$$

Δείξτε ότι: για κάθε $0 < \alpha < 1$ υπάρχει υπακολουθία $\{A_{k_n}\}$ της $\{A_n\}$ με

$$\lambda\left(\cap_{n=1}^\infty A_{k_n}\right) > \alpha.$$

(β) Έστω $E$ ένα Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda_k(E) < \infty$. Έστω $\{A_n\}$ ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του $E$ και έστω $c > 0$ με την ιδιότητα $\lambda(A_n) \geqslant c$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι $\lambda_k(\limsup A_n) > 0$ και ότι υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία $\{k_n\}$ φυσικών με την ιδιότητα

$$\bigcap_{n=1}^\infty A_{k_n} \neq \emptyset.$$

**20.** Για κάθε $A \in \mathcal{M}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ορίζουμε

$$\rho(A, x) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\lambda(A \cap (x-t, x+t))}{2t},$$

αν αυτό το όριο υπάρχει. Ο $\rho(A,x)$ είναι η *μετρική πυκνότητα* του $A$ στο σημείο $x$.

(α) Δείξτε ότι $\rho(\mathbb{Q},x)=0$ και $\rho(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},x)=1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(β) Έστω $0<\alpha<1$. Κατασκευάστε σύνολο $A\subseteq\mathbb{R}$ με την ιδιότητα $\rho(A,0)=\alpha$.

**Ομάδα Β**

**21.** Έστω $E$ και $F$ δύο συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με $E\subset F$ και $\lambda(E)<\lambda(F)$. Δείξτε ότι για κάθε $\alpha\in\big(\lambda(E),\lambda(F)\big)$ μπορούμε να βρούμε συμπαγές σύνολο $K$ ώστε $E\subset K\subset F$ και $\lambda(K)=\alpha$.

**22.** Κατασκευάστε ένα Lebesgue μετρήσιμο σύνολο $E\subseteq[0,1]$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε διάστημα $J\subseteq[0,1]$,

$$\lambda(J\cap E)>0 \quad \text{και} \quad \lambda(J\setminus E)>0.$$

**23.** Έστω $E$ Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $0<\lambda(E)<\infty$. Δείξτε ότι, για κάθε $k\in\mathbb{N}$, υπάρχουν $x,s\in\mathbb{R}$ ώστε

$$x,x+s,x+2s,\dots,x+(k-1)s\in E.$$

**24.** Έστω $A,B\subseteq\mathbb{R}$ με $\lambda(A)>0$ και $\lambda(B)>0$. Δείξτε ότι το $A+B$ περιέχει διάστημα.

**25.** Έστω $E$ μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda(E)>0$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $x,y\in E$ ισχύει $\frac{1}{2}(x+y)\in E$. Δείξτε ότι το $E$ έχει μη κενό εσωτερικό.

**26.** Δείξτε ότι το σύνολο των $x\in[0,2\pi)$ για τα οποία η ακολουθία $\{\sin(2^nx)\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει έχει μηδενικό μέτρο Lebesgue.

**27.** Έστω $A\subset\mathbb{R}$ με $\lambda(A)>0$. Δείξτε ότι

$$\lambda\big(\mathbb{R}\setminus(A+\mathbb{Q})\big)=0.$$

**28.** Δείξτε ότι υπάρχουν μετρήσιμα σύνολα $A,B\subseteq\mathbb{R}$ με $\lambda(A)=\lambda(B)=0$ και $\lambda(A+B)>0$. Μπορεί το $A+B$ να περιέχει διάστημα;

**29.** Δώστε παράδειγμα ανοικτού υποσυνόλου $G$ του $[0,1]$ με την εξής ιδιότητα: το σύνορο του $\overline{G}$ έχει θετικό μέτρο Lebesgue.

**30.** Γνωρίζουμε ότι κάθε ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ γράφεται ως ένωση ξένων ανοικτών διαστημάτων. Δείξτε ότι ο δίσκος $D=\{(x,y):x^2+y^2<1\}$ δεν μπορεί να γραφτεί ως ξένη ένωση ανοικτών ορθογωνίων.

**31.** Δώστε παράδειγμα συνόλου Borel που δεν είναι $G_\delta$-σύνολο ούτε $F_\sigma$-σύνολο.

**32.** Έστω $A$ και $B$ κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι το $A+B=\{a+b:a\in A,b\in B\}$ δεν είναι απαραίτητα κλειστό. Δείξτε όμως ότι είναι πάντα $F_\sigma$-σύνολο.

**33.** Έστω $\epsilon>0$. Έστω $A$ το σύνολο των $x\in\mathbb{R}$ για τους οποίους υπάρχουν άπειρα ανάγωγα κλάσματα $\frac{p}{q}$ που ικανοποιούν την $\left|x-\frac{p}{q}\right|\leqslant\frac{1}{q^{2+\epsilon}}$. Δείξτε ότι $\lambda(A)=0$.

**34.** Θέτουμε $A=\mathbb{Q}\cap[0,1]$. Δείξτε ότι:

(α) Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ακολουθία $\{R_j\}_{j=1}^{\infty}$ ανοικτών διαστημάτων ώστε: $A \subseteq \cup_{j=1}^{\infty} R_j$ και $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(R_j) < \varepsilon$.

(β) Αν $\{R_j\}_{j=1}^{m}$ είναι μια *πεπερασμένη* οικογένεια ανοικτών διαστημάτων ώστε $A \subseteq \cup_{j=1}^{m} R_j$, τότε $\sum_{j=1}^{m} \lambda(R_j) \geqslant 1$.

**35.** (α) Έστω $G$ φραγμένο, μη κενό ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Δείξτε ότι δεν υπάρχει αριθμήσιμη κάλυψη $\{B_j\}$ του $G$ από ανοικτές μπάλες ώστε: κάθε σημείο του $G$ ανήκει σε άπειρες το πλήθος $B_j$ και $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(B_j) < \infty$.

(β) Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία $\{B_j\}$ ανοικτών μπαλών ώστε να καλύπτει το $G$ όπως στο (α) και για κάθε $p > 1$ να ισχύει $\sum_{j=1}^{\infty} (\lambda(B_j))^p < \infty$.

**36.** Εξετάστε αν υπάρχει αρίθμηση $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ του $\mathbb{Q}$ τέτοια ώστε $\mathbb{R} \neq \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(q_n - \frac{1}{n}, q_n + \frac{1}{n}\right)$.

**37.** (α) Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι το σύνολο $\Gamma = \{(x, f(x)) : a \leqslant x \leqslant b\}$ έχει μέτρο μηδέν.

(β) Υποθέτουμε τώρα ότι η $f$ έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο. Δείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα: (α) $\lambda(\Gamma + \Gamma) > 0$, (β) το $\Gamma + \Gamma$ περιέχει κάποιο ανοικτό σύνολο, (γ) η $f$ δεν είναι γραμμική συνάρτηση.

**38.** Έστω $A \subseteq E \subseteq B$. Αν τα $A, B$ είναι μετρήσιμα και $\lambda(A) = \lambda(B) < \infty$, δείξτε ότι το $E$ είναι μετρήσιμο.

**39.** Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(E) < \infty$. Υποθέτουμε ότι $E = E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ και $\lambda(E) = \lambda^*(E_1) + \lambda^*(E_2)$. Δείξτε ότι τα $E_1, E_2$ είναι μετρήσιμα.

**40.** Έστω $E$ Lebesgue μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$ και έστω $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ γραμμική απεικόνιση. Δείξτε ότι το $T(E)$ είναι Lebesgue μετρήσιμο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

# Ολοκλήρωμα Lebesgue

## 2.1 Μετρήσιμες συναρτήσεις

Οι συναρτήσεις για τις οποίες θα επιχειρήσουμε να ορίσουμε το ολοκλήρωμα Lebesgue είναι συναρτήσεις με πεδίο ορισμού κάποιο μετρήσιμο υποσύνολο $A$ του $\mathbb{R}^d$ και τιμές στην επεκτεταμένη ευθεία $[-\infty, +\infty]$ των πραγματικών αριθμών. Αυτό που ζητάμε είναι όλα τα σύνολα της μορφής $f^{-1}((a, b))$, όπου $a < b$ στο $\mathbb{R}$, να είναι μετρήσιμα.

### 2.1.1 Ορισμός και βασικές ιδιότητες

**Ορισμός 2.1.1** (Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση)**.** Έστω $A$ Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ και έστω $f : A \to \mathbb{R}$. Η $f$ λέγεται **Lebesgue μετρήσιμη**, ή απλά **μετρήσιμη**, αν για κάθε $a \in \mathbb{R}$ το σύνολο

$$\{x \in A : f(x) > a\} = f^{-1}((a, +\infty)) \tag{2.1.1}$$

είναι μετρήσιμο.

Η επόμενη Πρόταση δείχνει ότι στη θέση των ημιευθειών $(a, +\infty)$ του Ορισμού 2.1.1 θα μπορούσαμε να πάρουμε οποιαδήποτε άλλη κλάση ημιευθειών.

**Πρόταση 2.1.2.** *Έστω $A$ μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ και έστω $f : A \to \mathbb{R}$. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(i) *Η $f$ είναι μετρήσιμη.*

(ii) *Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ το σύνολο $\{x \in A : f(x) \geqslant a\} = f^{-1}([a, +\infty))$ είναι μετρήσιμο.*

(iii) *Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ το σύνολο $\{x \in A : f(x) < a\} = f^{-1}((-\infty, a))$ είναι μετρήσιμο.*

(iv) *Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ το σύνολο $\{x \in A : f(x) \leqslant a\} = f^{-1}((-\infty, a])$ είναι μετρήσιμο.*

*Απόδειξη.* (i) ⇒ (ii) Παρατηρήστε ότι

$$\{x \in A : f(x) \geqslant a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x \in A : f(x) > a - \frac{1}{n}\right\}. \tag{2.1.2}$$

(ii) ⇒ (iii) Παρατηρήστε ότι

$$\{x \in A : f(x) < a\} = A \setminus \{x \in A : f(x) \geqslant a\}. \tag{2.1.3}$$

(iii) ⇒ (iv) Παρατηρήστε ότι

$$\{x \in A : f(x) \leqslant a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x \in A : f(x) < a + \frac{1}{n}\right\}. \tag{2.1.4}$$

(iv) ⇒ (i) Παρατηρήστε ότι

$$\{x \in A : f(x) > a\} = A \setminus \{x \in A : f(x) \leqslant a\}. \tag{2.1.5}$$

Αφού αριθμήσιμες τομές, αριθμήσιμες ενώσεις και συνολοθεωρητικές διαφορές μετρήσιμων συνόλων είναι μετρήσιμα σύνολα, η ισοδυναμία των (i)-(iv) προκύπτει άμεσα από τις παραπάνω σχέσεις. □

**Πρόταση 2.1.3.** *Έστω $A$ μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ και έστω $f : A \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε, όλες οι αντίστροφες εικόνες διαστημάτων – μέσω της $f$ – είναι μετρήσιμα σύνολα. Το ίδιο ισχύει για τα σύνολα $\{x \in A : f(x) = a\}$, $a \in \mathbb{R}$.*

*Απόδειξη.* Ο ισχυρισμός είναι απλή συνέπεια της Πρότασης 2.1.2. Για παράδειγμα, αν $J = [a, b]$ τότε το σύνολο

$$f^{-1}(J) = \{x \in A : a \leqslant f(x) \leqslant b\} = \{x \in A : f(x) \geqslant a\} \cap \{x \in A : f(x) \leqslant b\} \tag{2.1.6}$$

είναι μετρήσιμο. Τελείως ανάλογα, για κάθε $a \in \mathbb{R}$, το σύνολο

$$\{x \in A : f(x) = a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x \in A : a - \frac{1}{n} < f(x) < a + \frac{1}{n}\right\} \tag{2.1.7}$$

είναι μετρήσιμο. □

**Ορισμός 2.1.4** (Borel μετρήσιμη συνάρτηση)**.** Έστω $A$ σύνολο Borel του $\mathbb{R}^d$ και έστω $f : A \to \mathbb{R}$. Η $f$ λέγεται **Borel μετρήσιμη** αν, για κάθε $a \in \mathbb{R}$, το σύνολο

$$\{x \in A : f(x) > a\} = f^{-1}((a, +\infty)) \tag{2.1.8}$$

είναι σύνολο Borel. Τα ακριβή ανάλογα των Προτάσεων 2.1.2 και 2.1.3 ισχύουν για τις Borel μετρήσιμες συναρτήσεις (διατυπώστε αντίστοιχες Προτάσεις και αποδείξτε τις).

**Παραδείγματα 2.1.5.** (α) Έστω $A$ μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ και έστω $f : A \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε, η $f$ είναι μετρήσιμη. Πράγματι, για κάθε $a \in \mathbb{R}$ το σύνολο $\{x \in A : f(x) > a\}$ είναι ανοικτό στο $A$, δηλαδή είναι της μορφής $A \cap U$ για κάποιο ανοικτό υποσύνολο $U$ του $\mathbb{R}$. Συνεπώς, είναι μετρήσιμο σύνολο ως τομή δύο μετρήσιμων συνόλων.

(β) Η χαρακτηριστική συνάρτηση $\chi_A : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ ενός μετρήσιμου συνόλου $A$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση. Πράγματι, έχουμε

$$\{x \in \mathbb{R} : \chi_A(x) > a\} = \begin{cases} \mathbb{R}^d, & \text{αν } a < 0 \\ A, & \text{αν } 0 \leqslant a < 1 \\ \emptyset, & \text{αν } a \geqslant 1 \end{cases} \tag{2.1.9}$$

δηλαδή, μετρήσιμο σύνολο σε κάθε περίπτωση. Ειδικότερα, η συνάρτηση του Dirichlet $\chi_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση.

(γ) Έστω $A$ μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Κάθε μονότονη συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη. Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ το σύνολο $\{x \in A : f(x) > a\}$ είναι η τομή του $A$ με μια ημιευθεία, άρα είναι μετρήσιμο.

*Απόδειξη.* Υποθέτουμε ότι η $f$ είναι αύξουσα. Έστω $a \in \mathbb{R}$. Γράφουμε $T = \{x \in A : f(x) > a\}$ και $t := \inf T$.

(i) Αν $t = -\infty$ τότε $T = A$. Πράγματι, αν $x \in A$ τότε υπάρχει $y \in T$ ώστε $y < x$. Αυτό σημαίνει ότι $y \in A$ και $f(y) > a$, όμως η $f$ είναι αύξουσα και από την $y < x$ έπεται ότι $f(x) \geqslant f(y) > a$, δηλαδή $x \in T$. Άρα, σε αυτήν την περίπτωση το $T = A$ είναι μετρήσιμο.

(ii) Αν $t \in \mathbb{R}$ τότε διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- $t \in T$: Αυτό σημαίνει ότι $t \in A$ και $f(t) > a$. Τότε, ισχύει $T = A \cap [t, +\infty)$. Πράγματι, αν $x \in A$ και $x \geqslant t$ τότε $f(x) \geqslant f(t) > a$, άρα $x \in T$. Αντίστροφα, αν $x \in T$ τότε $x \in A$ και $x \geqslant t$ γιατί ο $t$ είναι κάτω φράγμα του $T$.

- $t \notin T$: Θα δείξουμε ότι $T = A \cap (t, +\infty)$. Πράγματι, αν $x \in A$ και $x > t$ τότε (χαρακτηρισμός του infimum) υπάρχει $y \in T$ ώστε $t < y < x$ και αυτό μας δίνει την $f(x) \geqslant f(y) > a$, άρα $x \in T$. Αντίστροφα, αν $x \in T$ τότε $x \in A$ και $x > t$ γιατί ο $t$ είναι κάτω φράγμα του $T$ και δεν ανήκει στο $T$.

Σε κάθε περίπτωση το $T = \{x \in A : f(x) > a\}$ είναι η τομή του $A$ με μια ημιευθεία. □

**Πρόταση 2.1.6** (πράξεις μεταξύ μετρήσιμων συναρτήσεων)**.** *Έστω $A$ μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ και έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις. Τότε,*

(i) *Η $f + g$ είναι μετρήσιμη.*

(ii) *Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, η συνάρτηση $\lambda f$ είναι μετρήσιμη.*

(iii) *Η $fg$ είναι μετρήσιμη.*

(iv) *Αν $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$, τότε η $1/f$ είναι μετρήσιμη.*

(v) *Οι συναρτήσεις $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$ και $|f|$ είναι μετρήσιμες.*

*Απόδειξη.* (i) Έστω $a \in \mathbb{R}$. Αν $f(x) + g(x) < a$, τότε $f(x) < a - g(x)$. Άρα, υπάρχει ρητός $q$ ώστε

$$f(x) < q < a - g(x). \tag{2.1.10}$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned}\{x \in A : f(x) + g(x) < a\} &= \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{x \in A : f(x) < q \text{ και } g(x) < a - q\} \\ &= \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \left(\{x \in A : f(x) < q\} \cap \{x \in A : g(x) < a - q\}\right),\end{aligned}$$

δηλαδή είναι μετρήσιμο σύνολο.

(ii) Έστω $a \in \mathbb{R}$. Αν $\lambda > 0$, τότε

$$\{x \in A : \lambda f(x) > a\} = \{x \in A : f(x) > a/\lambda\}, \tag{2.1.11}$$

δηλαδή μετρήσιμο σύνολο. Αν $\lambda < 0$, τότε

$$\{x \in A : \lambda f(x) > a\} = \{x \in A : f(x) < a/\lambda\}, \tag{2.1.12}$$

δηλαδή μετρήσιμο σύνολο. Σε κάθε περίπτωση, η $\lambda f$ είναι μετρήσιμη (αν $\lambda = 0$, τότε δεν έχουμε να δείξουμε τίποτα).

(iii) Δείχνουμε πρώτα ότι η $f^2$ είναι μετρήσιμη. Αν $a < 0$, τότε

$$\{x \in A : f^2(x) > a\} = A, \tag{2.1.13}$$

ενώ αν $a \geqslant 0$, τότε

$$\{x \in A : f(x)^2 > a\} = \{x \in A : f(x) > \sqrt{a}\} \cup \{x \in A : f(x) < -\sqrt{a}\}. \tag{2.1.14}$$

Σε κάθε περίπτωση, το $\{x : f^2(x) > a\}$ είναι μετρήσιμο. Τώρα, η $fg$ είναι μετρήσιμη, διότι

$$fg = \frac{(f+g)^2 - (f-g)^2}{4}. \tag{2.1.15}$$

(iv) Αν $a = 0$, τότε $\{x \in A : 1/f(x) > 0\} = \{x \in A : f(x) > 0\}$. Αν $a > 0$, τότε

$$\{x \in A : 1/f(x) > a\} = \{x \in A : 0 < f(x) < 1/a\}. \tag{2.1.16}$$

Τέλος, αν $a < 0$ τότε

$$\{x \in A : 1/f(x) > a\} = \{x \in A : f(x) > 0\} \cup \{x \in A : f(x) < 1/a\}. \tag{2.1.17}$$

Σε κάθε περίπτωση, το σύνολο $\{x \in A : 1/f(x) > a\}$ είναι μετρήσιμο.

(v) Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\{x \in A : \max\{f,g\}(x) > a\} = \{x \in A : f(x) > a\} \cup \{x \in A : g(x) > a\} \tag{2.1.18}$$

και

$$\{x \in A : \min\{f,g\}(x) < a\} = \{x \in A : f(x) < a\} \cup \{x \in A : g(x) < a\}. \tag{2.1.19}$$

Άρα, οι $\max\{f,g\}$ και $\min\{f,g\}$ είναι μετρήσιμες. Τέλος, η $|f| = \max\{f,-f\}$ είναι μετρήσιμη. $\square$

### Μετρήσιμες συναρτήσεις με τιμές στο $\overline{\mathbb{R}}$

Το επεκτεταμένο σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι το $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty] = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Επεκτείνουμε την διάταξη του $\mathbb{R}$ στο $\overline{\mathbb{R}}$ ορίζοντας $-\infty < x < +\infty$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και επεκτείνουμε την κλάση των διαστημάτων του $\mathbb{R}$ στην κλάση των διαστημάτων του $\overline{\mathbb{R}}$ προσθέτοντας τα (επεκτεταμένα) διαστήματα $[-\infty, a)$, $[-\infty, a]$, $(a, +\infty]$, $[a, +\infty]$ (όπου $a \in \mathbb{R}$) και $[-\infty, +\infty]$, $[-\infty, +\infty)$, $(-\infty, +\infty]$.

Οι ανοικτές περιοχές του $-\infty$ και του $+\infty$ είναι τα σύνολα $[-\infty, a)$ και $(a, +\infty]$ αντίστοιχα. Οι πράξεις του $\mathbb{R}$ επεκτείνονται με τον γνωστό τρόπο στο $\overline{\mathbb{R}}$. Μη επιτρεπτές πράξεις είναι οι $(+\infty) - (+\infty)$, $0 \cdot (\pm\infty)$, $(\pm\infty)/0$, $(\pm\infty)/(\pm\infty)$. Οι συναρτήσεις $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$, όπου $A$ μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$, λέγονται επεκτεταμένες συναρτήσεις.

Θα επεκτείνουμε τον ορισμό της μετρήσιμης συνάρτησης και στην περίπτωση συναρτήσεων με τιμές στο $\overline{\mathbb{R}}$.

**Ορισμός 2.1.7.** Έστω $A$ Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ και έστω $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$. Η $f$ λέγεται **Lebesgue μετρήσιμη**, ή απλά **μετρήσιμη**, αν για κάθε $a \in \mathbb{R}$ το σύνολο

$$\{x \in A : f(x) > a\} = f^{-1}((a, +\infty)) \tag{2.1.20}$$

είναι μετρήσιμο.

Όλες οι Προτάσεις που αποδείξαμε ως τώρα ισχύουν για (επεκτεταμένες) μετρήσιμες συναρτήσεις (για τις πράξεις μεταξύ συναρτήσεων περιοριζόμαστε στο υποσύνολο του πεδίου ορισμού τους στο οποίο οι πράξεις είναι επιτρεπτές). Παρατηρήστε ότι, αν η $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι μετρήσιμη, τότε τα σύνολα

$$\{x \in A : f(x) = +\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in A : f(x) > n\} \tag{2.1.21}$$

και

$$\{x \in A : f(x) = -\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in A : f(x) < -n\} \tag{2.1.22}$$

είναι μετρήσιμα.

### Η έννοια του «σχεδόν παντού»

Έστω $A$ μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Λέμε ότι η $P(x)$ ισχύει **σχεδόν παντού στο** $A$ αν το σύνολο $Z$ των $x \in A$ για τα οποία δεν ισχύει η $P(x)$ έχει μέτρο μηδέν. Η επόμενη Πρόταση δείχνει ότι αν αλλάξουμε τις τιμές μιας μετρήσιμης συνάρτησης σε ένα σύνολο μέτρου μηδέν, τότε προκύπτει μετρήσιμη συνάρτηση.

**Πρόταση 2.1.8.** *Έστω $A$ μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ και έστω $f, g : A \to \overline{\mathbb{R}}$ συναρτήσεις με $f(x) = g(x)$ σχεδόν παντού στο $A$. Αν η $f$ είναι μετρήσιμη, τότε η $g$ είναι κι αυτή μετρήσιμη.*

*Απόδειξη.* Θέτουμε $B = \{x \in A : f(x) = g(x)\}$ και $Z = \{x \in A : f(x) \neq g(x)\}$. Αφού $\lambda(Z) = 0$, το $Z$ είναι μετρήσιμο, άρα και το $B = A \setminus Z$ είναι μετρήσιμο.

Έστω $a \in \mathbb{R}$. Τότε,

$$\begin{aligned}\{x \in A : g(x) > a\} &= \{x \in B : g(x) > a\} \cup \{x \in Z : g(x) > a\} \\ &= \{x \in B : f(x) > a\} \cup \{x \in Z : g(x) > a\} \\ &= \big(B \cap \{x \in A : f(x) > a\}\big) \cup \{x \in Z : g(x) > a\}.\end{aligned}$$

Το $B \cap \{x \in A : f(x) > a\}$ είναι μετρήσιμο διότι το $B$ είναι μετρήσιμο και το $\{x \in A : f(x) > a\}$ είναι μετρήσιμο λόγω της μετρησιμότητας της $f$. Το $\{x \in Z : g(x) > a\}$ είναι μετρήσιμο ως υποσύνολο συνόλου με μέτρο 0. Άρα, το $\{x \in A : g(x) > a\}$ είναι μετρήσιμο.

Αφού το $a \in \mathbb{R}$ ήταν τυχόν, η $g$ είναι μετρήσιμη. □

### 2.1.2 Ακολουθίες μετρήσιμων συναρτήσεων

Η επόμενη Πρόταση δείχνει ότι η μετρησιμότητα διατηρείται για το κατά σημείο όριο μιας ακολουθίας μετρήσιμων συναρτήσεων.

**Πρόταση 2.1.9.** *Έστω $A$ μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ και έστω $(f_n)$ ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων $f_n : A \to [-\infty, +\infty]$. Τότε,*

(i) *Οι συναρτήσεις $\sup_n f_n$ και $\inf_n f_n$ είναι μετρήσιμες.*

(ii) *Αν η $(f_n)$ συγκλίνει κατά σημείο, τότε η συνάρτηση $f : A \to [-\infty, +\infty]$ με $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ είναι μετρήσιμη.*

*Απόδειξη.* (i) Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι το

$$\{x \in A : \sup_n f_n(x) > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in A : f_n(x) > a\} \tag{2.1.23}$$

είναι μετρήσιμο σύνολο, και το

$$\{x \in A : \inf_n f_n(x) < a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in A : f_n(x) < a\} \tag{2.1.24}$$

είναι μετρήσιμο σύνολο. Άρα, οι $\sup_n f_n$ και $\inf_n f_n$ είναι μετρήσιμες συναρτήσεις.

(ii) Θυμηθείτε ότι, για κάθε ακολουθία $(a_n)$ πραγματικών αριθμών έχουμε

$$\limsup_n a_n = \inf_{m\in\mathbb{N}} \left( \sup_{k\geqslant m} a_k \right) \quad \text{και} \quad \liminf_n a_n = \sup_{m\in\mathbb{N}} \left( \inf_{k\geqslant m} a_k \right). \tag{2.1.25}$$

Η ακολουθία $b_m = \sup_{k\geqslant m} a_k$ είναι φθίνουσα και συγκλίνει στο $\limsup_n a_n$, ενώ η $\gamma_m = \inf_{k\geqslant m} a_k$ είναι αύξουσα και συγκλίνει στο $\liminf_n a_n$.

Στην περίπτωσή μας, αν θέσουμε

$$g_m(x) = \sup_{k\geqslant m} f_k(x) \quad \text{και} \quad h_m(x) = \inf_{k\geqslant m} f_k(x), \tag{2.1.26}$$

τότε, από το (i), κάθε $g_m$, $h_m$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση, και

$$f(x) = \inf_m g_m(x) = \sup_m h_m(x). \tag{2.1.27}$$

Άρα, πάλι από το (i), η $f$ είναι μετρήσιμη. □

*Σημείωση:* Η απόδειξη του (ii) δίνει κάτι γενικότερο: Αν $(f_n)$ είναι οποιαδήποτε ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων $f_n : A \to [-\infty, +\infty]$, τότε οι συναρτήσεις $\limsup_n f_n$ και $\liminf_n f_n$ που ορίζονται από τις

$$\limsup_n f_n(x) = \inf_{m\in\mathbb{N}} \left( \sup_{k\geqslant m} f_k(x) \right) \quad \text{και} \quad \liminf_n f_n = \sup_{m\in\mathbb{N}} \left( \inf_{k\geqslant m} f_k(x) \right), \tag{2.1.28}$$

είναι μετρήσιμες. □

Κλείνουμε αυτήν την Παράγραφο με ένα ακόμα τυπικό παράδειγμα Πρότασης που δείχνει ότι τα σύνολα μέτρου 0 είναι αμελητέα σε σχέση με την μετρησιμότητα.

**Πρόταση 2.1.10.** *Έστω $A$ μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και έστω $f : A \to [-\infty, +\infty]$. Αν $f_n : A \to [-\infty, +\infty]$ είναι μετρήσιμες συναρτήσεις και $f_n(x) \to f(x)$ σχεδόν παντού στο $A$, τότε η $f$ είναι μετρήσιμη.*

*Απόδειξη.* Έστω $B = \{x \in A : f_n(x) \to f(x)\}$. Αν $Z = A \setminus B$, τότε $\lambda(Z) = 0$ και το $B$ είναι μετρήσιμο.

Έστω $a \in \mathbb{R}$. Τότε, το $\{x \in B : f(x) > a\}$ είναι μετρήσιμο από την Πρόταση 2.1.9 (οι $f_n : B \to [-\infty, +\infty]$ είναι μετρήσιμες, και $f_n \to f$ στο $B$) και το $\{x \in Z : f(x) > a\}$ είναι μετρήσιμο ως υποσύνολο του $Z$ (το οποίο έχει μέτρο 0). Άρα, το

$$\{x \in A : f(x) > a\} = \{x \in B : f(x) > a\} \cup \{x \in Z : f(x) > a\} \tag{2.1.29}$$

είναι μετρήσιμο. Αφού το $a \in \mathbb{R}$ ήταν τυχόν, η $g$ είναι μετρήσιμη. □

### 2.1.3 Η συνάρτηση Cantor–Lebesgue

Σκοπός μας σε αυτήν την παράγραφο είναι να δείξουμε ότι η Borel $\sigma$-άλγεβρα $\mathcal{B}$ του $\mathbb{R}$ περιέχεται γνήσια στη $\sigma$-άλγεβρα $\mathcal{M}$ των Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Εισάγουμε την συνάρτηση Cantor-Lebesgue, και χρησιμοποιώντας την αποδεικνύουμε την ύπαρξη μετρήσιμων συνόλων τα οποία δεν είναι σύνολα Borel.

Θεωρούμε τα σύνολα $C_n$ που χρησιμοποιήθηκαν για την κατασκευή του συνόλου $C$ του Cantor. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε συνάρτηση $f_n : [0, 1] \to [0, 1]$ ως εξής. Αν $J_1^n, \ldots, J_{2^n-1}^n$ είναι τα διαδοχικά ανοικτά διαστήματα που σχηματίζουν το $[0, 1] \setminus C_n$, ορίζουμε $f_n(0) = 0$, $f_n(1) = 1$, $f_n(x) = \frac{k}{2^n}$ για κάθε $x$ στο $J_k^n$, και επεκτείνουμε γραμμικά σε καθένα από τα κλειστά διαστήματα που σχηματίζουν το $C_n$ ώστε να προκύψει συνεχής συνάρτηση.

Για παράδειγμα, έχουμε $C_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$. Η $f_1$ είναι σταθερή και ίση με $1/2$ στο $(1/3, 2/3)$, γραμμική στο $[0, 1/3]$ με $f(0) = 0$ και $f(1/3) = 1/2$, γραμμική στο $[2/3, 1]$ με $f(2/3) = 1/2$ και $f(1) = 1$. Στο δεύτερο βήμα, το $[0, 1] \setminus C_2$ αποτελείται από τρία ξένα ανοικτά διαστήματα: στο $(1/9, 2/9)$ η $f_2$ είναι σταθερή και ίση με $1/4$, στο $(1/3, 2/3)$ η $f_2$ είναι σταθερή και ίση με $1/2$, στο $(7/9, 8/9)$ η $f_2$ είναι σταθερή και ίση με $3/4$, ενώ σε καθένα από τα τέσσερα κλειστά διαστήματα του $C_2$ την επεκτείνουμε γραμμικά σε συνεχή συνάρτηση, ορίζοντας πάλι $f_2(0) = 0$ και $f_2(1) = 1$.

**Πρόταση 2.1.11** (συνάρτηση Cantor-Lebesgue). *Η ακολουθία* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνεχή συνάρτηση* $f : [0,1] \to [0,1]$. *Η* $f$ *είναι αύξουσα και επί του* $[0,1]$. *Η εικόνα του* $C$ *μέσω της* $f$ *έχει μέτρο* $\lambda(f(C)) = 1$.

*Απόδειξη.* Από την κατασκευή της η ακολουθία $\{f_n\}$ έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) Κάθε $f_n$ είναι αύξουσα, συνεχής συνάρτηση με $f_n(0) = 0$ και $f_n(1) = 1$.

(ii) Αν $J_k^n$ είναι κάποιο από τα ανοικτά διαστήματα που αφαιρούμε στο $n$-οστό βήμα της κατασκευής του $C$, τότε η $f_n$ είναι σταθερή στο $J_k^n$, και

$$f_n \equiv f_{n+1} \equiv f_{n+2} \equiv \cdots \tag{2.1.30}$$

στο $J_k^n$.

(iii) Ισχύει

$$\|f_{n+1} - f_n\|_\infty \leqslant \frac{1}{2^n}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{2.1.31}$$

Από την τρίτη ιδιότητα ελέγχουμε εύκολα ότι η $\{f_n\}$ είναι βασική ακολουθία στον $C[0,1]$: αν $m > n$ τότε

$$\|f_m - f_n\|_\infty \leqslant \sum_{k=n}^{m-1} \|f_{k+1} - f_k\|_\infty \leqslant \sum_{k=n}^{m-1} \frac{1}{2^k} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}} \to 0 \tag{2.1.32}$$

όταν $m, n \to \infty$. Ο $C[0,1]$ είναι πλήρης ως προς την $\|\cdot\|_\infty$, άρα υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα.

Προφανώς, $f_n \to f$ κατά σημείο στο $[0,1]$. Αφού κάθε $f_n$ είναι αύξουσα συνάρτηση με $f_n(0) = 0$ και $f_n(1) = 1$, έπεται ότι η $f$ είναι κι αυτή αύξουσα, συνεχής συνάρτηση με $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$. Ειδικότερα, η $f$ είναι επί του $[0,1]$.

Τέλος, $f(C) = [0,1]$. Πράγματι, από την δεύτερη ιδιότητα της $\{f_n\}$ βλέπουμε ότι η $f$ είναι σταθερή σε κάθε ανοικτό διάστημα $J$ του συμπληρώματος του $C$, και μάλιστα αυτή η σταθερή τιμή παίρνεται και στα άκρα του $J$ τα οποία ανήκουν στο $C$. Αφού η $f$ είναι επί του $[0,1]$, κάθε $y \in [0,1]$ είναι ίσο με $f(x)$ για κάποιο $x \in C$. Από την $f(C) = [0,1]$ είναι φανερό ότι $\lambda(f(C)) = 1$. □

*Σημείωση.* Παρατηρήστε ότι $\lambda([0,1] \setminus C) = 1$ και $f'(x) = 0$ για κάθε $x \notin C$. Πράγματι, αν $x \notin C$ τότε το $x$ ανήκει σε κάποιο ανοικτό διάστημα $J$ στο οποίο η $f$ είναι σταθερή. Συνεπώς, η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $x$ και $f'(x) = 0$. Με άλλα λόγια, η $f'$ είναι σχεδόν παντού ίση με μηδέν, παρόλο που η $f$ είναι αύξουσα και απεικονίζει το $[0,1]$ επί του $[0,1]$.

Χρησιμοποιώντας την συνάρτηση Cantor–Lebesgue, μπορούμε να αποδείξουμε την ύπαρξη μετρήσιμων συνόλων τα οποία δεν είναι σύνολα Borel. Θα χρειαστούμε το εξής Λήμμα.

**Λήμμα 2.1.12.** *Έστω* $A$ *σύνολο Borel στο* $\mathbb{R}$ *και έστω* $f : A \to \mathbb{R}$ *συνεχής συνάρτηση. Τότε, για κάθε Borel σύνολο* $B \subseteq \mathbb{R}$, *το* $f^{-1}(B) = \{x \in A : f(x) \in B\}$ *είναι σύνολο Borel.*

*Απόδειξη.* Θεωρούμε την οικογένεια

$$\mathcal{A} = \{B \subseteq \mathbb{R} : \text{το } f^{-1}(B) \text{ είναι σύνολο Borel}\}. \tag{2.1.33}$$

Αν $B$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, τότε το $f^{-1}(B)$ είναι ανοικτό στο $A$, διότι η $f$ είναι συνεχής. Αφού το $A$ είναι σύνολο Borel, έπεται ότι το $f^{-1}(B)$ είναι σύνολο Borel (εξηγήστε γιατί).

Εύκολα ελέγχουμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι $\sigma$-άλγεβρα – οι λεπτομέρειες αφήνονται ως άσκηση. Αφού η $\mathcal{A}$ είναι $\sigma$-άλγεβρα και περιέχει τα ανοικτά σύνολα, συμπεραίνουμε ότι η Borel $\sigma$-άλγεβρα $\mathcal{B}$ περιέχεται στην $\mathcal{A}$. Από τον ορισμό της $\mathcal{A}$ έπεται ότι η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(B)$ κάθε Borel συνόλου $B \subseteq \mathbb{R}$ είναι σύνολο Borel. □

**Πρόταση 2.1.13.** *Υπάρχει Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του συνόλου του Cantor, το οποίο δεν είναι σύνολο Borel.*

*Απόδειξη.* Θεωρούμε την συνάρτηση $g : [0,1] \to [0,2]$ με $g(x) = f(x) + x$, όπου $f$ η συνάρτηση Cantor–Lebesgue. Η $g$ είναι γνησίως αύξουσα, συνεχής και επί (το ίδιο και η $g^{-1}$).

Το σύνολο $g(C)$ είναι μετρήσιμο και $\lambda(g(C)) = 1$. Πράγματι, το $g(C)$ είναι κλειστό ως συνεχής εικόνα του συμπαγούς συνόλου $C$, άρα είναι μετρήσιμο. Επίσης, η $g$ απεικονίζει κάθε ανοικτό διάστημα $J$ του $[0,1] \setminus C$ στο $\{f(J)\} + J$, δηλαδή σε διάστημα ίσου μήκους. Άρα $\lambda(g([0,1] \setminus C)) = \sum \lambda(J) = 1$. Έπεται ότι $\lambda(g(C)) = 1$.

Αφού το $g(C)$ έχει θετικό μέτρο, υπάρχει μη μετρήσιμο υποσύνολο $M$ του $g(C)$. Τότε, το $K = g^{-1}(M)$ είναι Lebesgue μετρήσιμο διότι είναι υποσύνολο του $C$ το οποίο έχει μηδενικό μέτρο. Όμως, το $K$ δεν είναι σύνολο Borel: αν ήταν, από το Λήμμα 2.1.12 το $M = (g^{-1})^{-1}(K)$ θα ήταν σύνολο Borel ως αντίστροφη εικόνα συνόλου Borel μέσω συνεχούς συνάρτησης. Συνεπώς, το $M$ θα ήταν Lebesgue μετρήσιμο. □

### 2.1.4 Προσέγγιση μετρήσιμων συναρτήσεων από απλές συναρτήσεις

**Ορισμός 2.1.14** (απλή μετρήσιμη συνάρτηση)**.** Μια συνάρτηση $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ λέγεται απλή μετρήσιμη αν είναι πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός χαρακτηριστικών συναρτήσεων μετρήσιμων συνόλων. Δηλαδή, η $\varphi$ είναι **απλή συνάρτηση** αν

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i} \tag{2.1.34}$$

για κάποιον $n \in \mathbb{N}$, κάποιους πραγματικούς αριθμούς $a_1, \ldots, a_n$ και κάποια μετρήσιμα σύνολα $A_1, \ldots, A_n$.

Παρατηρήστε ότι δεν απαιτούμε από τα σύνολα $A_i$ να είναι ξένα, ούτε από τους αριθμούς $a_i$ να είναι διακεκριμένοι. Δεν είναι όμως δύσκολο να διαπιστώσετε ότι μια συνάρτηση $\varphi$ είναι απλή αν και μόνο αν παίρνει πεπερασμένες το πλήθος διακεκριμένες πραγματικές τιμές (μία από αυτές μπορεί να ισούται με 0). Πράγματι, το σύνολο των τιμών της συνάρτησης $\varphi$ στην (2.1.34) περιέχεται στο

$$\left\{ \sum_{i \in I} a_i : \emptyset \neq I \subseteq \{1, \ldots, n\} \right\} \cup \{0\} \tag{2.1.35}$$

(εξηγήστε γιατί). Αν λοιπόν $\{t_1, \ldots, t_m\}$ είναι το σύνολο τιμών της $\varphi$ και αν ορίσουμε

$$E_i = \{\varphi = t_i\} = \{x \in \mathbb{R}^d : \varphi(x) = t_i\}, \tag{2.1.36}$$

τότε τα σύνολα $E_i$ είναι ξένα και μετρήσιμα, η ένωσή τους μας δίνει το $\mathbb{R}^d$, και

$$\varphi = \sum_{i=1}^{m} t_i \chi_{E_i}. \tag{2.1.37}$$

Η αναπαράσταση (2.1.37) της $\varphi$ είναι μονοσήμαντα ορισμένη (από την $\varphi$) και λέγεται **κανονική αναπαράσταση** της $\varphi$.

Το βασικό αποτέλεσμα αυτής της παραγράφου δείχνει ότι κάθε μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση είναι κατά σημείο όριο μιας αύξουσας ακολουθίας απλών μετρήσιμων συναρτήσεων.

**Θεώρημα 2.1.15.** *Έστω $A$ μετρήσιμο σύνολο και έστω $f : A \to [0,\infty]$ μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση. Υπάρχει αύξουσα ακολουθία $(\varphi_n)$ μη αρνητικών απλών μετρήσιμων συναρτήσεων $0 \leqslant \varphi_1 \leqslant \varphi_2 \leqslant \cdots \leqslant f$ ώστε*

$$\varphi_n(x) \nearrow f(x) \tag{2.1.38}$$

*για κάθε $x \in A$. Η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη σε κάθε υποσύνολο του $A$ στο οποίο η $f$ είναι φραγμένη.*

*Απόδειξη.* Για κάθε $n = 1,2,\ldots$ ορίζουμε $C_n = \{x \in A : f(x) \geqslant 2^n\}$ και

$$B_{n,k} = \left\{ x \in A : \frac{k}{2^n} \leqslant f(x) < \frac{k+1}{2^n} \right\}, \quad k = 0,1,\ldots,2^{2n}-1. \tag{2.1.39}$$

Χωρίζουμε δηλαδή το $[0,2^n]$ σε $2^{2n}$ διαστήματα μήκους $2^{-n}$ και θεωρούμε τις αντίστροφες εικόνες τους μέσω της $f$. Αφού η $f$ είναι μετρήσιμη, τα σύνολα $C_n$ και $B_{n,k}$ είναι μετρήσιμα. Τώρα, ορίζουμε μια απλή μετρήσιμη συνάρτηση $\varphi_n$ ως εξής:

$$\varphi_n = 2^n \chi_{C_n} + \sum_{k=0}^{2^{2n}-1} \frac{k}{2^n} \chi_{B_{n,k}}. \tag{2.1.40}$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι κάθε $\varphi_n$ ικανοποιεί τα εξής:

(i) $0 \leqslant \varphi_n \leqslant f$ και η $\varphi$ μηδενίζεται έξω από το $A$.

(ii) $0 \leqslant f - \varphi_n \leqslant 2^{-n}$ στο σύνολο $A \setminus C_n = \{x \in A : f(x) < 2^n\}$.

(iii) $\varphi_n(x) = 2^n$ αν $f(x) = \infty$.

Από τα (ii) και (iii) συμπεραίνουμε ότι $\varphi_n(x) \to f(x)$ για κάθε $x \in A$. Πράγματι, αν $f(x) = \infty$ τότε

$$\varphi_n(x) = 2^n \to \infty = f(x). \tag{2.1.41}$$

Αν $f(x) < \infty$, τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $f(x) < 2^{n_0} \leqslant 2^n$ για κάθε $n \geqslant n_0$. Τότε, $0 \leqslant f(x) - \varphi_n(x) < 2^{-n}$ για κάθε $n \geqslant n_0$, άρα $\varphi_n(x) \to f(x)$. Παρόμοιος συλλογισμός δείχνει ότι $\varphi_n \to f$ ομοιόμορφα σε κάθε σύνολο της μορφής $\{x \in A : f(x) \leqslant M\}$, $M > 0$.

Μένει να δείξουμε ότι η $(\varphi_n)$ είναι αύξουσα. Η βασική παρατήρηση είναι ότι

$$\begin{aligned} B_{n,k} &= \{x \in A : k/2^n \leqslant f(x) < (k+1)/2^n\} \\ &= \left\{ x \in A : \frac{2k}{2^{n+1}} \leqslant f(x) < \frac{2k+1}{2^{n+1}} \right\} \cup \left\{ x \in A : \frac{2k+1}{2^{n+1}} \leqslant f(x) < \frac{2k+2}{2^{n+1}} \right\} \\ &= B_{n+1,2k} \cup B_{n+1,2k+1}. \end{aligned}$$

Αν $x \in B_{n+1,2k}$, τότε $\varphi_n(x) = k/2^n = (2k)/2^{n+1} = \varphi_{n+1}(x)$, ενώ αν $x \in B_{n+1,2k+1}$, τότε $\varphi_n(x) = k/2^n < (2k+1)/2^{n+1} = \varphi_{n+1}(x)$. Τέλος, αν $x \in C_n$ έχουμε $\varphi_n(x) = 2^n \leqslant \varphi_{n+1}(x)$ (εξηγήστε την τελευταία ανισότητα: θα χρειαστεί να χωρίσετε το $C_n$ στα $B_{n+1,2^{n+1}}, B_{n+1,2^{n+1}+1}, \ldots, B_{n+1,2^{2(n+1)}-1}$ και $C_{n+1}$).

Σε κάθε περίπτωση $\varphi_n(x) \leqslant \varphi_{n+1}(x)$, δηλαδή $\varphi_n \leqslant \varphi_{n+1}$. □

Έστω $f : A \to [-\infty, +\infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 2.1.15 για τις $f^+$ και $f^-$ χωριστά, παίρνουμε το εξής.

**Πόρισμα 2.1.16.** *Έστω $f : A \to [-\infty, +\infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Υπάρχει ακολουθία $(\varphi_n)$ απλών μετρήσιμων συναρτήσεων $\varphi_n : A \to \mathbb{R}$ με*

$$0 \leqslant |\varphi_1| \leqslant |\varphi_2| \leqslant \cdots \leqslant |f| \tag{2.1.42}$$

*και $\varphi_n(x) \to f(x)$ για κάθε $x \in A$. Η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη σε κάθε υποσύνολο του $A$ στο οποίο η $f$ είναι φραγμένη.*

*Απόδειξη.* Υπάρχουν αύξουσες ακολουθίες $(\psi_n)$ και $(\zeta_n)$ μη αρνητικών απλών μετρήσιμων συναρτήσεων ώστε $\psi_n(x) \to f^+(x)$ και $\zeta_n(x) \to f^-(x)$ για κάθε $x \in A$. Τότε, αν ορίσουμε $\varphi_n = \psi_n - \zeta_n$, έχουμε $\varphi_n(x) \to f^+(x) - f^-(x) = f(x)$ για κάθε $x \in A$.

Οι $f^+$ και $f^-$ είναι φραγμένες σε κάθε υποσύνολο $B$ του $A$ στο οποίο η $f$ είναι φραγμένη. Συνεπώς, $\psi_n \to f^+$ και $\zeta_n \to f^-$ ομοιόμορφα στο $B$, απ' όπου έπεται ότι $\varphi_n \to f$ ομοιόμορφα στο $B$.

Παρατηρήστε επίσης ότι: αν $C = \{f < 0\}$ τότε $\psi_n \equiv 0$ στο $C$ και $\zeta_n \equiv 0$ στο $A \setminus C$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς,

$$|\varphi_n| = |\psi_n - \zeta_n| = \max\{\psi_n, \zeta_n\} \leqslant \max\{f^+, f^-\} = |f|. \tag{2.1.43}$$

Από την σχέση αυτή και από το γεγονός ότι οι $(\psi_n)$ και $(\zeta_n)$ είναι αύξουσες ακολουθίες συναρτήσεων, έπεται επίσης ότι

$$|\varphi_n| = \max\{\psi_n, \zeta_n\} \leqslant \max\{\psi_{n+1}, \zeta_{n+1}\} = |\varphi_{n+1}|. \tag{2.1.44}$$

Από τις (2.1.43) και (2.1.44) έπεται η (2.1.42). □

Παρατηρήστε ότι στην κατασκευή που κάναμε για την απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.15, χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι η $f$ είναι μετρήσιμη μόνο για να εξασφαλίσουμε ότι τα $C_n$, $B_{n,k}$ είναι μετρήσιμα σύνολα, δηλαδή για να συμπεράνουμε ότι οι απλές συναρτήσεις $\varphi_n$ είναι μετρήσιμες. Η σύγκλιση των $\varphi_n$ στην $f$ ισχύει τελείως γενικά.

Συνδυάζοντας το Θεώρημα 2.1.15 με την Πρόταση 2.1.9 παίρνουμε τον εξής χαρακτηρισμό των μετρήσιμων συναρτήσεων.

**Θεώρημα 2.1.17.** *Έστω $A$ μετρήσιμο σύνολο και έστω $f : A \to [-\infty, +\infty]$. Η $f$ είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν είναι κατά σημείο όριο μιάς ακολουθίας απλών μετρήσιμων συναρτήσεων.* □

### 2.1.5 Οι τρεις «αρχές του Littlewood»

Οι τρεις «αρχές του Littlewood» διατυπώνονται με κάπως «έντονο τρόπο» ως εξής:

(i) Κάθε σύνολο είναι σχεδόν ίσο με μια πεπερασμένη ένωση διαστημάτων.

(ii) Κάθε συνάρτηση είναι σχεδόν συνεχής.

(iii) Κάθε ακολουθία συναρτήσεων που συγκλίνει κατά σημείο, συγκλίνει σχεδόν ομοιόμορφα.

Φυσικά, πρέπει να δώσει κανείς την ακριβή διατύπωση αυτών των ισχυρισμών (αλλιώς, είναι προφανώς λανθασμένοι). Τα σύνολα και οι συναρτήσεις στα οποία αναφερόμαστε πρέπει να είναι μετρήσιμα και το τι εννοούμε λέγοντας «σχεδόν» πρέπει να γίνει σαφές. Η χρησιμότητα όμως αυτών των προτάσεων είναι μεγάλη.

**Θεώρημα 2.1.18** (μετρήσιμα σύνολα)**.** *Έστω $A$ μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ με $\lambda(A) < +\infty$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν διαστήματα $I_1, \ldots, I_k$ ώστε το σύνολο $E = I_1 \cup \cdots \cup I_k$ να ικανοποιεί την $\lambda(E \triangle A) < \varepsilon$.*

*Απόδειξη.* Έστω $\varepsilon > 0$. Από τον ορισμό του (εξωτερικού) μέτρου, υπάρχει ακολουθία $(I_n)$ διαστημάτων ώστε $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) < \lambda(A) + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.1.45}$$

Αφού η σειρά των $\lambda(I_n)$ συγκλίνει, υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \lambda(I_n) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.1.46}$$

Ορίζουμε $E = I_1 \cup \cdots \cup I_k$. Παρατηρήστε ότι

$$\begin{aligned} \lambda(E \setminus A) &\leqslant \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \setminus A\right) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right) - \lambda(A) \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) - \lambda(A) < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

και

$$A \setminus E = A \setminus (I_1 \cup \cdots \cup I_k) \subseteq \bigcup_{n=k+1}^{\infty} I_n, \tag{2.1.47}$$

άρα

$$\lambda(A \setminus E) \leqslant \lambda\left(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} I_n\right) \leqslant \sum_{n=k+1}^{\infty} \lambda(I_n) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.1.48}$$

Έπεται ότι

$$\lambda(A \triangle E) = \lambda(A \setminus E) + \lambda(E \setminus A) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \tag{2.1.49}$$

δηλαδή το ζητούμενο. □

**Θεώρημα 2.1.19** (θεώρημα Egorov). *Έστω $A$ μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ με $\lambda(A) < +\infty$ και έστω $(f_k)$ ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων $f_k : A \to \mathbb{R}$ η οποία συγκλίνει κατά σημείο στην μετρήσιμη συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ σχεδόν παντού στο $A$. Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει κλειστό σύνολο $F_\varepsilon \subseteq A$ ώστε $\lambda(A \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$ και $f_k \to f$ ομοιόμορφα στο $F_\varepsilon$.*

*Απόδειξη.* Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f_k \to f$ παντού στο $A$ (εξηγήστε γιατί). Για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ ορίζουμε το σύνολο

$$A_{n,m} = \left\{x \in A : |f_k(x) - f(x)| < \frac{1}{n} \text{ για κάθε } k \geqslant m\right\} = \bigcap_{k=m}^{\infty} \{|f_k - f| < 1/n\}. \tag{2.1.50}$$

Σταθεροποιούμε $n \in \mathbb{N}$. Παρατηρήστε ότι

$$A_{n,m+1} = \bigcap_{k=m+1}^{\infty} \{|f_k - f| < 1/n\} \supseteq \bigcap_{k=m}^{\infty} \{|f_k - f| < 1/n\} = A_{n,m} \tag{2.1.51}$$

δηλαδή, η ακολουθία $(A_{n,m})_{m=1}^{\infty}$ είναι αύξουσα. Παρατηρήστε επίσης ότι, για κάθε $x \in A$ υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $|f_k(x) - f(x)| < 1/n$ για κάθε $k \geqslant m$, διότι $f_k(x) \to f(x)$. Συνεπώς, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $x \in A_{n,m}$. Αυτό αποδεικνύει ότι

$$A = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_{n,m}. \tag{2.1.52}$$

Συνεπώς, $\lambda(A_{n,m}) \to \lambda(A)$. Άρα, μπορούμε να βρούμε $m_n \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\lambda(A) < \lambda(A_{n,m_n}) + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}. \tag{2.1.53}$$

Ορίζουμε

$$U_\varepsilon = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{n,m_n}. \tag{2.1.54}$$

Τότε, $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $U_\varepsilon$. Αυτό αιτιολογείται ως εξής: έστω $\delta > 0$. Μπορούμε να βρούμε $n \in \mathbb{N}$ ώστε $1/n < \delta$. Τότε, για κάθε $k \geqslant m_n$ και για κάθε $x \in U_\varepsilon$ έχουμε $x \in A_{n,m_n}$, άρα

$$|f_k(x) - f(x)| < \frac{1}{n} < \delta. \tag{2.1.55}$$

Δηλαδή, $\|(f_k - f)\,|_{U_\varepsilon}\|_\infty < \delta$ για κάθε $k \geqslant m_n$.

Επίσης, από την (2.1.53) βλέπουμε ότι

$$\lambda(A \setminus U_\varepsilon) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A \setminus A_{n,m_n})\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A \setminus A_{n,m_n}) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+2}} = \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.1.56}$$

Το $U_\varepsilon$ είναι μετρήσιμο, όχι απαραίτητα κλειστό, σύνολο. Μπορούμε όμως να βρούμε κλειστό σύνολο $F_\varepsilon \subseteq U_\varepsilon$ ώστε $\lambda(U_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$. Τότε,

$$\lambda(A \setminus F_\varepsilon) = \lambda(A \setminus U_\varepsilon) + \lambda(U_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \tag{2.1.57}$$

και από το γεγονός ότι $f_k \to f$ ομοιόμορφα στο $U_\varepsilon$ είναι φανερό ότι $f_k \to f$ ομοιόμορφα στο $F_\varepsilon$. □

**Παρατήρηση 2.1.20.** Η υπόθεση ότι $\lambda(A) < +\infty$ είναι απαραίτητη. Αν θεωρήσουμε την ακολουθία συναρτήσεων $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f_k = \chi_{[k,\infty)}$, τότε $f_k(x) \to 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όμως, για κάθε μετρήσιμο $C \subset \mathbb{R}$ με $\lambda(C) < +\infty$ ισχύει $\|f_k|_{\mathbb{R}\setminus C}\|_\infty = 1$. Αυτό σημαίνει ότι δεν μπορούμε να έχουμε ομοιόμορφη σύγκλιση της $(f_k)$ στην μηδενική συνάρτηση σε κάποιο σύνολο $F_\varepsilon$ για το οποίο $\lambda(\mathbb{R} \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$. Εξηγήστε τις λεπτομέρειες.

**Θεώρημα 2.1.21** (θεώρημα Luzin). *Έστω $A$ μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ με $\lambda(A) < +\infty$ και έστω $f : A \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει κλειστό σύνολο $F_\varepsilon \subseteq A$ ώστε $\lambda(A \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$ και η $f|_{F_\varepsilon}$ να είναι συνεχής συνάρτηση.*

*Απόδειξη.* Δείχνουμε πρώτα τον ισχυρισμό του Θεωρήματος στην περίπτωση που η $f$ είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση $f = \chi_E$ κάποιου μετρήσιμου υποσυνόλου του $A$. Έστω $\varepsilon > 0$. Μπορούμε να βρούμε $F$ κλειστό υποσύνολο του $A$ και $G$ ανοικτό στο $A$ ώστε $V \subseteq E \subseteq G$ και $\lambda(G \setminus F) < \varepsilon/2$. Θεωρούμε τον περιορισμό της $f$ στο $F_1 = V \cup (A \setminus G)$. Τα $V, A \setminus G$ είναι κλειστά στο $A$ και έχουμε $f \equiv 1$ στο $V$ και $f \equiv 0$ στο $A \setminus G$. Μπορούμε τότε να ελέγξουμε ότι η $f|_{F_1}$ είναι συνεχής (εξηγήστε το, για παράδειγμα, με την αρχή της μεταφοράς). Κατόπιν, μπορούμε να βρούμε κλειστό $F \subseteq F_1$ με $\lambda(F_1 \setminus F) < \varepsilon/2$. Τότε, $\lambda(A \setminus F) < \varepsilon$ και η $f|_F$ είναι συνεχής.

Απο τις χαρακτηριστικές συναρτήσεις υποσυνόλων του $A$ μπορούμε τώρα να περάσουμε σε συναρτήσεις της μορφής

$$\varphi = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \chi_{E_i}, \tag{2.1.58}$$

όπου $\lambda_i \in \mathbb{R}$ και $E_i$ μετρήσιμα υποσύνολα του $A$ (εξηγήστε τις λεπτομέρειες).

Έστω τώρα $f : A \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Από το Θεώρημα 2.1.15 (και το Πόρισμα 2.1.16) υπάρχει ακολουθία $(\varphi_n)$ συναρτήσεων της μορφής (2.1.58) ώστε $\varphi_n \to f$ στο $A$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $A_n \subseteq A$ με $\lambda(A \setminus A_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+3}}$ ώστε η $\varphi_n|_{A_n}$ να είναι συνεχής. Επίσης, από το θεώρημα του Egorov μπορούμε να βρούμε $B \subseteq A$ με $\lambda(A \setminus B) < \varepsilon/4$ ώστε $\varphi_n \to f$ ομοιόμορφα στο $B$. Ορίζουμε

$$U_\varepsilon = B \cap \left( \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right). \tag{2.1.59}$$

Τότε,

$$\lambda(A \setminus U_\varepsilon) \leqslant \lambda(A \setminus B) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A \setminus A_n) < \frac{\varepsilon}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+3}} = \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.1.60}$$

Επίσης, όλες οι $\varphi_n|_{U_\varepsilon}$ είναι συνεχείς (διότι $U_\varepsilon \subseteq A_n$ για κάθε $n$) και $\varphi_n|_{U_\varepsilon} \to f|_{U_\varepsilon}$ ομοιόμορφα (διότι $U_\varepsilon \subseteq B$). Έπεται ότι η $f|_{U_\varepsilon}$ είναι συνεχής.

Το $U_\varepsilon$ είναι μετρήσιμο, όχι απαραίτητα κλειστό, σύνολο. Μπορούμε όμως να βρούμε κλειστό σύνολο $F_\varepsilon \subseteq U_\varepsilon$ ώστε $\lambda(U_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$. Τότε,

$$\lambda(A \setminus F_\varepsilon) = \lambda(A \setminus U_\varepsilon) + \lambda(U_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \tag{2.1.61}$$

και από το γεγονός ότι η $f|_{U_\varepsilon}$ είναι συνεχής είναι φανερό ότι η $f|_{F_\varepsilon}$ είναι συνεχής. □

## 2.2 Ολοκλήρωμα Lebesgue

Σε αυτήν την παράγραφο θα ορίσουμε το ολοκλήρωμα Lebesgue. Οι ιδιότητες που θα θέλαμε να ικανοποιεί είναι οι εξής:

(i) Αν το $A$ είναι μετρήσιμο, τότε $\int_A \chi_A \, d\lambda = \lambda(A)$, όπου $\chi_A$ είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του $A$.

(ii) Το ολοκλήρωμα είναι γραμμικό: αν $f, g$ είναι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις (ορισμένες στο ίδιο σύνολο) και $t, s \in \mathbb{R}$, τότε

$$\int (tf + sg) \, d\lambda = t \int f \, d\lambda + s \int g \, d\lambda. \tag{2.2.1}$$

(iii) Το ολοκλήρωμα είναι «θετικό»: αν η $f$ είναι ολοκληρώσιμη και $f \geqslant 0$, τότε $\int f \, d\lambda \geqslant 0$. Αφού απαιτούμε και την γραμμικότητα, η θετικότητα είναι ισοδύναμη με την μονοτονία: αν οι $f, g$ είναι ολοκληρώσιμες (ορισμένες στο ίδιο σύνολο) και $f \geqslant g$, τότε $\int f \, d\lambda \geqslant \int g \, d\lambda$.

(iv) Το ολοκλήρωμα ορίζεται για μια ευρεία κλάση συναρτήσεων. Οι φραγμένες Riemann ολοκληρώσιμες συναρτήσεις είναι Lebesgue ολοκληρώσιμες, και τα δύο ολοκληρώματα συμπίπτουν.

Ο ορισμός του ολοκληρώματος Lebesgue δίνεται σε τρία βήματα. Τελείως σχηματικά, η διαδικασία που θα ακολουθήσουμε είναι η εξής:

(i) Στην §2.2.1 ορίζουμε το ολοκλήρωμα για κάποιες απλές μετρήσιμες συναρτήσεις, τους γραμμικούς συνδυασμούς χαρακτηριστικών συναρτήσεων μετρήσιμων συνόλων με πεπερασμένο μέτρο. Ο ορισμός είναι προφανής από τις ιδιότητες (i) και (ii) που απαιτούμε για το ολοκλήρωμα.

(ii) Στην §2.2.2 δίνουμε τον ορισμό του $\int f \, d\lambda$ για κάθε μετρήσιμη $f \geqslant 0$. Η απαίτηση της μονοτονίας και το γεγονός ότι κάθε μετρήσιμη μη αρνητική συνάρτηση είναι το όριο μιας αύξουσας ακολουθίας απλών μετρήσιμων συναρτήσεων υποδεικνύουν ότι το $\int f \, d\lambda$ θα μπορούσε να οριστεί ως το supremum των ολοκληρωμάτων $\int \varphi \, d\lambda$ πάνω από όλες τις απλές, μη αρνητικές, ολοκληρώσιμες $\varphi \leqslant f$.

(iii) Στην §2.2.3 δίνουμε τον γενικό ορισμό: $\int f \, d\lambda = \int f^+ \, d\lambda - \int f^- \, d\lambda$, αν το δεξιό μέλος έχει νόημα. Ο ορισμός αυτός επιβάλλεται από την απαίτηση της γραμμικότητας.

Στην πορεία, θα αποδείξουμε τις βασικές ιδιότητες του ολοκληρώματος Lebesgue. Ιδιαίτερα μας ενδιαφέρουν οι καλές ιδιότητες του ολοκληρώματος Lebesgue σε σχέση με τις συγκλίνουσες ακολουθίες ολοκληρώσιμων συναρτήσεων (θεώρημα μονότονης σύγκλισης και θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης).

Το ολοκλήρωμα Lebesgue ορίζεται καλά για κάθε φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση που είναι ορισμένη σε κλειστό διάστημα. Ειδικότερα, οι Riemann ολοκληρώσιμες συναρτήσεις $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμες κατά Lebesgue. Στο επόμενο Κεφάλαιο συγκρίνουμε τα δύο ολοκληρώματα.

### 2.2.1 Απλές μετρήσιμες συναρτήσεις

**Ορισμός 2.2.1.** Έστω $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ απλή μετρήσιμη συνάρτηση. Λέμε ότι η $\varphi$ είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη αν το σύνολο

$$\{\varphi \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : \varphi(x) \neq 0\} \tag{2.2.2}$$

έχει πεπερασμένο μέτρο. Αυτό σημαίνει ότι η κανονική αναπαράσταση της $\varphi$ είναι

$$\varphi = \sum_{i=0}^{n} a_i \chi_{A_i}, \tag{2.2.3}$$

όπου $a_0 = 0$ και $A_0 = \{\varphi = 0\}$, οι $a_i$ είναι διακεκριμένοι, τα $A_i$ είναι ξένα και μετρήσιμα, και $\lambda(A_i) < +\infty$ αν $i \neq 0$ (αναγκαστικά, $\lambda(A_0) = \infty$). Το ολοκλήρωμα της $\varphi$ ορίζεται από την

$$\int \varphi \, d\lambda = \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda(A_i). \tag{2.2.4}$$

Αν υιοθετήσουμε την σύμβαση $0 \cdot \infty = 0$, μπορούμε να γράψουμε

$$\int \varphi \, d\lambda = \sum_{i=0}^{n} a_i \lambda(A_i) = \sum_{a \in \mathbb{R}} a \, \lambda(\{\varphi = a\}). \tag{2.2.5}$$

**Λήμμα 2.2.2.** *Έστω $\varphi$ ολοκληρώσιμη απλή συνάρτηση και έστω $\varphi = \sum_{i=1}^{n} b_i \chi_{E_i}$ τυχούσα αναπαράσταση της $\varphi$ ώστε τα $E_i$ να είναι ξένα και μετρήσιμα. Τότε,*

$$\int \varphi \, d\lambda = \sum_{i=1}^{n} b_i \lambda(E_i). \tag{2.2.6}$$

*Απόδειξη.* Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ θέτουμε $J_a = \{i \leqslant n : b_i = a\}$. Τότε,

$$\{\varphi = a\} = \bigcup_{i \in J_a} E_i \tag{2.2.7}$$

και

$$a \, \lambda(\{\varphi = a\}) = \sum_{i \in J_a} b_i \lambda(E_i). \tag{2.2.8}$$

Άρα,

$$\int \varphi \, d\lambda = \sum_{a \in \mathbb{R}} a \, \lambda(\{\varphi = a\}) = \sum_{a \in \mathbb{R}} \sum_{i \in J_a} b_i \lambda(E_i) = \sum_{i \in \cup_\lambda J_a} b_i \lambda(E_i) = \sum_{i=1}^{n} b_i \lambda(E_i). \tag{2.2.9}$$

Δηλαδή, ισχύει η (2.2.6). □

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 2.2.2 μπορούμε να δείξουμε ότι το ολοκλήρωμα είναι γραμμικό και μονότονο (στην κλάση των απλών ολοκληρώσιμων συναρτήσεων).

**Πρόταση 2.2.3.** *Έστω $\varphi$ και $\psi$ απλές ολοκληρώσιμες συναρτήσεις.*

(i) *Αν* $t, s \in \mathbb{R}$, *τότε* $\int (t\varphi + s\psi)\, d\lambda = t \int \varphi\, d\lambda + s \int \psi\, d\lambda$.

(ii) *Αν* $\varphi \geqslant \psi$, *τότε* $\int \varphi\, d\lambda \geqslant \int \psi\, d\lambda$.

*Απόδειξη.* (i) Θεωρούμε τις κανονικές μορφές

$$\varphi = \sum_{i=0}^{n} a_i \chi_{A_i} \quad \text{και} \quad \psi = \sum_{j=0}^{k} b_j \chi_{B_j}, \tag{2.2.10}$$

των $\varphi$ και $\psi$ (οι $a_i$ είναι διακεκριμένοι, τα $A_i$ ξένα μετρήσιμα με ένωση το $\mathbb{R}^d$, $a_0 = 0$ και $\lambda(A_i) < \infty$ αν $i \neq 0$ – αντίστοιχες ιδιότητες έχουν τα $b_j$, $B_j$). Παρατηρούμε ότι, από την $\bigcup_{i=0}^{n} A_i = \bigcup_{j=0}^{k} B_j = \mathbb{R}^d$ έπεται ότι

$$\mathbb{R}^d = \bigcup_{i=0}^{n} \bigcup_{j=0}^{k} (A_i \cap B_j). \tag{2.2.11}$$

Τα $A_i \cap B_j$ είναι ξένα, μετρήσιμα, και έχουν πεπερασμένο μέτρο (με την εξαίρεση του $A_0 \cap B_0$). Επίσης,

$$\varphi = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} a_i \chi_{A_i \cap B_j} \;\; , \;\; \psi = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} b_j \chi_{A_i \cap B_j} \tag{2.2.12}$$

και

$$t\varphi + s\psi = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} (ta_i + sb_j) \chi_{A_i \cap B_j}. \tag{2.2.13}$$

Από το Λήμμα (2.2.2) παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\int (t\varphi + s\psi)\, d\lambda &= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} (ta_i + sb_j) \lambda(A_i \cap B_j) \\
&= t \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} a_i \lambda(A_i \cap B_j) + s \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} b_j \lambda(A_i \cap B_j) \\
&= t \sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{j=0}^{k} \lambda(A_i \cap B_j) + s \sum_{j=0}^{k} b_j \sum_{i=0}^{n} \lambda(A_i \cap B_j) \\
&= t \sum_{i=0}^{n} a_i \lambda(A_i) + s \sum_{j=0}^{k} b_j \lambda(B_j) \\
&= t \int \varphi\, d\lambda + s \int \psi\, d\lambda.
\end{aligned}$$

(ii) Αν $\varphi \geqslant \psi$, τότε η $\varphi - \psi$ είναι απλή ολοκληρώσιμη συνάρτηση με μη αρνητικές τιμές. Από το (i),

$$\int \varphi\, d\lambda - \int \psi\, d\lambda = \int (\varphi - \psi)\, d\lambda \geqslant 0. \tag{2.2.14}$$

Η τελευταία ανισότητα είναι προφανής από την (2.2.4), αφού $\varphi - \psi \geqslant 0$. □

**Πόρισμα 2.2.4.** *Έστω* $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ *και* $E_1, \ldots, E_n$ *– όχι αναγκαστικά ξένα – μετρήσιμα υποσύνολα του* $\mathbb{R}^d$ *με* $\lambda(E_i) < \infty$, $i = 1, \ldots, n$. *Τότε,*

$$\int \left( \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i} \right) d\lambda = \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda(E_i). \tag{2.2.15}$$

*Απόδειξη.* Κάθε $\chi_{E_i}$ είναι απλή και ολοκληρώσιμη, διότι $\lambda(E_i) < \infty$. Το συμπέρασμα προκύπτει άμεσα από τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος για απλές ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. □

**Ορισμός 2.2.5.** Έστω $\varphi$ απλή ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Για κάθε μετρήσιμο υποσύνολο $E$ του $\mathbb{R}^d$ ορίζουμε

$$\int_E \varphi \, d\lambda := \int \varphi \chi_E \, d\lambda. \tag{2.2.16}$$

Η $\varphi \chi_E$ είναι απλή και ολοκληρώσιμη: αν $\varphi = \sum a_i \chi_{A_i}$, τότε $\varphi \chi_E = \sum a_i \chi_{A_i} \chi_E = \sum a_i \chi_{A_i \cap E}$ και τα σύνολα $A_i \cap E$ έχουν πεπερασμένο μέτρο, διότι τα σύνολα $A_i$ έχουν πεπερασμένο μέτρο. Συνεπώς, το ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος της (2.2.16) ορίζεται καλά.

Στην περίπτωση που $E = [a, b]$, θα χρησιμοποιούμε και τον συμβολισμό

$$\int_a^b \varphi \, d\lambda := \int_{[a,b]} \varphi \, d\lambda. \tag{2.2.17}$$

Γενικά, θα αποφεύγουμε τον συμβολισμό $\int_a^b \varphi(x) dx$ για το ολοκλήρωμα Lebesgue (ώστε να μην υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης με το ολοκλήρωμα Riemann).

**Παρατήρηση 2.2.6.** Κλείνουμε αυτήν την παράγραφο με μια απλή παρατήρηση. Η συνάρτηση του Dirichlet $\chi_{\mathbb{Q}} : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι απλή και ολοκληρώσιμη (το $\mathbb{Q}$ είναι μετρήσιμο). Έχουμε

$$\int_a^b \chi_{\mathbb{Q}} \, d\lambda = 0 \tag{2.2.18}$$

για κάθε κλειστό διάστημα $[a, b]$. Θυμηθείτε ότι η $\chi_{\mathbb{Q}}$ δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.

### 2.2.2 Μη αρνητικές συναρτήσεις

**Ορισμός 2.2.7.** Έστω $f : \mathbb{R}^d \to [0, \infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε το **ολοκλήρωμα Lebesgue** της $f$ ως εξής:

$$\int f \, d\lambda = \sup \left\{ \int \varphi \, d\lambda \mid 0 \leqslant \varphi \leqslant f, \varphi \text{ απλή ολοκληρώσιμη} \right\}. \tag{2.2.19}$$

Η ποσότητα αυτή είναι καλά ορισμένη (η μηδενική συνάρτηση είναι απλή ολοκληρώσιμη και $0 \leqslant f$), μη αρνητική και μπορεί να πάρει την τιμή $+\infty$. Θα λέμε ότι η $f$ είναι **Lebesgue ολοκληρώσιμη** αν $\int f \, d\lambda < +\infty$.

**Παρατηρήσεις 2.2.8.** (α) Το πρώτο πράγμα που πρέπει να εξασφαλίσουμε είναι ότι ο νέος ορισμός του ολοκληρώματος συμφωνεί με τον ορισμό του ολοκληρώματος της §2.2.1 στην περίπτωση των μη αρνητικών απλών ολοκληρώσιμων συναρτήσεων. Δηλαδή ότι, αν η $\varphi \geqslant 0$ είναι απλή ολοκληρώσιμη, τότε

$$\int \varphi \, d\lambda = \sup \left\{ \int \psi \, d\lambda \mid 0 \leqslant \psi \leqslant \varphi, \psi \text{ απλή ολοκληρώσιμη} \right\}. \tag{2.2.20}$$

Αυτό είναι άμεσο, από τη μονοτονία του ολοκληρώματος απλών συναρτήσεων - Πρόταση (2.2.3) - και από την $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi$.

Παρατηρήστε ότι, με τον νέο ορισμό, έχουμε τώρα ορίσει το $\int \varphi$ για κάθε μη αρνητική απλή μετρήσιμη συνάρτηση (δεν απαιτούμε την $\lambda(\{\varphi \neq 0\}) < \infty$). Ειδικότερα, αν $A$ είναι οποιοδήποτε μετρήσιμο σύνολο, τότε $\int \chi_A \, d\lambda = \lambda(A)$. Αυτό έπεται από τον ορισμό στην περίπτωση που $\lambda(A) < \infty$, ενώ αν $\lambda(A) = \infty$ έχουμε $\chi_A \geqslant \chi_{A \cap [-n,n]^d}$ άρα

$$\int \chi_A \, d\lambda \geqslant \sup_n \int \chi_{A \cap [-n,n]^d} \, d\lambda = \sup_n \lambda(A \cap [-n,n]^d) = \lambda(A) = \infty. \tag{2.2.21}$$

(β) Από τον ορισμό έπονται άμεσα οι εξής ιδιότητες:

(i) Αν $0 \leqslant f \leqslant g$ τότε $\int f \, d\lambda \leqslant \int g \, d\lambda$.

(ii) Αν $t > 0$ και $f \geqslant 0$ τότε $\int (tf) \, d\lambda = t \int f \, d\lambda$.

(γ) Έστω $f : \mathbb{R}^d \to [0,\infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση και έστω $E$ μετρήσιμο σύνολο. Ορίζουμε

$$\int_E f \, d\lambda = \int f \chi_E \, d\lambda. \tag{2.2.22}$$

Αν $f : E \to [0,\infty]$, επεκτείνουμε την $f$ σε μια συνάρτηση $\tilde{f} : \mathbb{R}^d \to [0,\infty]$ θέτοντας $\tilde{f}(x) = 0$ αν $x \notin E$, και ορίζουμε

$$\int_E f \, d\lambda = \int \tilde{f} \, d\lambda. \tag{2.2.23}$$

Παρατηρήστε ότι η $\tilde{f}$ είναι μετρήσιμη και $\int_E \tilde{f} \, d\lambda = \int \tilde{f} \, d\lambda = \int_E f \, d\lambda$.

(δ) Μερικές ακόμα χρήσιμες ιδιότητες προκύπτουν εύκολα από τον ορισμό (2.2.22):

(iii) Αν $\lambda(E) = 0$ και $f \geqslant 0$, τότε $\int_E f \, d\lambda = 0$. Πράγματι, αν η $\varphi$ είναι απλή ολοκληρώσιμη και $0 \leqslant \varphi \leqslant f\chi_E$, τότε $\varphi\chi_E = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i}$ όπου $\lambda(E_i) = 0$, άρα

$$\int \varphi \, d\lambda = \int \varphi \chi_E \, d\lambda = 0. \tag{2.2.24}$$

(iv) Αν $E \subset F$ και $f \geqslant 0$, τότε $\int_E f \, d\lambda \leqslant \int_F f \, d\lambda$. Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $f\chi_E \leqslant f\chi_F$.

(v) Αν $0 \leqslant f \leqslant M$ στο $E$, τότε $\int_E f \, d\lambda \leqslant M\lambda(E)$. Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $f\chi_E \leqslant M\chi_E$.

Η ανισότητα της επόμενης Πρότασης είναι απλή αλλά, όπως θα δούμε στη συνέχεια, εξαιρετικά σημαντική.

**Θεώρημα 2.2.9** (ανισότητα του Markov)**.** *Έστω $f : \mathbb{R}^d \to [0,\infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Για κάθε $a > 0$,*

$$\int f \, d\lambda \geqslant \int_{\{f \geqslant a\}} f \, d\lambda \geqslant a \, \lambda(\{x : f(x) \geqslant a\}). \tag{2.2.25}$$

*Απόδειξη.* Παρατηρούμε ότι $f \geqslant a$ στο $\{f \geqslant a\}$. Άρα,

$$\int f\,d\lambda \geqslant \int_{\{f\geqslant a\}} d\lambda \geqslant \int_{\{f\geqslant a\}} a\,d\lambda = a\,\lambda(\{f\geqslant a\}). \tag{2.2.26}$$

**Πόρισμα 2.2.10.** *Έστω $f:\mathbb{R}^d\to[0,\infty]$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε, η $f$ παίρνει πεπερασμένη τιμή σχεδόν παντού: $\lambda(\{f=+\infty\})=0$.*

*Απόδειξη.* Γράφουμε

$$\{f=+\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\{f\geqslant n\}. \tag{2.2.27}$$

Από την ανισότητα του Markov έχουμε

$$0\leqslant \lambda(\{f=+\infty\}) \leqslant \lambda(E_n) \leqslant \frac{1}{n}\int f\,d\lambda \to 0 \tag{2.2.28}$$

όταν $n\to\infty$. Άρα,

$$\lambda(\{f=+\infty\})=0. \tag{2.2.29}$$

□

Το πρώτο θεμελιώδες θεώρημα για το ολοκλήρωμα Lebesgue είναι το **θεώρημα μονότονης σύγκλισης**. Μεταξύ άλλων, θα μας εξασφαλίσει τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος Lebesgue για μη αρνητικές συναρτήσεις. Για την απόδειξή του θα χρειαστούμε ένα Λήμμα.

**Λήμμα 2.2.11.** *Έστω $\varphi$ απλή ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αν $(E_n)$ είναι μια αύξουσα ακολουθία μετρήσιμων συνόλων και $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$, τότε*

$$\int_E \varphi = \lim_{n\to\infty}\int_{E_n}\varphi. \tag{2.2.30}$$

*Απόδειξη.* Μπορούμε να γράψουμε $\varphi=\sum_{i=1}^m a_i\chi_{A_i}$, όπου $a_i>0$ και τα $A_i$ είναι ξένα μετρήσιμα σύνολα με πεπερασμένο μέτρο. Τότε,

$$\int_E \varphi\,d\lambda = \int \varphi\chi_E\,d\lambda = \sum_{i=1}^m a_i\lambda(A_i\cap E). \tag{2.2.31}$$

Αφού $E_n\nearrow E$, έχουμε $\lambda(A_i\cap E_n)\nearrow\lambda(A_i\cap E)$ για κάθε $i=1,\dots,m$. Άρα,

$$\begin{aligned}\int \varphi\,d\lambda &= \sum_{i=1}^m a_i\lambda(A_i\cap E) = \sum_{i=1}^k a_i\lim_{n\to\infty}\lambda(A_i\cap E_n)\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^k a_i\lambda(A_i\cap E_n) = \lim_{n\to\infty}\int_{E_n}\varphi\,d\lambda.\end{aligned}$$

□

**Θεώρημα 2.2.12** (Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης)**.** *Έστω $(f_n)$ αύξουσα ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων. Τότε,*

$$\int \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\lambda. \tag{2.2.32}$$

*Απόδειξη.* Αφού η $(f_n)$ είναι αύξουσα, η συνάρτηση

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \sup_n f_n(x) \tag{2.2.33}$$

ορίζεται καλά, είναι μη αρνητική και μετρήσιμη. Επίσης,

$$\int f_n \, d\lambda \leqslant \int f_{n+1} \, d\lambda \leqslant \int f \, d\lambda \tag{2.2.34}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα το $\lim \int f_n \, d\lambda$ υπάρχει και

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\lambda \leqslant \int f \, d\lambda. \tag{2.2.35}$$

Για να δείξουμε την αντίστροφη ανισότητα, αρκεί να δείξουμε το εξής: Για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε απλή ολοκληρώσιμη συνάρτηση $\varphi$ με $0 \leqslant \varphi \leqslant f$,

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\lambda \geqslant (1-\varepsilon) \int \varphi \, d\lambda. \tag{2.2.36}$$

Στην περίπτωση που $\int f \, d\lambda < \infty$, παίρνοντας supremum ως προς $\varphi$ συμπεραίνουμε ότι $\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\lambda \geqslant (1-\varepsilon) \int f \, d\lambda$ για κάθε $0 < \varepsilon < 1$, απ' όπου έπεται το ζητούμενο. Στην περίπτωση που $\int f \, d\lambda = \infty$, παίρνοντας πάλι supremum ως προς $\varphi$, συμπεραίνουμε ότι $\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\lambda = +\infty = \int f \, d\lambda$.

Έστω $\varphi$ απλή ολοκληρώσιμη συνάρτηση με $0 \leqslant \varphi \leqslant f$. Θεωρούμε την ακολουθία μετρήσιμων συνόλων $E_n = \{f_n \geqslant (1-\varepsilon)\varphi\}$. Αφού η $(f_n)$ είναι αύξουσα, έχουμε $E_n \subseteq E_{n+1}$ για κάθε $n$. Δηλαδή, η $(E_n)$ είναι αύξουσα.

Παρατηρούμε ότι αν $f(x) > 0$, τότε $f_n(x) \to f(x) > (1-\varepsilon)\varphi(x)$, άρα $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Αν πάλι $f(x) = 0$, τότε $\varphi(x) = 0$, άρα $x \in E_n$ για κάθε $n$. Επομένως, $E_n \nearrow \mathbb{R}^d$. Από τη μονοτονία του ολοκληρώματος,

$$\int f_n \, d\lambda \geqslant \int_{E_n} f_n \, d\lambda \geqslant \int_{E_n} (1-\varepsilon)\varphi \, d\lambda = (1-\varepsilon) \int_{E_n} \varphi \, d\lambda \tag{2.2.37}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε εφαρμόζοντας το Λήμμα 2.2.11 παίρνουμε

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\lambda \geqslant (1-\varepsilon) \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} \varphi \, d\lambda = (1-\varepsilon) \int \varphi \, d\lambda. \tag{2.2.38}$$

Έτσι, ολοκληρώνεται η απόδειξη. $\square$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα μονότονης σύγκλισης, μπορούμε να δώσουμε μια πληρέστερη διατύπωση του Θεωρήματος 2.1.15 για την προσέγγιση μιας μετρήσιμης συνάρτησης από απλές.

**Θεώρημα 2.2.13.** *Έστω $f$ μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση. Υπάρχει αύξουσα ακολουθία $(\psi_n)$ μη αρνητικών απλών ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $\psi_n \leqslant f$ με τις εξής ιδιότητες: $f = \lim\limits_{n\to\infty} \psi_n$ και $\int f \, d\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} \int \psi_n \, d\lambda$.*

*Απόδειξη.* Από το Θεώρημα 2.1.15 υπάρχει αύξουσα ακολουθία $(\varphi_n)$ μη αρνητικών απλών μετρήσιμων συναρτήσεων με $\varphi_n \nearrow f$. Ορίζουμε $\psi_n = \varphi_n \chi_{[-n,n]^d}$. Κάθε $\psi_n$ είναι ολοκληρώσιμη, γιατί $\lambda(\{\psi_n \neq 0\}) \leqslant \lambda([-n,n]^d) < \infty$. Αφού $\chi_{[-n,n]^d} \nearrow 1$, εύκολα ελέγχουμε ότι $\psi_n \nearrow f$. Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης, $\int \psi_n \, d\lambda \nearrow \int f \, d\lambda$. □

Έχοντας στην διάθεσή μας το προηγούμενο θεώρημα, και χρησιμοποιώντας την προσθετικότητα του ολοκληρώματος για απλές συναρτήσεις, μπορούμε να αποδείξουμε την προσθετικότητα του ολοκληρώματος για μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις.

**Θεώρημα 2.2.14.** *Έστω $f$ και $g$ μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις. Τότε,*

$$\int (f+g)\, d\lambda = \int f \, d\lambda + \int g \, d\lambda. \tag{2.2.39}$$

*Ειδικότερα, αν $E$ και $F$ είναι ξένα μετρήσιμα σύνολα, τότε*

$$\int_{E\cup F} f \, d\lambda = \int_E f \, d\lambda + \int_F f \, d\lambda. \tag{2.2.40}$$

*Απόδειξη.* Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.2.13, υπάρχουν αύξουσες ακολουθίες $(\varphi_n)$ και $(\psi_n)$ μη αρνητικών, απλών ολοκληρώσιμων συναρτήσεων με $\varphi_n \nearrow f$ και $\psi_n \nearrow g$. Τότε, $\varphi_n + \psi_n \nearrow f + g$ και, από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης,

$$\begin{aligned} \int (f+g)\, d\lambda &= \lim_{n\to\infty} \int (\varphi_n + \psi_n)\, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \left( \int \varphi_n \, d\lambda + \int \psi_n \, d\lambda \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n \, d\lambda + \lim_{n\to\infty} \int \psi_n \, d\lambda = \int f \, d\lambda + \int g \, d\lambda. \end{aligned}$$

Για την δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την προσθετικότητα του ολοκληρώματος για απλές συναρτήσεις. Το δεύτερο συμπέρασμα του Θεωρήματος προκύπτει από το πρώτο αν θεωρήσουμε τις $f\,\chi_E$ και $f\,\chi_F$: αφού τα $E$ και $F$ είναι ξένα, έχουμε $f\,\chi_E + f\,\chi_F = f\,\chi_{E\cup F}$. □

Η επόμενη Πρόταση ουσιαστικά δείχνει ότι αν δύο ολοκληρώσιμες συναρτήσεις συμπίπτουν σχεδόν παντού, τότε τα ολοκληρώματά τους είναι ίσα (το ολοκλήρωμα δεν μεταβάλλεται αν αλλάξουμε τις τιμές μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης σε ένα σύνολο μέτρου 0).

**Πρόταση 2.2.15.** *Έστω $f$ μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε, $\int f \, d\lambda = 0$ αν και μόνο αν $f = 0$ σχεδόν παντού.*

*Απόδειξη.* Αν $f = 0$ σχεδόν παντού, τότε $\lambda(\{f > 0\}) = 0$. Χρησιμοποιώντας την Παρατήρηση 2.2.8 (γ) βλέπουμε ότι

$$\int f \, d\lambda = \int_{\{f=0\}} f \, d\lambda + \int_{\{f>0\}} f \, d\lambda = 0 + 0 = 0. \tag{2.2.41}$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $\int f \, d\lambda = 0$. Για κάθε $n$ ορίζουμε $E_n = \{f \geqslant 1/n\}$. Από την ανισότητα του Markov,

$$\lambda(E_n) = \lambda(\{f \geqslant 1/n\}) \leqslant n \int f \, d\lambda = 0, \tag{2.2.42}$$

δηλαδή $\lambda(E_n) = 0$. Αφού $E_n \nearrow \{f > 0\}$, συμπεραίνουμε ότι

$$\lambda(\{f > 0\}) = \lim_{n\to\infty} \lambda(E_n) = 0. \tag{2.2.43}$$

Δηλαδή, $f = 0$ σχεδόν παντού. □

Το Θεώρημα Beppo Levi που ακολουθεί είναι ουσιαστικά αναδιατύπωση του Θεωρήματος Μονότονης Σύγκλισης: το ολοκλήρωμα Lebesgue για μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις είναι αριθμήσιμα προσθετικό.

**Θεώρημα 2.2.16** (Beppo Levi)**.** *Έστω $(f_n)$ ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων. Τότε,*

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \, d\lambda. \tag{2.2.44}$$

*Απόδειξη.* Οι $f_n$ είναι μη αρνητικές, επομένως η $f := \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ορίζεται καλά και είναι το κατά σημείο όριο της αύξουσας ακολουθίας $s_N = \sum_{n=1}^{N} f_n$ (υπάρχει βέβαια το ενδεχόμενο να έχουμε $f(x) = \infty$ για κάποια $x$).

Από την (πεπερασμένη) προσθετικότητα του ολοκληρώματος για μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις, έχουμε

$$\int s_N \, d\lambda = \int \left(\sum_{n=1}^{N} f_n\right) d\lambda = \sum_{n=1}^{N} \int f_n \, d\lambda \nearrow \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \, d\lambda. \tag{2.2.45}$$

Από την άλλη πλευρά, το θεώρημα μονότονης σύγκλισης μας εξασφαλίζει ότι

$$\int s_N \, d\lambda \nearrow \int f \, d\lambda = \int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) d\lambda, \tag{2.2.46}$$

δηλαδή το ζητούμενο. □

**Πόρισμα 2.2.17.** *Έστω $f$ μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση και έστω $(E_n)$ ακολουθία ξένων μετρήσιμων συνόλων. Τότε,*

$$\int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} f \, d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f \, d\lambda. \tag{2.2.47}$$

*Απόδειξη.* Θεωρούμε τις $f_n = f\chi_{E_n}$, $n = 1, 2, \ldots$. Αφού τα $E_n$ είναι ξένα, έχουμε $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f\chi_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n}$. □

**Ορισμός 2.2.18.** Έστω $\mathcal{A}$ μια $\sigma$-άλγεβρα υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Μια συνολοσυνάρτηση $\Phi : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ λέγεται **μέτρο στην** $\mathcal{A}$ αν ικανοποιεί τα εξής:

- $\Phi(\emptyset) = 0$.
- Αν $(E_n)$ είναι μια ακολουθία ξένων συνόλων στην $\mathcal{A}$, τότε $\Phi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(E_n)$.

Το μέτρο Lebesgue $\lambda$ στην $\sigma$-άλγεβρα $\mathcal{M}$ των Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ είναι ένα παράδειγμα μέτρου.

Σύμφωνα με αυτόν τον γενικό ορισμό, τα αποτελέσματά μας για το ολοκλήρωμα Lebesgue μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων δείχνουν το εξής:

**Θεώρημα 2.2.19.** *Έστω $f$ μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε συνολοσυνάρτηση $\Phi_f : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ ως εξής: αν $E \in \mathcal{M}$, θέτουμε*

$$\Phi_f(E) = \int_E f \, d\lambda. \tag{2.2.48}$$

*Τότε, η $\Phi_f$ είναι μέτρο.* □

*Σημείωση.* Παρατηρήστε ότι το μέτρο Lebesgue $\lambda$ αντιστοιχεί στην συνολοσυνάρτηση $\Phi$ που ορίζεται από την σταθερή συνάρτηση $f \equiv 1$.

Το θεώρημα μονότονης σύγκλισης μας λέει ότι αν μια ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων $f_n$ αυξάνει κατά σημείο στην $f$, τότε μπορούμε να «εναλλάξουμε τα όρια»: το ολοκλήρωμα του ορίου είναι το όριο των ολοκληρωμάτων. Το Λήμμα του Fatou που ακολουθεί μας δίνει αντίστοιχη πληροφορία στην περίπτωση που έχουμε κατά σημείο σύγκλιση αλλά δεν έχουμε την υπόθεση της μονοτονίας για την ακολουθία $(f_n)$.

**Θεώρημα 2.2.20** (Λήμμα του Fatou)**.** *Έστω $(f_n)$ ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων. Τότε,*

$$\int \left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right) d\lambda \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\lambda. \tag{2.2.49}$$

*Απόδειξη.* Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων $(g_n)$, όπου $g_n = \inf\{f_k : k \geqslant n\}$. Κάθε $g_n$ είναι μη αρνητική και μετρήσιμη, η $(g_n)$ είναι αύξουσα, και

$$g_n \nearrow \liminf_{n\to\infty} f_n. \tag{2.2.50}$$

Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης,

$$\int \left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right) d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int g_n \, d\lambda. \tag{2.2.51}$$

Παρατηρούμε ότι $g_n \leqslant f_k$ για κάθε $k \geqslant n$, οπότε η μονοτονία του ολοκληρώματος μας δίνει

$$\int g_n \, d\lambda \leqslant b_n := \inf_{k\geqslant n} \int f_k \, d\lambda. \tag{2.2.52}$$

Η ακολουθία $(b_n)$ είναι φθίνουσα και συγκλίνει στο $\liminf_n \int f_n \, d\lambda$. Άρα,

$$\int \left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right) d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int g_n \, d\lambda \leqslant \lim_{n\to\infty} b_n = \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\lambda. \tag{2.2.53}$$

□

**Πόρισμα 2.2.21.** *Έστω $(f_n)$ ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων. Αν $f_n \to f$ σ.π. και το $\lim_n \int f_n \, d\lambda$ υπάρχει, τότε*

$$\int f \, d\lambda \leqslant \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\lambda. \tag{2.2.54}$$

### 2.2.3 Η γενική περίπτωση

**Ορισμός 2.2.22.** (α) Έστω $f : \mathbb{R}^d \to [-\infty, +\infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε, οι συναρτήσεις $f^+ = \max\{f, 0\}$ και $f^- = -\min\{f, 0\}$ είναι μετρήσιμες και μη αρνητικές. Επίσης, ικανοποιούν τις

$$f = f^+ - f^- \ \text{ και } \ |f| = f^+ + f^-. \tag{2.2.55}$$

Τα ολοκληρώματα $\int f^+ \, d\lambda$ και $\int f^- \, d\lambda$ ορίζονται καλά και αν τουλάχιστον μία από τις $f^+$ και $f^-$ είναι ολοκληρώσιμη, τότε το **ολοκλήρωμα της** $f$ ορίζεται από την

$$\int f \, d\lambda = \int f^+ \, d\lambda - \int f^- \, d\lambda \tag{2.2.56}$$

(μπορεί βέβαια να παίρνει την τιμή $+\infty$ ή $-\infty$). Αν οι $f^+$, $f^-$ είναι και οι δύο ολοκληρώσιμες, τότε το ολοκλήρωμα της $f$ είναι πραγματικός αριθμός και λέμε ότι **η** $f$ **είναι ολοκληρώσιμη**.

(β) Αν η $f : \mathbb{R}^d \to [-\infty, \infty]$ είναι μετρήσιμη και $E$ είναι ένα μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$, τότε λέμε ότι **η** $f$ **είναι ολοκληρώσιμη στο** $E$ αν

$$\int_E f^+ \, d\lambda = \int f^+ \chi_E \, d\lambda < \infty \quad \text{και} \quad \int_E f^- \, d\lambda = \int f^- \chi_E \, d\lambda < \infty, \tag{2.2.57}$$

και ορίζουμε

$$\int_E f \, d\lambda = \int_E f^+ \, d\lambda - \int_E f^- \, d\lambda = \int f \chi_E \, d\lambda. \tag{2.2.58}$$

(γ) Αν η $f : E \to [-\infty, +\infty]$ είναι μετρήσιμη, τότε επεκτείνουμε την $f$ στον $\mathbb{R}^d$ θέτοντας $f \equiv 0$ στο $E^c$, συνεπώς,

$$\int_E f \, d\lambda = \int f \, \chi_E \, d\lambda = \int f \, d\lambda. \tag{2.2.59}$$

**Παρατηρήσεις 2.2.23.** (α) Αν $f \geqslant 0$ τότε $f = f^+$ και $f^- \equiv 0$, συνεπώς ο ορισμός που δώσαμε συμφωνεί με αυτόν της Παραγράφου §2.2.

(β) Από τον ορισμό είναι φανερό ότι η $f$ είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν

$$\int |f| \, d\lambda = \int f^+ \, d\lambda + \int f^- \, d\lambda < +\infty, \tag{2.2.60}$$

δηλαδή αν και μόνο αν η $|f|$ είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη (θυμηθείτε ότι αυτό δεν ισχύει για το ολοκλήρωμα Riemann). Σε αυτήν την περίπτωση,

$$\left| \int f \, d\lambda \right| \leqslant \int |f| \, d\lambda. \tag{2.2.61}$$

(γ) Αν η $f$ είναι ολοκληρώσιμη, τότε

$$\lambda(\{f^+ = +\infty\}) = \lambda(\{f^- = +\infty\}) = 0, \tag{2.2.62}$$

άρα

$$\lambda(\{x : f(x) = +\infty\} \cup \{x : f(x) = -\infty\}) = 0. \tag{2.2.63}$$

Δηλαδή, η $f$ είναι πεπερασμένη σχεδόν παντού.

(δ) Αν $\lambda(E) = 0$, τότε $\int_E f\,d\lambda = 0$, διότι $\int_E f^+\,d\lambda = 0$ και $\int_E f^-\,d\lambda = 0$.

(ε) Αν οι $f$ και $g$ είναι μετρήσιμες, η $g$ είναι ολοκληρώσιμη, και $|f| \leqslant |g|$ σχεδόν παντού, τότε η $f$ είναι ολοκληρώσιμη και $\int |f|\,d\lambda \leqslant \int |g|\,d\lambda$.

(στ) Αν $f = f_1 - f_2$, όπου $f_1, f_2$ μη αρνητικές ολοκληρώσιμες συναρτήσεις, τότε

$$\int f\,d\lambda = \int f_1\,d\lambda - \int f_2\,d\lambda. \tag{2.2.64}$$

Πράγματι, από την $f^+ - f^- = f_1 - f_2$ παίρνουμε $f^+ + f_2 = f^- + f_1$, άρα

$$\int f^+\,d\lambda + \int f_2\,d\lambda = \int f^-\,d\lambda + \int f_1\,d\lambda, \tag{2.2.65}$$

δηλαδή

$$\int f^+\,d\lambda - \int f^-\,d\lambda = \int f_1\,d\lambda - \int f_2\,d\lambda, \tag{2.2.66}$$

το οποίο αποδεικνύει το ζητούμενο.

(ζ) Αν $\lambda(E) < \infty$ και η $f : E \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη και μετρήσιμη, τότε η $f$ είναι ολοκληρώσιμη. Όπως θα δούμε στο επόμενο Κεφάλαιο, κάθε φραγμένη Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Θα δούμε επίσης ότι τα δύο ολοκληρώματα (Riemann και Lebesgue) συμπίπτουν.

### 2.2.4 Ιδιότητες του ολοκληρώματος

**Θεώρημα 2.2.24** (γραμμικότητα). *Έστω $f, g : E \to [-\infty, +\infty]$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Τότε, η $f + g$ ορίζεται καλά σχεδόν παντού και*

$$\int_E (f+g)\,d\lambda = \int_E f\,d\lambda + \int_E g\,d\lambda. \tag{2.2.67}$$

*Επίσης, αν $t \in \mathbb{R}$ τότε η $tf$ είναι ολοκληρώσιμη, και*

$$\int (tf)\,d\lambda = t\int f\,d\lambda. \tag{2.2.68}$$

*Απόδειξη.* Αφού οι $f, g$ είναι ολοκληρώσιμες, παίρνουν πεπερασμένη τιμή σχεδόν παντού, άρα η $f + g$ ορίζεται σχεδόν παντού. Επίσης,

$$(f+g)^+ \leqslant f^+ + g^+ \ \text{ και } \ (f+g)^- \leqslant f^- + g^-, \tag{2.2.69}$$

άρα

$$\int (f+g)^+\,d\lambda < +\infty \ \text{ και } \ \int (f+g)^-\,d\lambda < +\infty, \tag{2.2.70}$$

δηλαδή η $f + g$ είναι ολοκληρώσιμη.

Γράφουμε $f+g=(f^++g^+)-(f^-+g^-)$. Τότε, από την Παρατήρηση (στ) παίρνουμε

$$\begin{aligned}\int (f+g)\,d\lambda &= \int (f^++g^+)\,d\lambda - \int (f^-+g^-)\,d\lambda\\ &= \int f^+\,d\lambda + \int g^+\,d\lambda - \int f^-\,d\lambda - \int g^-\,d\lambda\\ &= \int f\,d\lambda + \int g\,d\lambda.\end{aligned}$$

Για τον δεύτερο ισχυρισμό παρατηρούμε ότι: αν $t>0$, τότε $(tf)^+=tf^+$ και $(tf)^-=tf^-$, άρα η $tf$ είναι ολοκληρώσιμη και

$$\int (tf)\,d\lambda = \int (tf)^+\,d\lambda - \int (tf)^-\,d\lambda = t\int f^+\,d\lambda - t\int f^-\,d\lambda = t\int f\,d\lambda. \tag{2.2.71}$$

Αν $t<0$, τότε $(tf)^+=-tf^-$ και $(tf)^-=-tf^+$, άρα η $tf$ είναι ολοκληρώσιμη και

$$\int (tf)\,d\lambda = \int (tf)^+\,d\lambda - \int (tf)^-\,d\lambda = -t\int f^-\,d\lambda + t\int f^+\,d\lambda = t\int f\,d\lambda. \tag{2.2.72}$$

Αν $t=0$, δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε. □

**Πόρισμα 2.2.25.** *Έστω $E$ μετρήσιμο σύνολο. Το σύνολο των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f:E\to[-\infty,+\infty]$ είναι γραμμικός χώρος.* □

**Θεώρημα 2.2.26** (μονοτονία)**.** *Αν οι $f,g$ είναι ολοκληρώσιμες και $f\leqslant g$ σχεδόν παντού, τότε $\int f\,d\lambda \leqslant \int g\,d\lambda$. Ειδικότερα, αν $f=g$ σχεδόν παντού, τότε $\int f\,d\lambda = \int g\,d\lambda$.*

*Απόδειξη.* Από την $f\leqslant g$ έπεται ότι $f^+\leqslant g^+$ και $f^-\geqslant g^-$ σχεδόν παντού. Άρα,

$$\int f^+\,d\lambda - \int f^-\,d\lambda \leqslant \int g^+\,d\lambda - \int g^-\,d\lambda, \tag{2.2.73}$$

το οποίο αποδεικνύει το ζητούμενο. □

**Θεώρημα 2.2.27** (προσθετικότητα)**.** *Έστω $f$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αν τα $A,B$ είναι μετρήσιμα και $A\cap B=\emptyset$, τότε*

$$\int_{A\cup B} f\,d\lambda = \int_A f\,d\lambda + \int_B f\,d\lambda. \tag{2.2.74}$$

*Απόδειξη.* Γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_{A\cup B} f\,d\lambda &= \int f\,\chi_{A\cup B}\,d\lambda = \int f\,(\chi_A+\chi_B)\,d\lambda\\ &= \int f\,\chi_A\,d\lambda + \int f\,\chi_B\,d\lambda = \int_A f\,d\lambda + \int_B f\,d\lambda.\end{aligned} \tag{2.2.75}$$

□

### 2.2.5 Θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης

Το βασικό θεώρημα σύγκλισης για ακολουθίες γενικών (όχι αναγκαστικά μη αρνητικών) ολοκληρώσιμων συναρτήσεων είναι το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης.

**Θεώρημα 2.2.28** (Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης)**.** *Έστω $f_n : E \to [-\infty, +\infty]$ ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων. Υποθέτουμε ότι $f_n \to f$ σχεδόν παντού και ότι υπάρχει $g : E \to [0, +\infty]$ ολοκληρώσιμη, ώστε: για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leqslant g$ σχεδόν παντού. Τότε, οι $f_n$ και η $f$ είναι ολοκληρώσιμες, και*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\lambda = \int f \, d\lambda. \tag{2.2.76}$$

*Απόδειξη.* Αφού $|f_n| \leqslant g$ και η $g$ είναι ολοκληρώσιμη, κάθε $f_n$ είναι ολοκληρώσιμη, από την παρατήρηση (ε). Η $f$ είναι μετρήσιμη ως όριο (σχεδόν παντού) μετρήσιμων συναρτήσεων, και

$$|f_n| \leqslant g \Longrightarrow |f| \leqslant g. \tag{2.2.77}$$

Άρα, η $f$ είναι ολοκληρώσιμη.

Για να δείξουμε την σύγκλιση της ακολουθίας των ολοκληρωμάτων, θα εφαρμόσουμε το Λήμμα του Fatou για τις ακολουθίες μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων $(g + f_n)$ και $(g - f_n)$ (παρατηρήστε ότι $|f_n| \leqslant g \Longrightarrow -g \leqslant f_n \leqslant g$).

Αφού $g + f_n \to g + f$ και $g - f_n \to g - f$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \int_E g \, d\lambda + \int_E f \, d\lambda &= \int_E (g+f) \, d\lambda \leqslant \liminf_n \int_E (g + f_n) \, d\lambda \\ &= \int_E g \, d\lambda + \liminf_n \int_E f_n \, d\lambda \end{aligned} \tag{2.2.78}$$

και

$$\begin{aligned} \int_E g \, d\lambda - \int_E f \, d\lambda &= \int_E (g-f) \, d\lambda \leqslant \liminf_n \int_E (g - f_n) \, d\lambda \\ &= \int_E g \, d\lambda - \limsup_n \int_E f_n \, d\lambda. \end{aligned} \tag{2.2.79}$$

Άρα,

$$\limsup_n \int_E f_n \, d\lambda \leqslant \int_E f \, d\lambda \leqslant \liminf_n \int_E f_n \, d\lambda, \tag{2.2.80}$$

το οποίο μας δίνει το συμπέρασμα. □

**Πόρισμα 2.2.29** (θεώρημα φραγμένης σύγκλισης)**.** *Έστω $E$ μετρήσιμο σύνολο με $\lambda(E) < +\infty$ και έστω $(f_n)$ ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων στο $E$. Υποθέτουμε ότι $f_n \to f$ και ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f_n| \leqslant M$ στο $E$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε,*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\lambda = \int f \, d\lambda. \tag{2.2.81}$$

*Απόδειξη.* Αφού $\lambda(E) < +\infty$, η σταθερή συνάρτηση $g \equiv M$ είναι ολοκληρώσιμη στο $E$. Επομένως, μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης. □

**Πόρισμα 2.2.30.** *Έστω $f:\mathbb{R}\to[-\infty,+\infty]$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε, η συνάρτηση*

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f := \int_{(-\infty,x]} f\,d\lambda \tag{2.2.82}$$

*είναι συνεχής.*

*Απόδειξη.* Γράφουμε $F(x)=\int f\cdot\chi_{(-\infty,x]}$. Παρατηρούμε ότι αν $x_n\to x$ τότε

$$f(y)\chi_{(-\infty,x_n]}(y)\to f(y)\chi_{(-\infty,x]}(y) \tag{2.2.83}$$

για κάθε $y\neq x$ (εξηγήστε γιατί). Επίσης,

$$|f\cdot\chi_{(-\infty,x_n]}|\leqslant |f| \tag{2.2.84}$$

για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης, $F(x_n)\to F(x)$. Αυτό αποδεικνύει ότι η $F$ είναι συνεχής. □

**Παραδείγματα 2.2.31.** (α) Αν η $f:E\to[-\infty,+\infty]$ είναι ολοκληρώσιμη και $(E_n)$ είναι μία αύξουσα ακολουθία μετρήσιμων συνόλων με $E_n\nearrow E$, τότε

$$\int_E f\,d\lambda=\lim_{n\to\infty}\int_{E_n} f\,d\lambda. \tag{2.2.85}$$

Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $f\chi_{E_n}\to f$ και $|f\chi_{E_n}|\leqslant|f|$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Κατόπιν, εφαρμόζουμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης.

(β) Έστω $f:[0,1]\to[-\infty,+\infty]$ ολοκληρώσιμη. Τότε, για κάθε $n\in\mathbb{N}$, η $f_n(x)=x^nf(x)$ είναι ολοκληρώσιμη, και

$$\int_0^1 x^nf(x)\to 0. \tag{2.2.86}$$

Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $|x^nf(x)|\leqslant|f(x)|$ στο $[0,1]$ και ότι $f_n(x)=x^nf(x)\to 0$ σχεδόν παντού (για όλα τα $x\neq 1$ με $f(x)\neq\pm\infty$), και μετά να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης.

## 2.3 Ασκήσεις

### Ομάδα Α′

**1.** Αν η $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη, τότε η $f'$ είναι μετρήσιμη.

**2.** (α) Αν $A\subseteq\mathbb{R}^d$ με $\lambda(A)=0$, δείξτε ότι κάθε συνάρτηση $f:A\to[-\infty,+\infty]$ είναι μετρήσιμη.

(β) Έστω $A,B$ μετρήσιμα σύνολα με $\lambda(B)=0$ και έστω $f:A\cup B\to[-\infty,+\infty]$ μια συνάρτηση της οποίας ο περιορισμός $f|_A$ στο $A$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η $f$ είναι μετρήσιμη.

(γ) Αν το $A\subseteq\mathbb{R}^d$ είναι μετρήσιμο σύνολο και η $f:A\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής σχεδόν παντού στο $A$, δείξτε ότι η $f$ είναι μετρήσιμη.

**3.** (α) Δώστε παράδειγμα μη μετρήσιμης συνάρτησης $f$ με την ιδιότητα η $f^2$ να είναι μετρήσιμη.

(β) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^d$ μετρήσιμο και έστω $f : A \to \mathbb{R}$. Αν η $f^2$ είναι μετρήσιμη και το σύνολο $\{x \in A : f(x) > 0\}$ είναι μετρήσιμο, δείξτε ότι η $f$ είναι μετρήσιμη.

**4.** Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^d$ μετρήσιμο και $f_n : A \to [-\infty, +\infty]$, $n \in \mathbb{N}$, ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων. Δείξτε ότι το σύνολο

$$L = \{x \in A : \text{ η ακολουθία } (f_n(x))_{n=1}^{\infty} \text{ συγκλίνει }\}$$

είναι μετρήσιμο.

**5.** Έστω $A$ μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ και έστω $f : A \to [-\infty, +\infty]$ συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: Για κάθε $q \in \mathbb{Q}$, το σύνολο $\{x \in A : f(x) > q\}$ είναι μετρήσιμο. Δείξτε ότι η $f$ είναι μετρήσιμη.

**6.** Έστω $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι αν το $B \subseteq \mathbb{R}$ είναι σύνολο Borel, τότε το $f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \in B\}$ είναι μετρήσιμο.

**7.** Έστω $A$ μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda(A) < \infty$ και έστω $f : A \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε $\omega_f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$\omega_f(t) = \lambda(\{x \in A : f(x) > t\}).$$

(α) Δείξτε ότι η $\omega_f$ είναι φθίνουσα και συνεχής από δεξιά. Σε ποιά σημεία είναι ασυνεχής;

(β) Αν οι $f_k, f : A \to \mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμες και $f_k \uparrow f$, δείξτε ότι $\omega_{f_k} \uparrow \omega_f$.

**8.** Έστω $A$ μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση και $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ αύξουσα συνάρτηση. Δείξτε ότι η $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη.

**9.** Έστω $f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε $F : [0, \infty) \to [0, \infty]$ με $F(t) = \lambda(\{f > t\})$. Δείξτε ότι η $F$ είναι φθίνουσα, συνεχής από δεξιά, και $\lim_{t \to +\infty} F(t) = 0$.

**10.** Υποθέτουμε ότι $f$ και $f_n$, $n \in \mathbb{N}$, είναι μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις, $f_n \searrow f$, και υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $\int f_k \, d\lambda < \infty$. Δείξτε ότι

$$\int f \, d\lambda = \lim_{n \to \infty} \int f_n \, d\lambda.$$

**11.** Έστω $f$ μετρήσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $f > 0$ σ.π. Αν $\int_E f \, d\lambda = 0$ για κάποιο μετρήσιμο σύνολο $E$, δείξτε ότι $\lambda(E) = 0$.

**12.** Έστω $f$ μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} f \, d\lambda = \lim_{n \to \infty} \int_{-n}^{n} f \, d\lambda = \lim_{n \to \infty} \int_{\{f \geqslant 1/n\}} f \, d\lambda.$$

**13.** Έστω $f$ μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} f \, d\lambda = \lim_{n \to \infty} \int_{\{f \leqslant n\}} f \, d\lambda.$$

**14.** Έστω $f$ μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Είναι σωστό ότι $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$;

**15.** Έστω $f$ μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η $f$ είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k \lambda(\{f > 2^k\}) < \infty.$$

**16.** Έστω $f$ μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει μετρήσιμο σύνολο $E$ με $\lambda(E) < \infty$, ώστε
$$\int_E f\,d\lambda > \int f\,d\lambda - \varepsilon.$$
Επιπλέον, δείξτε ότι το $E$ μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε η $f$ να είναι φραγμένη στο $E$.

**17.** Έστω $f$ μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η συνάρτηση $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f\,d\lambda$ είναι συνεχής.

**18.** Έστω $f$ μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν $\lambda(E) < \delta$ τότε $\int_E f\,d\lambda < \varepsilon$.

**19.** Θεωρώντας τις συναρτήσεις $f_n = \chi_{[n,n+1)}$ δείξτε ότι στο Λήμμα του Fatou η ανισότητα μπορεί να είναι γνήσια.

**20.** Έστω $(f_n)$ μια ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων. Είναι σωστό ότι
$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n\,d\lambda \leqslant \int \left(\limsup_{n\to\infty} f_n\right) d\lambda;$$
Αν προσθέσουμε την υπόθεση ότι η $(f_n)$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη;

**21.** Έστω $f$ και $f_n$, $n \in \mathbb{N}$, μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις με $f_n \leqslant f$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $f_n \to f$. Δείξτε ότι
$$\int f\,d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int f_n\,d\lambda.$$

**22.** Έστω $f$ και $f_n$, $n \in \mathbb{N}$, μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις με $f_n \to f$ και
$$\lim_{n\to\infty} \int f_n\,d\lambda = \int f\,d\lambda < \infty.$$
Δείξτε ότι
$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n\,d\lambda = \int_E f\,d\lambda$$
για κάθε μετρήσιμο σύνολο $E$. Δώστε παράδειγμα που να δείχνει ότι αυτό δεν ισχύει αν $\int f\,d\lambda = \infty$. [*Υπόδειξη:* Θεωρήστε τα $\int_E f\,d\lambda$ και $\int_{E^c} f\,d\lambda$.]

**23.** Έστω $(f_n)$ ακολουθία Lebesgue ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στο $[a,b]$. Αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα, δείξτε ότι η $f$ είναι ολοκληρώσιμη και ότι $\int_a^b |f_n - f|\,d\lambda \to 0$.

**24.** Δείξτε ότι
$$\int_0^\infty e^{-x}dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx = 1.$$

**25.** Υπολογίστε το $\lim_{n\to\infty} \int_0^n (1-(x/n))^n e^{x/2}dx$ (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

**26.** Έστω ότι οι $f, f_n$ είναι ολοκληρώσιμες και $f_n \nearrow f$. Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $\int f_n \, d\lambda \to \int f \, d\lambda$;

**27.** Έστω $f, f_n$ ολοκληρώσιμες. Αν $\int |f_n - f| \, d\lambda \to 0$, δείξτε ότι $\int f_n \, d\lambda \to \int f \, d\lambda$ και $\int |f_n| \, d\lambda \to \int |f| \, d\lambda$.

**28.** Έστω $f, f_n$ ολοκληρώσιμες. Αν $\int |f_n - f| \, d\lambda \to 0$, δείξτε ότι $\int_E f_n \, d\lambda \to \int_E f \, d\lambda$ για κάθε μετρήσιμο σύνολο $E$, και $\int f_n^+ \, d\lambda \to \int f^+ \, d\lambda$.

**29.** Έστω $f$ μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η $f$ είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν $\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k \lambda(\{|f| > 2^k\}) < \infty$.

**30.** Έστω $(f_n)$, $(g_n)$ και $g$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι $|f_n| \leqslant g_n$, $f_n \to f$, $g_n \to g$ (όλα αυτά σχεδόν παντού) και ότι $\int g_n \, d\lambda \to \int g \, d\lambda$. Δείξτε ότι η $f$ είναι ολοκληρώσιμη και ότι $\int f_n \, d\lambda \to \int f \, d\lambda$.

**31.** Έστω $(f_n)$, $f$ ολοκληρώσιμες και έστω ότι $f_n \to f$ σχεδόν παντού. Δείξτε ότι $\int |f_n - f| \, d\lambda \to 0$ αν και μόνο αν $\int |f_n| \, d\lambda \to \int |f| \, d\lambda$.

**32.** Έστω $(f_n)$ ακολουθία ολοκληρώσιμων συναρτήσεων. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ολοκληρώσιμη συνάρτηση $g$ ώστε $|f_n| \leqslant g$ σχεδόν παντού για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι

$$\int \Big(\liminf_n f_n\Big) \, d\lambda \leqslant \liminf_n \int f_n \, d\lambda \leqslant \limsup_n \int f_n \, d\lambda \leqslant \int \Big(\limsup_n f_n\Big) \, d\lambda.$$

**33.** Έστω $f$ μετρήσιμη και σχεδόν παντού πεπερασμένη στο $[0,1]$.

(α) Αν $\int_E f \, d\lambda = 0$ για κάθε μετρήσιμο $E \subset [0,1]$ με $\lambda(E) = 1/2$, δείξτε ότι $f = 0$ σχεδόν παντού στο $[0,1]$.

(β) Αν $f > 0$ σχεδόν παντού, δείξτε ότι

$$\inf\left\{ \int_E f \, d\lambda : \lambda(E) \geqslant \frac{1}{2} \right\} > 0.$$

**34.** Έστω $f_n : E \to \mathbb{R}$ ακολουθία ολοκληρώσιμων συναρτήσεων με $\sum_{n=1}^{\infty} \int_E |f_n| \, d\lambda < +\infty$. Δείξτε ότι:

(α) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ συγκλίνει σχεδόν για κάθε $x \in E$.

(β) Η συνάρτηση $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ είναι ολοκληρώσιμη και

$$\int \left( \sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \, d\lambda.$$

**35.** (α) Αν $f \geqslant 0$ σχεδόν παντού στο $E$ και αν $f_n = \min\{f, n\}$, δείξτε ότι $\int_E f_n \, d\lambda \to \int_E f \, d\lambda$.

(β) Αν η $f$ είναι ολοκληρώσιμη στο $E$ και $f_n = \max\{\min\{n, f\}, -n\}$, δείξτε ότι $\int_E f_n \, d\lambda \to \int_E f \, d\lambda$.

**36.** Έστω $k, n \in \mathbb{N}$ με $k \leqslant n$ και $E_1, \ldots, E_n$ μετρήσιμα υποσύνολα του $[0,1]$ με την εξής ιδιότητα: κάθε $x \in [0,1]$ ανήκει σε τουλάχιστον $k$ από τα $E_1, E_2, \ldots, E_n$. Δείξτε ότι υπάρχει $i \leqslant n$ ώστε $\lambda(E_i) \geqslant k/n$.

**Ομάδα Β΄**

**37.** (α) Δείξτε ότι αν η $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και η $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι Borel μετρήσιμη, τότε η $h\circ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι Borel μετρήσιμη.

(β) Χρησιμοποιώντας την συνάρτηση Cantor–Lebesgue βρείτε μια συνεχή συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και μια Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε η $h\circ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ να μην είναι Lebesgue μετρήσιμη.

**38.** Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση.

(α) Δείξτε ότι η $f$ απεικονίζει $F_\sigma$-σύνολα σε $F_\sigma$-σύνολα.

(β) Δείξτε ότι η $f$ απεικονίζει μετρήσιμα σύνολα σε μετρήσιμα σύνολα αν και μόνο αν για κάθε $A\subset[a,b]$ με $\lambda(A)=0$ ισχύει $\lambda(f(A))=0$.

**39.** (α) Έστω $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις και έστω $\alpha\in\mathbb{R}$. Δείξτε ότι: αν $\sum_{n=1}^\infty\lambda(\{x:f_n(x)>\alpha\})<\infty$, τότε υπάρχει $Z\subset\mathbb{R}$ με $\lambda(Z)=0$ ώστε $\limsup\limits_{n\to\infty}f_n(x)\leqslant\alpha$ για κάθε $x\notin Z$.

(β) Έστω $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις και έστω $\varepsilon_n\to 0^+$. Δείξτε ότι: αν $\sum_{n=1}^\infty\lambda(\{x:f_n(x)>\varepsilon_n\})<\infty$, τότε υπάρχει $Z\subset\mathbb{R}$ με $\lambda(Z)=0$ ώστε $f_n(x)\to 0$ για κάθε $x\notin Z$.

**40.** Έστω $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία $(\alpha_n)$ θετικών πραγματικών αριθμών και υπάρχει $Z\subset\mathbb{R}$ με $\lambda(Z)=0$ ώστε $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f_n(x)}{\alpha_n}=0$ για κάθε $x\notin Z$.

**41.** Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Αν η $f$ είναι $t$-περιοδική και $s$-περιοδική για κάποιους $t,s>0$ με $t/s\notin\mathbb{Q}$, δείξτε ότι η $f$ είναι σχεδόν παντού σταθερή.

**42.** Έστω $E\subseteq\mathbb{R}$ μετρήσιμο. Δείξτε ότι κάθε μετρήσιμη συνάρτηση $f:E\to\mathbb{R}$ είναι κατά σημείο όριο μιας ακολουθίας συνεχών συναρτήσεων $f_n:E\to\mathbb{R}$.

**43.** Έστω $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ χωριστά συνεχής συνάρτηση: για κάθε $x\in\mathbb{R}$ η $f_x(y):=f(x,y)$ είναι συνεχής και για κάθε $y\in\mathbb{R}$ η $f^y(x):=f(x,y)$ είναι συνεχής. Δείξτε ότι η $f$ είναι μετρήσιμη.

**44.** Δείξτε ότι υπάρχει μετρήσιμη συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα: αν η $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ είναι σχεδόν παντού ίση με την $f$ τότε η $g$ είναι ασυνεχής σε κάθε $x\in[0,1]$.

**45.** Έστω $(f_n)$ ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x\in[0,1]$ ισχύει $\sup_n|f_n(x)|\,d\lambda<\infty$. Δείξτε ότι: για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχουν $A\subseteq[0,1]$ μετρήσιμο και $M>0$ ώστε $\lambda([0,1]\setminus A)<\varepsilon$ και, για κάθε $x\in A$, $\sup_n|f_n(x)|\leqslant M$.

**46.** Έστω $\{I_n\}$ ακολουθία κλειστών διαστημάτων $I_n\subseteq[0,1]$. Συμβολίζουμε με $f_n$ την χαρακτηριστική συνάρτηση του $I_n$.

(α) Αν $\lambda(I_n)\leqslant\frac{1}{n^2}$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$, δείξτε ότι $f_n(x)\to 0$ σχεδόν παντού.

(β) Εξετάστε αν ισχύει το ίδιο με την υπόθεση ότι $\lambda(I_n)\leqslant\frac{1}{n}$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

**47.** Σταθεροποιούμε $0<a<b$ και ορίζουμε $f_n(x)=ae^{-nax}-ne^{-nbx}$. Δείξτε ότι

$$\sum_{n=1}^\infty\int_0^\infty|f_n|\,d\lambda=\infty$$

και

$$\int_0^\infty\left(\sum_{n=1}^\infty f_n\right)d\lambda\neq\sum_{n=1}^\infty\int_0^\infty f_n\,d\lambda.$$

**48.** Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x^{-1/2}$ αν $0<x<1$ και $f(x)=0$ αλλιώς. Θεωρούμε μια αρίθμηση $\{q_n : n\in\mathbb{N}\}$ των ρητών, και θέτουμε $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(x-q_n)}{2^n}$.

(α) Δείξτε ότι η $g$ είναι ολοκληρώσιμη. Ειδικότερα, $|g|<\infty$ σχεδόν παντού.

(β) Δείξτε ότι η $g$ είναι ασυνεχής σε κάθε σημείο και δεν είναι φραγμένη σε κανένα διάστημα. Τα παραπάνω ισχύουν ακόμα κι αν μεταβάλλουμε τις τιμές της $g$ σε οποιοδήποτε σύνολο μηδενικού μέτρου Lebesgue.

(γ) Δείξτε ότι $g^2<\infty$ σχεδόν παντού, αλλά η $g^2$ δεν είναι ολοκληρώσιμη σε κανένα διάστημα.

**49.** Έστω $A$ Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $0<\lambda(A)<\infty$. Αν $f:A\to\mathbb{R}$ είναι μια γνησίως θετική μετρήσιμη συνάρτηση, δείξτε ότι: για κάθε $t>0$ υπάρχει $\delta>0$ ώστε, αν $E$ είναι Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $A$ με $\lambda(E)>t$ τότε $\int_E f\,d\lambda\geqslant\delta$.

**50.** Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο 0. Αν η $f$ είναι ολοκληρώσιμη, δείξτε ότι, για κάθε $n\in\mathbb{N}$ η συνάρτηση $f_n(x)=f(x^n)$ είναι ολοκληρώσιμη.

**51.** Έστω $f$ μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο $[0,1]$. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\sqrt[n]{f(x)}\,d\lambda(x)=\lambda(\{x:f(x)>0\}).$$

**52.** Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση, η οποία είναι γνήσια θετική σχεδόν παντού. Έστω $(A_n)$ ακολουθία μετρήσιμων υποσυνόλων του $[0,1]$ με την ιδιότητα

$$\lim_{n\to\infty}\int_{A_n}f(x)\,d\lambda(x)=0.$$

Δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty}\lambda(A_n)=0$.

**53.** Έστω $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Για $x>0$ ορίζουμε $g(x)=\int_0^\infty f(t)e^{-xt}\,d\lambda(t)$. Δείξτε ότι η $g$ είναι συνεχής και ότι $\lim_{x\to+\infty}g(x)=0$.

**54.** Έστω $f:[0,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Για κάθε $0<x\leqslant b$ ορίζουμε $g(x)=\int_x^b\frac{f(t)}{t}\,d\lambda(t)$. Δείξτε ότι η $g$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,b]$ και $\int_0^b g(x)\,d\lambda(x)=\int_0^b f(t)\,d\lambda(t)$.

**55.** Έστω $E\subset\mathbb{R}^d$ με $\lambda(E)<\infty$ και έστω $f,g:E\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις με

$$\int_E f\,d\lambda=\int_E g\,d\lambda.$$

Δείξτε ότι είτε (α) $f=g$ σχεδόν παντού στο $E$ είτε (β) υπάρχει μετρήσιμο $A\subset E$ τέτοιο ώστε

$$\int_A f\,d\lambda<\int_A g\,d\lambda.$$

**56.** Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι για κάποιο κλειστό σύνολο $A\subset\mathbb{R}$ ισχύει το εξής: για κάθε $E\subset[0,1]$ με $\lambda(E)>0$ ισχύει

$$t_E:=\frac{1}{\lambda(E)}\int_E f\,d\lambda\in A.$$

Δείξτε ότι το σύνολο $Z=\{x\in[0,1]:f(x)\notin A\}$ έχει μέτρο μηδέν.

**57.** Έστω $f, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t) - f_n(t)|\, d\lambda(t) \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

Δείξτε ότι $f_n \to f$ σχεδόν παντού.

**58.** Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις που ικανοποιούν τα εξής:

(α) Υπάρχει μη αρνητική ολοκληρώσιμη $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ ώστε: για κάθε $n$ ισχύει $|f_n| \leqslant h$ σχεδόν παντού.

(β) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ ισχύει

$$\int_{[0,1]} f_n g\, d\lambda \to 0.$$

Δείξτε ότι: για κάθε Borel σύνολο $A \subset [0,1]$,

$$\int_A f_n\, d\lambda \to 0.$$

**59.** Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε $f_n \to 0$ σχεδόν παντού, και

$$\int_{[0,1]} |f(x)|^2 d\lambda(x) \leqslant 10$$

για κάθε $n$. Δείξτε ότι

$$\int_{[0,1]} |f(x)|\, d\lambda(x) \to 0.$$

**60.** Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Υπολογίστε το

$$\lim_{n\to\infty} n \int_{\mathbb{R}} \ln\left(1 + \frac{|f(x)|^2}{n^2}\right) d\lambda(x).$$

**61.** Έστω $f : [0,1] \to [1,\infty)$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\int_{[0,1]} f \ln f\, d\lambda \geqslant \int_{[0,1]} f\, d\lambda \cdot \int_{[0,1]} \ln f\, d\lambda.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

# Ολοκλήρωμα Riemann και Ολοκλήρωμα Lebesgue

## 3.1 Σύγκριση του ολοκληρώματος Lebesgue με το ολοκλήρωμα Riemann

Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Θα γράφουμε $(R)\int_a^b f$ για το ολοκλήρωμα Riemann και $(L)\int_a^b f$ για το ολοκλήρωμα Lebesgue της $f$ (αν αυτά υπάρχουν). Όπως δείχνει το θεώρημα που ακολουθεί, το ολοκλήρωμα Lebesgue επεκτείνει το ολοκλήρωμα Riemann.

**Θεώρημα 3.1.1.** *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε,*

(i) *Η $f$ είναι μετρήσιμη.*

(ii) *Η $f$ είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη και*

$$(L)\int_a^b f = (R)\int_a^b f. \tag{3.1.1}$$

*Απόδειξη.* Θα χρησιμοποιήσουμε τα εξής:

(i) Το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης.

(ii) Αν $h \geqslant 0$ μετρήσιμη και $\int_E h = 0$, τότε $h = 0$ σχεδόν παντού στο $E$. Επομένως, αν $f \leqslant g$ και $\int_E f = \int_E g$, τότε $f = g$ σχεδόν παντού στο $E$.

(iii) Αν $s = \sum_{i=1}^{m} t_i \chi_{[a_i,b_i]}$ είναι μια κλιμακωτή συνάρτηση, τότε

$$(L)\int_a^b f = (R)\int_a^b f. \tag{3.1.2}$$

Υποθέτουμε ότι η $f$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Τότε, υπάρχει ακολουθία $(P_n)$ διαμερίσεων του $[a,b]$ με τις εξής ιδιότητες: $P_n \subset P_{n+1}$ (η $P_{n+1}$ είναι εκλέπτυνση της $P_n$), $\|P_n\| \to 0$ (τα πλάτη των διαμερίσεων $P_n$ τείνουν στο 0), και

$$L(f,P_n) \to (R)\int_a^b f \;\;,\;\; U(f,P_n) \to (R)\int_a^b f. \tag{3.1.3}$$

Έστω $\ell_n$ η κλιμακωτή συνάρτηση με $\int_a^b \ell_n = L(f,P_n)$ (δηλαδή, αν $L(f,P_n) = \sum_{i=0}^{k-1} m_i(x_{i+1}-x_i)$ τότε $\ell_n = \sum_{i=0}^{k-1} m_i\chi_{[x_i,x_{i+1})}$) και $u_n$ η αντίστοιχη κλιμακωτή συνάρτηση με $\int_a^b u_n = U(f,P_n)$. Τότε,

$$\ell_n \leqslant f \leqslant u_n. \tag{3.1.4}$$

Από την $P_n \subset P_{n+1}$ έπεται ότι η $(\ell_n)$ είναι αύξουσα και η $(u_n)$ φθίνουσα, οπότε ορίζονται οι συναρτήσεις $\ell = \lim_n \ell_n$ και $u = \lim_n u_n$, και $\ell \leqslant f \leqslant u$. Από το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης,

$$(L)\int_a^b u = \lim_n \int_a^b u_n = \lim_n U(f,P_n) = (R)\int_a^b f \tag{3.1.5}$$

και

$$(L)\int_a^b \ell = \lim_n \int_a^b \ell_n = \lim_n L(f,P_n) = (R)\int_a^b f. \tag{3.1.6}$$

Αφού $\ell \leqslant u$ και $\int_a^b \ell = \int_a^b u$, συμπεραίνουμε ότι $\ell = u$ σχεδόν παντού. Αφού $\ell \leqslant f \leqslant u$, προκύπτει ότι

$$\ell = f = u \;\; \sigma.\pi. \tag{3.1.7}$$

Άρα, η $f$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση ως όριο (σχεδόν παντού) ακολουθίας μετρήσιμων συναρτήσεων. Αυτό αποδεικνύει το (i).

Αφού η $f$ είναι μετρήσιμη και φραγμένη, η $f$ είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη. Τέλος,

$$(L)\int_a^b f = (L)\int_a^b u = (R)\int_a^b f, \tag{3.1.8}$$

δηλαδή έχουμε αποδείξει το (ii). □

*Σημείωση.* Όπως έχουμε ήδη δεί, η κλάση των φραγμένων Lebesgue ολοκληρώσιμων $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι γνήσια μεγαλύτερη από την κλάση των Riemann ολοκληρώσιμων $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Τα παραδείγματα που ακολουθούν δείχνουν ότι η περίπτωση του γενικευμένου ολοκληρώματος Riemann είναι διαφορετική:

**Παράδειγμα 1.** *Το γενικευμένο ολοκλήρωμα* $(IR)\int_0^\infty (\sin x/x)dx$ *υπάρχει, αλλά το ολοκλήρωμα Lebesgue* $(L)\int_0^\infty (\sin x/x)dx$ *δεν υπάρχει.*

*Απόδειξη.* Μπορούμε να γράψουμε το γενικευμένο ολοκλήρωμα Riemann σαν μια εναλλάσσουσα σειρά:

$$\begin{aligned}(IR)\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx &= \sum_{n=1}^\infty \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{\sin x}{x}dx \\ &= \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1}\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x}dx \\ &= \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1}\int_0^{\pi} \frac{|\sin x|}{x+(n-1)\pi}dx.\end{aligned}$$

Από το κριτήριο του Dirichlet, για να δείξουμε ότι αυτή η σειρά συγκλίνει αρκεί να δείξουμε ότι τα ολοκληρώματα φθίνουν στο 0 όταν $n\to\infty$. Όμως, για σταθερό $x$, η ακολουθία $|\sin x|/(x+(n-1)\pi)$ είναι προφανώς φθίνουσα, άρα η αντίστοιχη ακολουθία των ολοκληρωμάτων είναι φθίνουσα και, για κάθε $n\geqslant 2$,

$$\int_0^{\pi} \frac{|\sin x|}{x+(n-1)\pi}dx \leqslant \frac{1}{n-1}\to 0. \tag{3.1.9}$$

Αυτό αποδεικνύει ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $(IR)\int_0^\infty(\sin x/x)dx$ υπάρχει.

Αν το ολοκλήρωμα Lebesgue υπήρχε, θα έπρεπε να ισχύει ότι

$$(L)\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x}dx < +\infty. \tag{3.1.10}$$

Όμως, χρησιμοποιώντας το θεώρημα μονότονης σύγκλισης βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}(L)\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x}dx &= \sum_{n=1}^\infty \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x}dx \\ &\geqslant \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi} |\sin x|dx = \infty.\end{aligned}$$

Άρα, η $\sin x/x$ δεν είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $[0,+\infty)$. □

**Παράδειγμα 2**. Θεωρούμε την συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=0$ αν $x<0$, και

$$f(x)=\frac{(-1)^n}{n+1} \quad \text{αν} \quad x\in[n,n+1),\ n=0,1,2,\dots. \tag{3.1.11}$$

Το γενικευμένο ολοκλήρωμα Riemann της $f$

$$(IR)\int_0^\infty f(x)dx := \lim_{b\to+\infty}\int_0^b f(x)dx \tag{3.1.12}$$

υπάρχει: είναι ίσο με

$$(IR)\int_0^\infty f(x)dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n+1} \tag{3.1.13}$$

(η τελευταία σειρά συγκλίνει). Όμως,

$$(L)\int_0^\infty |f| = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n+1} = +\infty, \tag{3.1.14}$$

άρα η $f$ δεν είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη. □

Τέτοια προβλήματα δεν εμφανίζονται αν η συνάρτηση που μελετάμε είναι μη αρνητική.

**Θεώρημα 3.1.2.** *Αν $f \geqslant 0$ και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $(IR)\int_{-\infty}^\infty f$ υπάρχει, τότε η $f$ είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη, και*

$$(IR)\int f = (L)\int f. \tag{3.1.15}$$

*Απόδειξη.* Παρατηρούμε ότι η ακολουθία συναρτήσεων $f_n = f\,\chi_{[-n,n]}$ αυξάνει προς την $f$. Κάθε $f_n$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη (στο $[-n,n]$), επομένως μετρήσιμη. Άρα, η $f$ είναι μετρήσιμη. Επίσης,

$$(L)\int f_n = (R)\int_{-n}^n f(x)dx \tag{3.1.16}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή κάθε $f_n$ είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη. Από την υπόθεση, υπάρχει το όριο

$$\lim_{n\to\infty}(R)\int_{-n}^n f(x)dx = (IR)\int_{-\infty}^\infty f(x)dx. \tag{3.1.17}$$

Από την άλλη πλευρά, το θεώρημα μονότονης σύγκλισης δείχνει ότι

$$\lim_{n\to\infty}(L)\int f_n = (L)\int f. \tag{3.1.18}$$

Άρα, η $f$ είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη και

$$(IR)\int f = (L)\int f. \tag{3.1.19}$$

□

*Σημείωση.* Ανάλογα αποτελέσματα ισχύουν για γενικευμένα ολοκληρώματα κάθε είδους (για παράδειγμα, σε ανοικτό φραγμένο διάστημα).

Κλείνουμε αυτήν την παράγραφο με έναν χαρακτηρισμό των Riemann ολοκληρώσιμων $f : [a,b] \to \mathbb{R}$: είναι εκείνες οι φραγμένες συναρτήσεις που είναι συνεχείς σχεδόν παντού. Πριν δώσουμε την ακριβή διατύπωση και την απόδειξη, πρέπει να τονίσουμε ότι η συνθήκη «συνεχής σχεδόν παντού» είναι τελείως διαφορετική από την «σχεδόν παντού ίση με συνεχή συνάρτηση». Για παράδειγμα, η χαρακτηριστική συνάρτηση $\chi_{\mathbb{Q}} : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι σχεδόν παντού ίση με την συνεχή (σταθερή) μηδενική συνάρτηση, αλλά δεν είναι συνεχής σε κανένα σημείο του $[a,b]$. Από την άλλη πλευρά, η $\chi_{[0,1/2]} : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής σχεδόν παντού (παντού εκτός από το σημείο $1/2$) αλλά δεν είναι σχεδόν παντού ίση με καμμία συνεχή $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ (εξηγήστε γιατί). Αυτά τα παραδείγματα δείχνουν ότι οι δύο συνθήκες δεν συγκρίνονται.

**Θεώρημα 3.1.3.** *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Η $f$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν*

$$\lambda(\{x \in [a, b] : \text{ η } f \text{ είναι ασυνεχής στο } x\}) = 0. \tag{3.1.20}$$

*Απόδειξη.* Υποθέτουμε πρώτα ότι η $f$ είναι συνεχής σχεδόν παντού. Επιλέγουμε ακολουθία $(P_n)$ διαμερίσεων του $[a, b]$ με $P_n \subset P_{n+1}$, $\|P_n\| \to 0$, και θα δείξουμε ότι $U(f, P_n) - L(f, P_n) \to 0$.

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $\ell_n, u_n$ που αντιστοιχούν στην $P_n$, με $\ell_n \leqslant f \leqslant u_n$, $\int_a^b \ell_n = L(f, P_n)$ και $\int_a^b u_n = U(f, P_n)$. Δηλαδή, αν $P_n = \{a = x_0 < \cdots < x_k = b\}$ ορίζουμε

$$\ell_n = \sum_{i=0}^{k-1} m_i \chi_{[x_i, x_{i+1})} \text{ και } u_n = \sum_{i=0}^{k-1} M_i \chi_{[x_i, x_{i+1})}. \tag{3.1.21}$$

Τότε, $\ell_n \nearrow \ell$ και $u_n \searrow u$, όπου $\ell \leqslant f \leqslant u$.

Οι $\ell_n, u_n$ είναι μετρήσιμες και ομοιόμορφα φραγμένες (από το supremum και το infimum της $f$ στο $[a, b]$). Από το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης βλέπουμε ότι

$$\int_a^b \ell_n \to \int_a^b \ell \text{ και } \int_a^b u_n \to \int_a^b u. \tag{3.1.22}$$

Δηλαδή,

$$L(f, P_n) \to \int_a^b \ell \text{ και } U(f, P_n) \to \int_a^b u. \tag{3.1.23}$$

Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\int_a^b \ell = \int_a^b u. \tag{3.1.24}$$

Αυτό ισχύει για τον εξής λόγο: αν $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$ και αν $A$ είναι το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της $f$ στο $[a, b]$, τότε για κάθε $x \in [a, b] \setminus (A \cup P)$ έχουμε $\ell(x) = u(x)$. Πράγματι: έστω $x \in [a, b] \setminus (A \cup P)$ και έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η $f$ είναι συνεχής στο $x$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $y, z \in (x - \delta, x + \delta)$ τότε $|f(y) - f(z)| < \varepsilon$. Επιλέγουμε $n_0$ για το οποίο $\|P_{n_0}\| < \delta$. Αν $[x_i, x_{i+1}]$ είναι το υποδιάστημα της $P_{n_0}$ στο οποίο ανήκει το $x$, τότε $[x_i, x_{i+1}] \subseteq (x - \delta, x + \delta)$, άρα

$$M_i - m_i = \sup\{f(y) : y \in [x_i, x_{i+1}]\} - \inf\{f(z) : z \in [x_i, x_{i+1}]\} \leqslant \varepsilon, \tag{3.1.25}$$

δηλαδή $0 \leqslant u_{n_0}(x) - \ell_{n_0}(x) \leqslant \varepsilon$. Ακόμα,

$$0 \leqslant u(x) - \ell(x) \leqslant u_{n_0}(x) - \ell_{n_0}(x) \leqslant \varepsilon. \tag{3.1.26}$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται ότι $u(x) = \ell(x)$. Άρα, $\ell = u$ σχεδόν παντού, το οποίο δείχνει ότι $\int_a^b \ell = \int_a^b u$.

Αντίστροφα: Υποθέτουμε ότι η $f$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Επιλέγουμε ακολουθία διαμερίσεων $(P_n)_n$ με $P_n \subseteq P_{n+1}$ για κάθε $n$ και

$$L(f, P_n) \to \int_a^b f \ , \ U(f, P_n) \to \int_a^b f. \tag{3.1.27}$$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, θεωρούμε τις κλιμακωτές συναρτήσεις $\ell_n$ και $u_n$ που αντιστοιχούν στην $P_n$, με $\ell_n \leqslant f \leqslant u_n$ και

$$\int_a^b \ell_n = L(f, P_n)\ ,\ \int_a^b u_n = U(f, P_n). \tag{3.1.28}$$

Η ακολουθία $(\ell_n)$ είναι αύξουσα και η $(u_n)$ είναι φθίνουσα. Έστω $\ell = \lim_n \ell_n$ και $u = \lim_n u_n$. Τότε $\ell \leqslant f \leqslant u$ και από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης

$$\int_a^b \ell = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \ell_n = \lim_{n\to\infty} L(f, P_n) = \int_a^b f \tag{3.1.29}$$

και

$$\int_a^b u = \lim_{n\to\infty} \int_a^b u_n = \lim_{n\to\infty} U(f, P_n) = \int_a^b f. \tag{3.1.30}$$

Άρα,

$$\int_a^b \ell = \int_a^b u. \tag{3.1.31}$$

Αφού $\ell \leqslant u$, έπεται ότι $\ell = u$ σχεδόν παντού.

Έστω $C = \{x \in [a,b] : \ell(x) = u(x)\}$ και έστω $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$. Θα δείξουμε ότι για κάθε $x \in C \setminus P$ η $f$ είναι συνεχής στο $x$. Πράγματι: Έστω $x \in C \setminus P$ και έστω $\varepsilon > 0$. Τότε $\ell(x) = u(x)$, άρα υπάρχει $n_0$ με $0 \leqslant u_{n_0}(x) - \ell_{n_0}(x) < \varepsilon$. Αυτό σημαίνει ότι αν $(x_i, x_{i+1})$ είναι το υποδιάστημα της $P_{n_0}$ στο οποίο ανήκει το $x$, τότε

$$\sup\{f(y) : y \in [x_i, x_{i+1}]\} - \inf\{f(z) : z \in [x_i, x_{i+1}]\} < \varepsilon. \tag{3.1.32}$$

Έπεται ότι η $f$ είναι συνεχής στο $x$ (εξηγήστε γιατί).

Συμπεραίνουμε ότι αν $A$ είναι το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της $f$, τότε $A \subseteq ([a,b]\setminus C) \cup P$, άρα $\lambda(A) = 0$. □

## 3.2 Το θεώρημα παραγώγισης του Lebesgue

Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ μια Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Θεωρούμε το αόριστο ολοκλήρωμα της $f$:

$$F(x) = \int_a^x f(y)dy, \qquad a \leqslant x \leqslant b. \tag{3.2.1}$$

Γνωρίζουμε ότι αν $x \in [a,b]$ και η $f$ είναι συνεχής στο $x$ τότε η $F$ είναι παραγωγίσιμη στο $x$ και $F'(x) = f(x)$. Γνωρίζουμε επίσης ότι το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της $f$ έχει μηδενικό μέτρο Lebesgue.

Σύμφωνα με τον ορισμό της παραγώγου, η $F$ είναι παραγωγίσιμη στο $x$ αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}, \tag{3.2.2}$$

το οποίο, στην περίπτωσή μας, παίρνει την μορφή

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(y)dy = \lim_{|I|\to 0}\frac{1}{|I|}\int_I f(y)dy \tag{3.2.3}$$

αν χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό $I=(x,x+h)$ και γράψουμε $|I|$ για το μήκος του διαστήματος $I$. Θα αλλάξουμε λίγο το πλαίσιο, θεωρώντας το όριο

$$\lim_{\substack{|I|\to 0\\ x\in I}}\frac{1}{|I|}\int_I f(y)dy, \tag{3.2.4}$$

όπου, πλέον, θεωρούμε όλα τα ανοικτά διαστήματα $I$ τα οποία περιέχουν το $x$ και αφήνουμε το μήκος τους να πάει στο μηδέν. Παρατηρήστε ότι η ποσότητα $\frac{1}{|I|}\int_I f(y)dy$ είναι η μέση τιμή της $f$ στο διάστημα $I$. Πάλι, είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι, αν η $f$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, τότε

$$\lim_{\substack{|I|\to 0\\ x\in I}}\frac{1}{|I|}\int_I f(y)dy = f(x) \tag{3.2.5}$$

σε κάθε σημείο συνέχειας της $f$ (άρα, σχεδόν παντού στο $[a,b]$).

Το ερώτημα που θα μας απασχολήσει είναι το εξής: δίνεται μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ (θα γράφουμε $f\in\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^d)$). Είναι σωστό ότι

$$\lim_{\substack{\lambda(B)\to 0\\ x\in B}}\frac{1}{\lambda(B)}\int_B f(y)d\lambda(y) = f(x) \tag{3.2.6}$$

σχεδόν παντού στον $\mathbb{R}^d$; Με $B$ συμβολίζουμε ανοικτές μπάλες του $\mathbb{R}^d$: για δοθέν $x$ θεωρούμε εκείνες τις μπάλες που περιέχουν το $x$ και αφήνουμε τον όγκο τους (ισοδύναμα, την ακτίνα τους) να πάει στο μηδέν.

Παρατηρήστε ότι η (3.2.6) ισχύει σε κάθε σημείο συνέχειας της $f$. Αν υποθέσουμε ότι η $f$ είναι συνεχής στο $x$ και αν θεωρήσουμε τυχόν $\varepsilon>0$ τότε υπάρχει $\delta>0$ ώστε: αν $|y-x|<\delta$ τότε $|f(x)-f(y)|<\varepsilon/2$. Τότε, για κάθε μπάλα $B$ που περιέχει το $x$ και έχει ακτίνα μικρότερη από $\delta/2$, όλα τα $y\in B$ ικανοποιούν την $|y-x|<\delta$, απ' όπου παίρνουμε

$$\begin{aligned}\left|f(x)-\frac{1}{\lambda(B)}\int_B f(y)\,d\lambda(y)\right| &= \left|\frac{1}{\lambda(B)}\int_B (f(x)-f(y))\,d\lambda(y)\right|\\ &\leqslant \frac{1}{\lambda(B)}\int_B |f(x)-f(y)|\,d\lambda(y)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.\end{aligned}$$

Έπεται η (3.2.6).

Το βασικό αποτέλεσμα αυτής της παραγράφου είναι το **θεώρημα παραγώγισης του Lebesgue**, το οποίο δίνει κάτι πολύ ισχυρότερο.

**Θεώρημα 3.2.1** (θεώρημα παραγώγισης του Lebesgue)**.** *Αν $f\in\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^d)$ τότε*

$$\lim_{\substack{\lambda(B)\to 0\\ x\in B}}\frac{1}{\lambda(B)}\int_B f(y)d\lambda(y) = f(x) \tag{3.2.7}$$

*σχεδόν παντού ως προς το μέτρο Lebesgue $\lambda$ στον $\mathbb{R}^d$.*

Για την απόδειξη θα χρειαστεί να κάνουμε βαθύτερη μελέτη της συμπεριφοράς των μέσων τιμών μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης σε μπάλες. Στην επόμενη παράγραφο εισάγουμε τη **μεγιστική συνάρτηση** των Hardy και Littlewood και μελετάμε την συνάρτηση κατανομής της με τη βοήθεια του λήμματος κάλυψης του Vitali.

### 3.2.1 Η μεγιστική συνάρτηση των Hardy και Littlewood

**Ορισμός 3.2.2** (μεγιστική συνάρτηση)**.** Έστω $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^d)$. Ορίζουμε τη μεγιστική συνάρτηση $f^*$ της $f$ ως εξής:

$$f^*(x) = \sup_{x \in B} \frac{1}{\lambda(B)} \int_B |f(y)| \, d\lambda(y), \qquad x \in \mathbb{R}^d \tag{3.2.8}$$

όπου το supremum παίρνεται πάνω από όλες τις ανοικτές μπάλες που περιέχουν το $x$. Με λίγα λόγια, αντικαθιστούμε το (ζητούμενο) όριο των μέσων τιμών του Θεωρήματος 3.2.1 με το supremum τους, και την $f$ με την $|f|$.

Οι βασικές ιδιότητες της $f^*$ δίνονται στο επόμενο θεώρημα.

**Θεώρημα 3.2.3.** *Έστω $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^d)$. Τότε:*

(i) *Η $f^*$ είναι μετρήσιμη.*

(ii) *Ισχύει $f^*(x) < \infty$ σχεδόν παντού.*

(iii) *Για κάθε $\alpha > 0$ ισχύει*

$$\lambda(\{x \in \mathbb{R}^d : f^*(x) > \alpha\}) \leqslant \frac{C_d}{\alpha} \, \|f\|_1, \tag{3.2.9}$$

*όπου $\|f\|_1 = \int |f| d\lambda$ και $C_d = 3^d$.*

*Απόδειξη.* Δείχνουμε πρώτα ότι η $f^*$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση. Παρατηρούμε ότι, για κάθε $\alpha > 0$ το σύνολο $E_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^d : f^*(x) > \alpha\}$ είναι ανοικτό. Πράγματι, αν $f^*(x) > \alpha$ τότε υπάρχει μπάλα $B_x$ η οποία περιέχει το $x$ και για την οποία

$$\frac{1}{\lambda(B_x)} \int_{B_x} |f(y)| \, d\lambda(y) > \alpha, \tag{3.2.10}$$

και τότε, για κάθε $z \in B_x$ έχουμε

$$f^*(z) \geqslant \frac{1}{\lambda(B_x)} \int_{B_x} |f(y)| \, d\lambda(y) > \alpha, \tag{3.2.11}$$

δηλαδή $B_x \subseteq E_\alpha$.

Ο ισχυρισμός (ii) είναι συνέπεια του ισχυρισμού (iii). Παρατηρούμε ότι, για κάθε $\alpha > 0$ ισχύει

$$\{x : f^*(x) = \infty\} \subseteq \{x : f^*(x) > \alpha\}, \tag{3.2.12}$$

άρα

$$\lambda(\{x : f^*(x) = \infty\}) \leqslant \lambda(\{x : f^*(x) > \alpha\}) \leqslant \frac{C_d}{\alpha} \|f\|_1. \tag{3.2.13}$$

Αφήνοντας το $\alpha \to \infty$ συμπεραίνουμε ότι $\lambda(\{x : f^*(x) = \infty\}) = 0$.

**Παρατήρηση 3.2.4.** Η βασική ανισότητα (3.2.9) είναι μια **ασθενούς τύπου** ανισότητα, με την έννοια ότι υπολείπεται του ισχυρισμού ότι $\|f^*\|_1 \leqslant C_d\|f\|_1$. Πράγματι, αν είχαμε κάτι τέτοιο τότε, από την ανισότητα Markov, για κάθε $\alpha > 0$ θα γράφαμε

$$\lambda(\{x : f^*(x) > \alpha\}) \leqslant \frac{1}{\alpha}\|f^*\|_1 \leqslant \frac{C_d}{\alpha}\|f\|_1. \tag{3.2.14}$$

Στην πραγματικότητα, η $f^*$ δεν είναι (σχεδόν ποτέ) ολοκληρώσιμη, και η (3.2.9) είναι η καλύτερη πληροφορία που θα μπορούσαμε να πάρουμε για την κατανομή της συναρτήσει της $\|f\|_1$.

Για την απόδειξη του ισχυρισμού (iii) θα χρησιμοποιήσουμε ένα λήμμα κάλυψης του Vitali.

**Λήμμα 3.2.5.** *Έστω $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \ldots, B_N\}$ μια πεπερασμένη οικογένεια από ανοικτές μπάλες στον $\mathbb{R}^d$. Μπορούμε να βρούμε $1 \leqslant i_1, \ldots, i_k \leqslant N$ ώστε οι μπάλες $B_{i_1}, \ldots, B_{i_k}$ να είναι ξένες ανά δύο και να ισχύει*

$$\lambda\left(\bigcup_{\ell=1}^{N} B_\ell\right) \leqslant 3^d \sum_{j=1}^{k} \lambda(B_{i_j}). \tag{3.2.15}$$

*Απόδειξη.* Η επιλογή των $B_{i_j}$ γίνεται με τον πιο φυσιολογικό τρόπο. Στο πρώτο βήμα, επιλέγουμε μία από τις μπάλες, την $B_{i_1}$, έτσι ώστε να έχει την μεγαλύτερη δυνατή ακτίνα. Κατόπιν, την αφαιρούμε από την $\mathcal{B}$ μαζί με όλες τις μπάλες της $\mathcal{B}$ που την τέμνουν. Οι υπόλοιπες μπάλες σχηματίζουν μια υποοικογένεια $\mathcal{B}'$ της $\mathcal{B}$ στην οποία επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία. Επιλέγουμε μία από τις μπάλες της $\mathcal{B}'$, την $B_{i_2}$, έτσι ώστε να έχει την μεγαλύτερη δυνατή ακτίνα. Κατόπιν, την αφαιρούμε από την $\mathcal{B}'$ μαζί με όλες τις μπάλες της $\mathcal{B}'$ που την τέμνουν. Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο, μετά από $N$ το πολύ βήματα, έχουμε επιλέξει κάποιες (ξένες) μπάλες $B_{i_1}, \ldots, B_{i_k}$ και η διαδικασία τερματίζεται.

Για την απόδειξη της (3.2.15) θα χρησιμοποιήσουμε την εξής παρατήρηση: αν $B$ και $B'$ είναι δύο ανοικτές μπάλες με $B \cap B' \neq \emptyset$ και αν η ακτίνα $r(B)$ της $B$ είναι μεγαλύτερη ή ίση από την ακτίνα $r(B')$ της $B'$, τότε η $B'$ περιέχεται στην μπάλα $\tilde{B}$ που έχει το ίδιο κέντρο με την $B$ και ακτίνα $r(\tilde{B}) = 3r(B)$. Η απόδειξη είναι απλή συνέπεια της τριγωνικής ανισότητας.

Συμβολίζοντας με $\tilde{B}_{i_j}$ τη μπάλα που έχει το ίδιο κέντρο με την $B_{i_j}$ και ακτίνα $r(\tilde{B}_{i_j}) = 3r(B_{i_j})$, και παρατηρώντας ότι κάθε $B_\ell \in \mathcal{B}$ τέμνει κάποια $B_{i_j}$ για την οποία $r(B_\ell) \leqslant r(B_{i_j})$, συμπεραίνουμε ότι

$$\bigcup_{\ell=1}^{N} B_\ell \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} \tilde{B}_{i_j}. \tag{3.2.16}$$

Άρα,

$$\lambda\left(\bigcup_{\ell=1}^{N} B_\ell\right) \leqslant \lambda\left(\bigcup_{j=1}^{k} \tilde{B}_{i_j}\right) \leqslant \sum_{j=1}^{k} \lambda(\tilde{B}_{i_j}) = 3^d \sum_{j=1}^{k} \lambda(B_{i_j}). \tag{3.2.17}$$

Έτσι, έχουμε αποδείξει την (3.2.15). □

**Απόδειξη του ισχυρισμού (iii).** Έστω $\alpha > 0$. Ορίζουμε $E_\alpha = \{x : f^*(x) > \alpha\}$ και για κάθε $x \in E_\alpha$ επιλέγουμε ανοικτή μπάλα $B_x$ με $x \in B_x$ και

$$\frac{1}{\lambda(B_x)} \int_{B_x} |f(y)|\, d\lambda(y) > \alpha. \tag{3.2.18}$$

Ισοδύναμα,

$$\lambda(B_x) < \frac{1}{\alpha}\int_{B_x} |f(y)|\,d\lambda(y). \tag{3.2.19}$$

Θεωρούμε τυχόν συμπαγές $K \subseteq E_\alpha$. Έχουμε $K \subseteq \bigcup_{x\in K} B_x$, άρα υπάρχει πεπερασμένη οικογένεια $\mathcal{B} = \{B_{x_1}, \dots, B_{x_N}\}$ ώστε

$$K \subseteq \bigcup_{\ell=1}^{N} B_{x_\ell}. \tag{3.2.20}$$

Από το λήμμα του Vitali μπορούμε να βρούμε $1 \leqslant i_1, \dots, i_k \leqslant N$ ώστε οι μπάλες $B_{x_{i_j}}$, $j = 1, \dots, k$, να είναι ξένες, και

$$\lambda\left(\bigcup_{\ell=1}^{N} B_{x_\ell}\right) \leqslant 3^d \sum_{j=1}^{k} \lambda(B_{x_{i_j}}). \tag{3.2.21}$$

Αφού οι $B_{x_{i_1}}, \dots, B_{x_{i_k}}$ είναι ξένες, συνδυάζοντας τις (3.2.19) και (3.2.21) γράφουμε

$$\begin{aligned}\lambda(K) &\leqslant \lambda\left(\bigcup_{\ell=1}^{N} B_{x_\ell}\right) \leqslant 3^d \sum_{j=1}^{k} \lambda(B_{x_{i_j}})\\ &\leqslant \frac{3^d}{\alpha}\sum_{j=1}^{k}\int_{B_{x_{i_j}}} |f(y)|\,d\lambda(y) = \frac{3^d}{\alpha}\int_{\bigcup_{j=1}^{k} B_{x_{i_j}}} |f(y)|\,d\lambda(y)\\ &\leqslant \frac{3^d}{\alpha}\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|\,d\lambda(y) = \frac{3^d}{\alpha}\|f\|_1.\end{aligned}$$

Αφού $\lambda(E_\alpha) = \sup\{\lambda(K) : K$ συμπαγές υποσύνολο του $E_\alpha\}$, έπεται το ζητούμενο. □

### 3.2.2 Το θεώρημα παραγώγισης του Lebesgue

Σε αυτήν την παράγραφο αποδεικνύουμε το Θεώρημα 3.2.1 και παρουσιάζουμε κάποιες παραλλαγές και κάποιες σημαντικές εφαρμογές του.

**Απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.1.** Έστω $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^d)$. Για την απόδειξη του θεωρήματος αρκεί να δείξουμε ότι, για κάθε $\alpha > 0$, το σύνολο

$$E_\alpha = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \limsup_{\substack{\lambda(B)\to 0\\ x\in B}} \left| \frac{1}{\lambda(B)}\int_B f(y)\,d\lambda(y) - f(x)\right| > 2\alpha \right\} \tag{3.2.22}$$

έχει μέτρο $\lambda(E_\alpha) = 0$. Τότε, το σύνολο $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{1/n}$ έχει μέτρο $\lambda(E) = 0$, και για κάθε $x \notin E$ ισχύει

$$\limsup_{\substack{\lambda(B)\to 0\\ x\in B}} \left| \frac{1}{\lambda(B)}\int_B f(y)\,d\lambda(y) - f(x)\right| = 0, \tag{3.2.23}$$

δηλαδή,

$$\lim_{\substack{\lambda(B)\to 0\\ x\in B}} \frac{1}{\lambda(B)}\int_B f(y)\,d\lambda(y) = f(x). \tag{3.2.24}$$

Σταθεροποιούμε $\alpha > 0$ και για τυχόν $\varepsilon > 0$ επιλέγουμε συνεχή συνάρτηση $g$ με συμπαγή φορέα, η οποία ικανοποιεί την

$$\|f - g\|_1 < \varepsilon. \tag{3.2.25}$$

(Το γεγονός ότι μια τέτοια προσέγγιση είναι πάντα δυνατή θα αποδειχθεί στο επόμενο κεφάλαιο). Αφού η $g$ είναι συνεχής, για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$ έχουμε

$$\lim_{\substack{\lambda(B)\to 0\\ x\in B}} \frac{1}{\lambda(B)} \int_B g(y)\, d\lambda(y) = g(x). \tag{3.2.26}$$

Γράφουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda(B)} \int_B f(y)\, d\lambda(y) - f(x) = \frac{1}{\lambda(B)} \int_B (f(y) - g(y))\, d\lambda(y) + \frac{1}{\lambda(B)} \int_B g(y)\, d\lambda(y) - g(x)\\ + g(x) - f(x),\end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{\lambda(B)} \int_B f(y)\, d\lambda(y) - f(x)\right| &\leqslant \frac{1}{\lambda(B)} \int_B |f(y) - g(y)|\, d\lambda(y) + \left|\frac{1}{\lambda(B)} \int_B g(y)\, d\lambda(y) - g(x)\right|\\ &\quad + |g(x) - f(x)|\\ &\leqslant (f-g)^*(x) + \left|\frac{1}{\lambda(B)} \int_B g(y)\, d\lambda(y) - g(x)\right| + |g(x) - f(x)|,\end{aligned}$$

άρα

$$\limsup_{\substack{\lambda(B)\to 0\\ x\in B}} \left|\frac{1}{\lambda(B)} \int_B f(y)\, d\lambda(y) - f(x)\right| \leqslant (f-g)^*(x) + |g(x) - f(x)|.$$

Αν λοιπόν ορίσουμε

$$F_\alpha = \{x : (f-g)^*(x) > \alpha\} \quad \text{και} \quad G_\alpha = \{x : |f(x) - g(x)| > \alpha\}, \tag{3.2.27}$$

έχουμε $E_\alpha \subseteq F_\alpha \cup G_\alpha$ (αν $u + v > 2\alpha$ τότε είτε $u > \alpha$ ή $v > \alpha$).

Τώρα, χρησιμοποιώντας την

$$\lambda(F_\alpha) = \lambda(\{x : (f-g)^*(x) > \alpha\}) \leqslant \frac{3^d}{\alpha}\|f - g\|_1 \tag{3.2.28}$$

(βλέπε Θεώρημα 3.2.3 (iii)) και την

$$\lambda(G_\alpha) = \lambda(\{x : |f(x) - g(x)| > \alpha\}) \leqslant \frac{1}{\alpha}\|f - g\|_1 \tag{3.2.29}$$

που είναι άμεση από την ανισότητα του Markov, παίρνουμε

$$\lambda(E_\alpha) \leqslant \lambda(F_\alpha) + \lambda(G_\alpha) \leqslant \frac{3^d + 1}{\alpha}\|f - g\|_1 = \frac{C_d'}{\alpha}\varepsilon, \tag{3.2.30}$$

όπου $C_d' = 3^d + 1$. Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $\lambda(E_\alpha) = 0$, και η απόδειξη είναι πλήρης. □

**Παρατήρηση 3.2.6.** Άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 3.2.1 είναι το γεγονός ότι: αν $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^d)$ τότε $|f(x)| \leqslant f^*(x)$ σχεδόν παντού (εξηγήστε γιατί).

**Ορισμός 3.2.7.** Μια μετρήσιμη συνάρτηση $f$ στον $\mathbb{R}^d$ λέγεται **τοπικά ολοκληρώσιμη** αν για κάθε μπάλα $B \subset \mathbb{R}^d$ η συνάρτηση $f(x)\chi_B(x)$ είναι ολοκληρώσιμη. Συμβολίζουμε με $\mathcal{L}_{\rm loc}(\mathbb{R}^d)$ την κλάση των τοπικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων.

Παρατηρούμε ότι αν $f \in \mathcal{L}_{\rm loc}(\mathbb{R}^d)$ και αν σταθεροποιήσουμε μια ανοικτή μπάλα $B_0$ (π.χ. την $B(0,k)$ για κάποιον $k \in \mathbb{N}$) τότε για κάθε $x \in B_0$ έχουμε

$$\frac{1}{\lambda(B)} \int_B f(y)\, d\lambda(y) = \frac{1}{\lambda(B)} \int_B f(y)\chi_{B_0}(y)\, d\lambda(y) \tag{3.2.31}$$

αν θεωρήσουμε $B$ που περιέχει το $x$ και είναι αρκετά μικρή ώστε να περιέχεται στην $B_0$. Εφαρμόζοντας λοιπόν το θεώρημα παραγώγισης για την ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f \cdot \chi_{B_0}$ βλέπουμε ότι

$$\lim_{\substack{\lambda(B)\to 0\\ x\in B}} \frac{1}{\lambda(B)} \int_B f(y) d\lambda(y) = f(x)$$

σχεδόν παντού στην $B_0$. Κάνοντας την ίδια δουλειά με $B_0 = B(0,k)$, $k = 1, 2, \ldots$, έχουμε την ακόλουθη επέκταση του Θεωρήματος 3.2.1:

**Θεώρημα 3.2.8.** *Αν $f \in \mathcal{L}_{\rm loc}(\mathbb{R}^d)$ τότε*

$$\lim_{\substack{\lambda(B)\to 0\\ x\in B}} \frac{1}{\lambda(B)} \int_B f(y) d\lambda(y) = f(x) \tag{3.2.32}$$

*σχεδόν παντού ως προς το μέτρο Lebesgue $\lambda$ στον $\mathbb{R}^d$.* □

Μπορούμε μάλιστα να δείξουμε κάτι ισχυρότερο. Δίνουμε πρώτα έναν ορισμό.

**Ορισμός 3.2.9.** Έστω $f \in \mathcal{L}_{\rm loc}(\mathbb{R}^d)$. Το **σύνολο Lebesgue** $\mathrm{Leb}(f)$ της $f$ αποτελείται από όλα τα $x \in \mathbb{R}^d$ για τα οποία $|f(x)| < \infty$ και

$$\lim_{\substack{\lambda(B)\to 0\\ x\in B}} \frac{1}{\lambda(B)} \int_B |f(y) - f(x)|\, d\lambda(y) = 0.$$

Στην Παράγραφο 3.2.1 είδαμε ότι αν η $f$ είναι συνεχής στο $x$ τότε $x \in \mathrm{Leb}(f)$. Επίσης, είναι φανερό ότι αν $x \in \mathrm{Leb}(f)$ τότε

$$\lim_{\substack{\lambda(B)\to 0\\ x\in B}} \frac{1}{\lambda(B)} \int_B f(y) d\lambda(y) = f(x).$$

Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι αν $f \in \mathcal{L}_{\rm loc}(\mathbb{R}^d)$ τότε σχεδόν κάθε $x \in \mathbb{R}^d$ ανήκει στο σύνολο Lebesgue της $f$.

**Θεώρημα 3.2.10.** *Έστω $f \in \mathcal{L}_{\rm loc}(\mathbb{R}^d)$. Τότε,*

$$\lambda(\mathbb{R}^d \setminus \mathrm{Leb}(f)) = 0. \tag{3.2.33}$$

*Απόδειξη.* Έστω $q \in \mathbb{Q}$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 3.2.8 για την τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση $|f(y) - q|$ βλέπουμε ότι υπάρχει $E_q \subset \mathbb{R}^d$ με $\lambda(E_q) = 0$ ώστε: αν $x \notin E_q$ τότε

$$\lim_{\substack{\lambda(B)\to 0\\ x\in B}} \frac{1}{\lambda(B)} \int_B |f(y) - q|\, d\lambda(y) = |f(x) - q|.$$

Θέτουμε $E = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} E_q$. Τότε, $\lambda(E) = 0$ και θα δείξουμε ότι: αν $x \notin E$ και $|f(x)| < \infty$ τότε $x \in \mathrm{Leb}(f)$.

Θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$ και επιλέγουμε ρητό $q$ με $|f(x) - q| < \varepsilon$. Γράφουμε

$$\frac{1}{\lambda(B)} \int_B |f(y) - f(x)|\, d\lambda(y) \leqslant \frac{1}{\lambda(B)} \int_B |f(y) - q|\, d\lambda(y) + |f(x) - q| \tag{3.2.34}$$

για κάθε μπάλα $B$ με $x \in B$, και αφήνοντας το $\lambda(B) \to 0$ παίρνουμε

$$\limsup_{\substack{\lambda(B)\to 0\\ x\in B}} \frac{1}{\lambda(B)} \int_B |f(y) - f(x)|\, d\lambda(y) \leqslant |f(x) - q| + |f(x) - q| < 2\varepsilon, \tag{3.2.35}$$

διότι $x \notin E_q$. Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται ότι

$$\lim_{\substack{\lambda(B)\to 0\\ x\in B}} \frac{1}{\lambda(B)} \int_B |f(y) - f(x)|\, d\lambda(y) = 0,$$

δηλαδή $x \in \mathrm{Leb}(f)$. $\square$

Μία ενδιαφέρουσα και χρήσιμη εφαρμογή του θεωρήματος παραγώγισης του Lebesgue αφορά την δομή των μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}^d$.

**Ορισμός 3.2.11.** Έστω $E$ μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Λέμε ότι το $x \in \mathbb{R}^d$ είναι **σημείο πυκνότητας** του $E$ αν

$$\lim_{\substack{\lambda(B)\to 0\\ x\in B}} \frac{\lambda(E\cap B)}{\lambda(B)} = 1. \tag{3.2.36}$$

Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $\varepsilon \in (0,1)$ και για κάθε ανοικτή μπάλα $B$ που περιέχει το $x$ και έχει αρκετά μικρή ακτίνα, ισχύει

$$\lambda(E\cap B) \geqslant (1-\varepsilon)\lambda(B). \tag{3.2.37}$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 3.2.8 στην τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση $\chi_E$ παίρνουμε αμέσως το εξής:

**Θεώρημα 3.2.12.** *Έστω $E$ μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Τότε, σχεδόν κάθε σημείο του $E$ είναι σημείο πυκνότητας του $E$ και σχεδόν κάθε $x \notin E$ δεν είναι σημείο πυκνότητας του $E$ – ακριβέστερα, σχεδόν όλα τα $x \notin E$ είναι σημεία πυκνότητας του $\mathbb{R}^d \setminus E$, άρα ικανοποιούν την*

$$\lim_{\substack{\lambda(B)\to 0\\ x\in B}} \frac{\lambda(E\cap B)}{\lambda(B)} = 0. \tag{3.2.38}$$

## 3.3 Συναρτήσεις φραγμένης κύμανσης

### 3.3.1 Ορισμός και παραδείγματα

**Ορισμός 3.3.1.** Έστω $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Αν $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ είναι μια διαμέριση του $[a,b]$, ονομάζουμε **κύμανση της $\varphi$ ως προς την $P$** τον αριθμό

$$V(\varphi, P) = \sum_{k=0}^{n-1} |\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x_k)|. \tag{3.3.1}$$

Μια πρώτη βασική παρατήρηση είναι ότι «η κύμανση της $\varphi$ μεγαλώνει αν εκλεπτύνουμε τη διαμέριση».

**Λήμμα 3.3.2.** *Έστω $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ και $P, Q$ δύο διαμερίσεις του $[a,b]$. Αν $P \subseteq Q$, τότε*

$$V(\varphi, P) \leqslant V(\varphi, Q). \tag{3.3.2}$$

*Απόδειξη.* Έστω $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ και έστω $x_k < y < x_{k+1}$ για κάποιο $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Αν θεωρήσουμε τη διαμέριση $P_1 = P \cup \{y\}$, τότε απλή εφαρμογή της τριγωνικής ανισότητας δίνει

$$\begin{aligned} V(\varphi, P) &= \sum_{j=0}^{n-1} |\varphi(x_{j+1}) - \varphi(x_j)| \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} |\varphi(x_{j+1}) - \varphi(x_j)| + |\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x_k)| + \sum_{j=k+1}^{n-1} |\varphi(x_{j+1}) - \varphi(x_j)| \\ &\leqslant \sum_{j=0}^{k-1} |\varphi(x_{j+1}) - \varphi(x_j)| + |\varphi(y) - \varphi(x_k)| + |\varphi(x_{k+1}) - \varphi(y)| \\ &+ \sum_{j=k+1}^{n-1} |\varphi(x_{j+1}) - \varphi(x_j)| \\ &= V(\varphi, P_1). \end{aligned}$$

Στη γενική περίπτωση η $Q$ προκύπτει από την $P$ με την προσθήκη πεπερασμένων το πλήθος σημείων $y_1, \ldots, y_m$, οπότε

$$V(\varphi, P) \leqslant V(\varphi, P \cup \{y_1\}) \leqslant \cdots \leqslant V(\varphi, P \cup \{y_1, \ldots, y_m\}) = V(\varphi, Q). \tag{3.3.3}$$

□

**Ορισμός 3.3.3.** Έστω $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$. Η **κύμανση** της $\varphi$ στο $[a,b]$ είναι η ποσότητα

$$V(\varphi) = \sup\{V(\varphi, P) \mid P \text{ διαμέριση του } [a,b]\}. \tag{3.3.4}$$

Αν $V(\varphi) < +\infty$ τότε λέμε ότι η $\varphi$ έχει **φραγμένη κύμανση** (αν $V(\varphi) = +\infty$, λέμε ότι η $\varphi$ έχει άπειρη κύμανση). Όταν θέλουμε να τονίσουμε το διάστημα στο οποίο υπολογίζεται η κύμανση της $\varphi$ θα γράφουμε $V(\varphi \mid a, b)$.

Μια τεχνική παρατήρηση η οποία συχνά απλουστεύει τον υπολογισμό της κύμανσης είναι η εξής (η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση).

**Λήμμα 3.3.4.** *Έστω $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ και έστω $Q$ διαμέριση του $[a,b]$. Τότε,*

$$V(\varphi) = \sup\{V(\varphi, P) \mid P \ \text{ διαμέριση του } \ [a,b]\ ,\ P \supseteq Q\}. \tag{3.3.5}$$

Μία από τις συνέπειες του Λήμματος 3.3.4 είναι η «προσθετικότητα της κύμανσης ως προς διαδοχικά υποδιαστήματα»:

**Πρόταση 3.3.5.** *Έστω $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ και έστω $\gamma \in (a,b)$. Τότε,*

$$V(\varphi \mid a,b) = V(\varphi \mid a,\gamma) + V(\varphi \mid \gamma,b). \tag{3.3.6}$$

*Ειδικότερα,*

$$V(\varphi \mid \gamma,\delta) \leqslant V(\varphi \mid a,b) \tag{3.3.7}$$

*για κάθε $[\gamma,\delta] \subset [a,b]$.*

*Απόδειξη.* Θεωρούμε την διαμέριση $Q = \{a < \gamma < b\}$ του $[a,b]$. Από το Λήμμα 3.3.4 έχουμε

$$\begin{aligned} V(\varphi \mid a,b) &= \sup\{V(\varphi,P) \mid P \ \text{ διαμέριση του } \ [a,b]\ ,\ P \supseteq Q\} \\ &= \sup\{V(\varphi,P) \mid P \ \text{ διαμέριση του } \ [a,b]\ ,\ \gamma \in P\}. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι κάθε διαμέριση $P$ του $[a,b]$ που περιέχει το $\gamma$ είναι της μορφής $P = P_1 \cup P_2$ όπου $P_1$ διαμέριση του $[a,\gamma]$ και $P_2$ διαμέριση του $[\gamma,b]$. Επιπλέον, από τον ορισμό της κύμανσης ως προς διαμέριση, ισχύει

$$V(\varphi, P \mid a,b) = V(\varphi, P_1 \mid a,\gamma) + V(\varphi, P_2 \mid \gamma,b). \tag{3.3.8}$$

Αντίστροφα, κάθε ζευγάρι διαμερίσεων $P_1$, $P_2$ των $[a,\gamma]$ και $[\gamma,b]$ αντίστοιχα, δίνει μια διαμέριση $P = P_1 \cup P_2$ του $[a,b]$ η οποία περιέχει το $\gamma$. Χρησιμοποιώντας και την (3.3.8) βλέπουμε ότι

$$\big\{V(\varphi, P \mid a,b) \mid \gamma \in P\big\} = \big\{V(\varphi, P_1 \mid a,\gamma) + V(\varphi, P_2 \mid \gamma,b)\big\} \tag{3.3.9}$$

(το πρώτο σύνολο είναι πάνω από όλες τις διαμερίσεις $P$ του $[a,b]$ που περιέχουν το $\gamma$ ενώ το δεύτερο πάνω από όλα τα ζευγάρια διαμερίσεων των $[a,\gamma]$ και $[\gamma,b]$). Παίρνοντας supremum και στα δύο μέλη έχουμε

$$\begin{aligned} V(\varphi \mid a,b) &= \sup_{\gamma\in P} V(\varphi, P \mid a,b) = \sup_{P_1} V(\varphi, P_1 \mid a,\gamma) + \sup_{P_2} V(\varphi, P_2 \mid \gamma,b) \\ &= V(\varphi \mid a,\gamma) + V(\varphi \mid \gamma,b). \end{aligned}$$

Με επαγωγή μπορούμε να δείξουμε ότι αν γράψουμε το $[a,b]$ σαν ένωση $[a,a_1] \cup [a_1,a_2] \cup \cdots \cup [a_{s-1},a_s]$ οσωνδήποτε διαδοχικών διαστημάτων, τότε

$$V(\varphi \mid a,b) = \sum_{i=0}^{s-1} V(\varphi \mid a_i, a_{i+1}) \tag{3.3.10}$$

όπου $a_0 = a$ και $a_s = b$. Από την (3.3.10) έπεται αμέσως η (3.3.7). □

Τα παραδείγματα που ακολουθούν εξηγούν τον ορισμό της κύμανσης: είναι ένα μέτρο της ολικής μεταβολής των τιμών της $\varphi$ στο $[a,b]$. Λίγη σκέψη δείχνει ότι οι συναρτήσεις που έχουν φραγμένη κύμανση είναι υποχρεωτικά φραγμένες:

**Λήμμα 3.3.6.** *Έστω $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$. Αν $V(\varphi) < +\infty$ τότε η $\varphi$ είναι φραγμένη.*

*Απόδειξη.* Έστω $x \in (a,b)$. Θεωρούμε τη διαμέριση $P_x = \{a < x < b\}$ του $[a,b]$. Τότε,

$$|\varphi(x) - \varphi(a)| \leqslant |\varphi(x) - \varphi(a)| + |\varphi(b) - \varphi(x)| = V(\varphi, P_x) \leqslant V(\varphi), \tag{3.3.11}$$

άρα

$$|\varphi(x)| \leqslant V(\varphi) + |\varphi(a)|. \tag{3.3.12}$$

Έπεται ότι $|\varphi(x)| \leqslant M$ για κάθε $x \in [a,b]$, όπου $M = \max\{V(\varphi) + |\varphi(a)|, |\varphi(b)|\}$. □

**Παραδείγματα 3.3.7.** (α) Αν η $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι μονότονη, τότε

$$V(\varphi) = |\varphi(b) - \varphi(a)|. \tag{3.3.13}$$

Για παράδειγμα, αν η $\varphi$ είναι αύξουσα τότε για κάθε διαμέριση $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ του $[a,b]$ έχουμε

$$V(\varphi, P) = \sum_{k=0}^{n-1} |\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x_k)| = \sum_{k=0}^{n-1} \big(\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x_k)\big) = \varphi(b) - \varphi(a). \tag{3.3.14}$$

Άρα,

$$V(\varphi) = \sup_P V(\varphi, P) = \varphi(b) - \varphi(a). \tag{3.3.15}$$

(β) Λέμε ότι η $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι **κατά τμήματα μονότονη** αν υπάρχουν πεπερασμένα το πλήθος σημεία $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_s = b$ στο $[a,b]$ ώστε η $\varphi$ να είναι μονότονη σε καθένα από τα διαστήματα $[a_i, a_{i+1}]$, $i = 0, 1, \ldots, s-1$. Από την Πρόταση 3.3.5 και το Παράδειγμα (α),

$$V(\varphi \mid a, b) = \sum_{i=0}^{s-1} V(\varphi \mid a_i, a_{i+1}) = \sum_{i=0}^{s-1} |\varphi(a_{i+1}) - \varphi(a_i)|. \tag{3.3.16}$$

Ειδικότερα, η $\varphi$ έχει φραγμένη κύμανση.

(γ) Έστω $\gamma \in (a,b)$ και έστω $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση με $\varphi(\gamma) = 1$ και $\varphi(x) = 0$ αλλιώς. Η $\varphi$ είναι αύξουσα στο $[a,\gamma]$ και φθίνουσα στο $[\gamma, b]$. Άρα,

$$V(\varphi) = |\varphi(\gamma) - \varphi(a)| + |\varphi(b) - \varphi(\gamma)| = 2 \tag{3.3.17}$$

από το Παράδειγμα (β).

(δ) Υπάρχουν φραγμένες συναρτήσεις που δεν έχουν φραγμένη κύμανση. Ένα παράδειγμα μας δίνει η συνάρτηση $g$ του Dirichlet στο $[0,1]$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε ρητούς $q_k$ και άρρητους

$\alpha_k$ με $0 < q_1 < \alpha_1 < \cdots < q_n < \alpha_n < 1$. Αν $P$ είναι η διαμέριση του $[0,1]$ που σχηματίζουν όλα αυτά τα σημεία,

$$V(g) \geqslant V(g,P) \geqslant \sum_{k=1}^{n} |g(\alpha_k) - g(q_k)| = n. \tag{3.3.18}$$

Αφού $V(g) \geqslant n$ για κάθε $n$, η $g$ έχει άπειρη κύμανση.

(ε) Υπάρχουν συνεχείς $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ που δεν έχουν φραγμένη κύμανση. Ένα παράδειγμα είναι το εξής: Γράφουμε το $[0,1]$ στη μορφή

$$[0,1] = \{0\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}\Big]. \tag{3.3.19}$$

Σε κάθε διάστημα $[1/2^n, 1/2^{n-1}]$ ορίζουμε μια «τριγωνική συνάρτηση» ως εξής: θέτουμε $\varphi(1/2^n) = 0 = \varphi(1/2^{n-1})$, $\varphi(3/2^{n+1}) = 1/n$ (ο $3/2^{n+1}$ είναι το μέσο του διαστήματος) και επεκτείνουμε γραμμικά στα $[1/2^n, 3/2^{n+1}]$ και $[3/2^{n+1}, 1/2^{n-1}]$. Με αυτόν τον τρόπο η $\varphi$ έχει οριστεί και είναι συνεχής στο $(0,1]$.

Θέτουμε $\varphi(0) = 0$. Τότε, η $\varphi$ είναι συνεχής και στο 0: παρατηρήστε ότι

$$0 \leqslant x < \frac{1}{2^{n-1}} \Longrightarrow 0 \leqslant \varphi(x) \leqslant \frac{1}{n}. \tag{3.3.20}$$

Θεωρούμε την διαμέριση

$$P_n = \Big\{0 < \frac{1}{2^n} < \frac{3}{2^{n+1}} < \frac{1}{2^{n-1}} < \frac{3}{2^n} < \cdots < \frac{1}{2} < \frac{3}{4} < 1\Big\}. \tag{3.3.21}$$

Τότε,

$$V(\varphi, P_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k}. \tag{3.3.22}$$

Αφού η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει, συμπεραίνουμε ότι η $\varphi$ έχει άπειρη κύμανση.

(ζ) Έστω $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ Lipschitz συνεχής συνάρτηση με σταθερά $M$. Δηλαδή,

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant M \cdot |x-y| \tag{3.3.23}$$

για κάθε $x, y \in [a,b]$. Τότε, η $\varphi$ έχει φραγμένη κύμανση: Αν $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$, τότε

$$V(\varphi, P) = \sum_{k=0}^{n-1} |\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x_k)| \leqslant M \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) = M \cdot (b-a). \tag{3.3.24}$$

Έπεται ότι

$$V(\varphi) \leqslant M \cdot (b-a) < +\infty. \tag{3.3.25}$$

Ειδικότερα, αν η $\varphi$ είναι παραγωγίσιμη και η $\varphi'$ είναι φραγμένη στο $[a,b]$ τότε η $\varphi$ έχει φραγμένη κύμανση. Πράγματι, χρησιμοποιώντας το θεώρημα μέσης τιμής βλέπουμε ότι η $\varphi$ είναι Lipschitz συνεχής με σταθερά

$$M = \sup\{|\varphi'(x)| \mid a \leqslant x \leqslant b\}. \tag{3.3.26}$$

### 3.3.2 Ο χώρος των συναρτήσεων φραγμένης κύμανσης

Έστω $[a,b]$ ένα κλειστό διάστημα. Γράφουμε $BV[a,b]$ για το σύνολο όλων των συναρτήσεων $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ που έχουν φραγμένη κύμανση. Η επόμενη Πρόταση δείχνει ότι το σύνολο $BV[a,b]$ είναι άλγεβρα συναρτήσεων: είναι γραμμικός χώρος και αν $\varphi, \psi \in BV[a,b]$ τότε το γινόμενο $\varphi \cdot \psi \in BV[a,b]$.

**Πρόταση 3.3.8.** *Έστω $\varphi, \psi \in BV[a,b]$ και έστω $t \in \mathbb{R}$. Τότε,*

(i) $\varphi + \psi \in BV[a,b]$ *και* $V(\varphi + \psi) \leqslant V(\varphi) + V(\psi)$.

(ii) $t \cdot \varphi \in BV[a,b]$ *και* $V(t \cdot \varphi) = |t| \cdot V(\varphi)$.

(iii) $\varphi \cdot \psi \in BV[a,b]$ *και* $V(\varphi \cdot \psi) \leqslant \|\varphi\|_\infty V(\psi) + \|\psi\|_\infty V(\varphi)$, *όπου* $\|\varphi\|_\infty = \sup\{|\varphi(x)| : a \leqslant x \leqslant b\}$ *και* $\|\psi\|_\infty = \sup\{|\psi(x)| : a \leqslant x \leqslant b\}$. *Το Λήμμα 3.3.6 δείχνει ότι οι* $\|\varphi\|_\infty$, $\|\psi\|_\infty$ *ορίζονται καλά.*

*Απόδειξη.* Έστω $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ διαμέριση του $[a,b]$. Από την

$$\begin{aligned} V(\varphi + \psi, P) &= \sum_{k=0}^{n-1} |\varphi(x_{k+1}) + \psi(x_{k+1}) - \varphi(x_k) - \psi(x_k)| \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x_k)| + \sum_{k=0}^{n-1} |\psi(x_{k+1}) - \psi(x_k)| \\ &= V(\varphi, P) + V(\psi, P) \end{aligned}$$

έπεται ότι

$$V(\varphi + \psi) \leqslant V(\varphi) + V(\psi) < +\infty. \tag{3.3.27}$$

Για τον δεύτερο ισχυρισμό αρκεί να παρατηρήσετε ότι

$$\begin{aligned} V(t \cdot \varphi, P) &= \sum_{k=0}^{n-1} |t \cdot \varphi(x_{k+1}) - t \cdot \varphi(x_k)| \\ &= |t| \cdot \sum_{k=0}^{n-1} |\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x_k)| \\ &= |t| \cdot V(\varphi, P). \end{aligned}$$

Τέλος, με κατάλληλες προσθαφαιρέσεις και εφαρμογή της τριγωνικής ανισότητας βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} V(\varphi \cdot \psi, P) &= \sum_{k=0}^{n-1} |\varphi(x_{k+1})\psi(x_{k+1}) - \varphi(x_k)\psi(x_k)| \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |\varphi(x_{k+1})| \cdot |\psi(x_{k+1}) - \psi(x_k)| + \sum_{k=0}^{n-1} |\psi(x_k)| \cdot |\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x_k)| \\ &\leqslant \|\varphi\|_\infty V(\psi, P) + \|\psi\|_\infty V(\varphi, P), \end{aligned}$$

απ' όπου προκύπτει η

$$V(\varphi \cdot \psi) \leqslant \|\varphi\|_\infty V(\psi) + \|\psi\|_\infty V(\varphi). \tag{3.3.28}$$

□

Στην περίπτωση που η $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και η $\varphi'$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη, η κύμανση της $\varphi$ δίνεται από το ολοκλήρωμα Riemann της $|\varphi'|$:

**Θεώρημα 3.3.9.** *Έστω $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν η $\varphi'$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη, τότε $\varphi \in BV[a,b]$ και*

$$V(\varphi) = \int_a^b |\varphi'(t)|\, dt. \tag{3.3.29}$$

*Απόδειξη.* Η $\varphi'$ έχει υποτεθεί Riemann ολοκληρώσιμη, άρα είναι φραγμένη συνάρτηση. Αυτό αποδεικνύει ότι $\varphi \in BV[a,b]$ (η $\varphi$ είναι Lipschitz συνεχής). Επιπλέον η $|\varphi'|$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη, άρα το δεξιό μέλος της (3.3.29) ορίζεται καλά.

Έστω $\varepsilon > 0$. Μπορούμε να βρούμε διαμερίσεις $P_1$ και $P_2$ του $[a,b]$ τέτοιες ώστε

$$V(\varphi) - \varepsilon < V(\varphi, P_1) \leqslant V(\varphi) \tag{3.3.30}$$

και

$$U(|\varphi'|, P_2) - L(|\varphi'|, P_2) < \varepsilon. \tag{3.3.31}$$

Αν $P = P_1 \cup P_2 = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$, τότε οι (3.3.30) και (3.3.31) ισχύουν με την $P$ στη θέση των $P_1$ και $P_2$ αντίστοιχα. Εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής σε κάθε $[x_k, x_{k+1}]$ βρίσκουμε $t_k \in (x_k, x_{k+1})$ με

$$|\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x_k)| = |\varphi'(t_k)| \cdot (x_{k+1} - x_k). \tag{3.3.32}$$

Άρα,

$$V(\varphi, P) = \sum_{k=0}^{n-1} |\varphi'(t_k)| \cdot (x_{k+1} - x_k). \tag{3.3.33}$$

Από την (3.3.31) έχουμε

$$\left| \int_a^b |\varphi'(t)| dt - \sum_{k=0}^{n-1} |\varphi'(t_k)|(x_{k+1} - x_k) \right| < \varepsilon. \tag{3.3.34}$$

Συνδυάζοντας τις (3.3.33) και (3.3.34) παίρνουμε

$$\left| \int_a^b |\varphi'(t)| dt - V(\varphi, P) \right| < \varepsilon, \tag{3.3.35}$$

και από την (3.3.30) έπεται ότι

$$\left| \int_a^b |\varphi'(t)| dt - V(\varphi) \right| < 2\varepsilon. \tag{3.3.36}$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έχουμε αποδείξει το ζητούμενο. □

### 3.3.3 Χαρακτηρισμός των συναρτήσεων φραγμένης κύμανσης

Έστω $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με φραγμένη κύμανση. Από την Πρόταση 3.3.5 η $\varphi$ έχει φραγμένη κύμανση σε κάθε διάστημα $[a,x]$ όπου $x \in [a,b]$ (στην περίπτωση που $x = a$, η κύμανση της $\varphi$ στο $[a,x]$ ορίζεται να είναι ίση με μηδέν). Μπορούμε επομένως να ορίσουμε μια συνάρτηση $v_\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ με

$$v_\varphi(x) = V(\varphi \mid a,x). \tag{3.3.37}$$

Η $v_\varphi$ λέγεται **συνάρτηση ολικής κύμανσης** της $\varphi$. Από την Πρόταση 3.3.5 έχουμε

$$v_\varphi(y) - v_\varphi(x) = V(\varphi \mid a,y) - V(\varphi \mid a,x) = V(\varphi \mid x,y) \geqslant 0 \tag{3.3.38}$$

αν $x < y$ στο $[a,b]$. Άρα, η $v_\varphi$ είναι αύξουσα συνάρτηση.

Επίσης, θεωρώντας τη διαμέριση $P_{xy} = \{x < y\}$ του $[x,y]$ έχουμε

$$\varphi(y) - \varphi(x) \leqslant |\varphi(y) - \varphi(x)| \leqslant V(\varphi \mid x,y) = v_\varphi(y) - v_\varphi(x), \tag{3.3.39}$$

δηλαδή

$$v_\varphi(x) - \varphi(x) \leqslant v_\varphi(y) - \varphi(y) \tag{3.3.40}$$

αν $x < y$ στο $[a,b]$. Άρα, η $v_\varphi - \varphi$ είναι αύξουσα συνάρτηση.

Από τις (3.3.38) και (3.3.40) προκύπτει εύκολα ο εξής χαρακτηρισμός των συναρτήσεων με φραγμένη κύμανση.

**Θεώρημα 3.3.10.** *Έστω $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$. Η $\varphi$ έχει φραγμένη κύμανση αν και μόνο αν γράφεται σαν διαφορά $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ δύο αυξουσών συναρτήσεων.*

*Απόδειξη.* Έστω $\varphi \in BV[a,b]$. Είδαμε ότι οι συναρτήσεις $v_\varphi$ και $v_\varphi - \varphi$ είναι αύξουσες. Γράφοντας

$$\varphi = v_\varphi - \big(v_\varphi - \varphi\big) \tag{3.3.41}$$

έχουμε περιγράψει την $\varphi$ σαν διαφορά δύο αυξουσών συναρτήσεων.

Αντίστροφα, αν $\varphi_1, \varphi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι δυο αύξουσες συναρτήσεις, τότε $\varphi_1, \varphi_2 \in BV[a,b]$ και, αφού ο $BV[a,b]$ είναι γραμμικός χωρος, έχουμε $\varphi_1 - \varphi_2 \in BV[a,b]$. □

**Παρατήρηση 3.3.11.** Η ανάλυση $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ δεν είναι μοναδική. Αν $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι οποιαδήποτε αύξουσα συνάρτηση, τότε $\varphi = (\varphi_1 + f) - (\varphi_2 + f)$ και οι $\varphi_1 + f$, $\varphi_2 + f$ είναι προφανώς αύξουσες.

Αν η $\varphi$ είναι συνεχής συνάρτηση με φραγμένη κύμανση, τότε οι $\varphi_1, \varphi_2$ του Θεωρήματος 3.3.10 μπορούν να υποτεθούν συνεχείς. Η απόδειξη θα βασιστεί στο εξής Λήμμα.

**Λήμμα 3.3.12.** *Έστω $\varphi \in BV[a,b]$ και έστω $\gamma \in [a,b]$. Η $\varphi$ είναι συνεχής στο $\gamma$ αν και μόνο αν η $v_\varphi$ είναι συνεχής στο $\gamma$.*

*Απόδειξη.* Παρατηρούμε πρώτα ότι τα πλευρικά όρια των $\varphi$ και $v_\varphi$ καθώς $y \to x^+$ ή $y \to x^-$ υπάρχουν: οι μονότονες συναρτήσεις έχουν αυτήν την ιδιότητα, άρα και οι διαφορές μονότονων συναρτήσεων. Θα δείξουμε ότι η $\varphi$ είναι συνεχής από δεξιά στο $\gamma \in [a,b)$ αν και μόνο αν η $v_\varphi$ είναι συνεχής από δεξιά στο $\gamma$ (δουλεύοντας όμοια με τα όρια από αριστερά, παίρνουμε το συμπέρασμα).

Η μία κατεύθυνση είναι απλή: είδαμε ότι αν $x < y$ στο $[a,b]$ τότε $|\varphi(y)-\varphi(x)| \leqslant v_\varphi(y)-v_\varphi(x)$. Παίρνοντας όρια καθώς $y \to x^+$ έχουμε

$$v_\varphi(x+) - v_\varphi(x) \geqslant |\varphi(x+) - \varphi(x)|. \tag{3.3.42}$$

Αν η $v_\varphi$ είναι συνεχής από δεξιά, η (3.3.42) δείχνει ότι $\varphi(x+) = \varphi(x)$. Δηλαδή, η $\varphi$ είναι συνεχής από δεξιά.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι η $\varphi$ είναι συνεχής από δεξιά στο $\gamma \in [a,b)$. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $|\varphi(\gamma) - \varphi(x)| < \varepsilon/2$ αν $\gamma \leqslant x < \gamma + \delta$. Θεωρούμε διαμέριση $P = \{\gamma = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ του $[\gamma, b]$ με την ιδιότητα

$$V(\varphi \mid \gamma, b) < V(\varphi, P \mid \gamma, b) + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.3.43}$$

Η (3.3.43) εξακολουθεί να ισχύει αν στη θέση της $P$ πάρουμε οποιαδήποτε εκλέπτυνσή της. Αν λοιπόν $\gamma < t < \min\{\gamma+\delta, x_1\}$ και $P_t = \{t < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\}$ έχουμε

$$\begin{aligned} V(\varphi \mid \gamma, b) - \frac{\varepsilon}{2} &< V(\varphi, P \cup \{t\} \mid \gamma, b) \\ &= |\varphi(t) - \varphi(\gamma)| + V(\varphi, P_t \mid t, b) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + V(\varphi \mid t, b). \end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$\begin{aligned} v_\varphi(t) - v_\varphi(\gamma) &= \big(V(\varphi \mid a, b) - V(\varphi \mid t, b)\big) - \big(V(\varphi \mid a, b) - V(\varphi \mid \gamma, b)\big) \\ &= V(\varphi \mid \gamma, b) - V(\varphi \mid t, b) \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Δείξαμε ότι $0 \leqslant v_\varphi(t) - v_\varphi(\gamma) < \varepsilon$ αν $\gamma < t < \min\{\gamma+\delta, x_1\}$. Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, η $v_\varphi$ είναι συνεχής από δεξιά στο $\gamma$. □

Άμεση συνέπεια του Λήμματος 3.3.12 είναι το εξής.

**Θεώρημα 3.3.13.** *Έστω $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Η $\varphi$ έχει φραγμένη κύμανση αν και μόνο αν γράφεται σαν διαφορά δύο συνεχών και αυξουσών συναρτήσεων.* □

## 3.4 Παραγωγισιμότητα μονότονων συναρτήσεων

Αφετηρία αυτής της παραγράφου είναι το ερώτημα να βρεθεί ικανή και αναγκαία συνθήκη που να εξασφαλίζει ότι κάποια συνάρτηση $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί την

$$g(x) - g(a) = \int_a^x g'(t)\, d\lambda(t), \quad \text{για κάθε } x \in [a,b]. \tag{3.4.1}$$

Από τον Απειροστικό Λογισμό γνωρίζουμε ότι αν η $g$ είναι παραγωγίσιμη και η $g'$ είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann τότε η (3.4.1) ισχύει. Για να επεκτείνουμε αυτό το αποτέλεσμα, απαραίτητη προϋπόθεση είναι η $g$ να είναι (τουλάχιστον) σχεδόν παντού παραγωγίσιμη. Κατόπιν, θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε το ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος ως ολοκλήρωμα Lebesgue και να προσπαθήσουμε να δούμε ποιές είναι οι συνθήκες που εξασφαλίζουν (και είναι απαραίτητες για) την ισότητα.

Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι οι συναρτησεις φραγμένης κύμασης είναι σχεδόν παντού παραγωγίσιμες.

**Θεώρημα 3.4.1.** *Έστω $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνάρτηση φραγμένης κύμανσης. Τότε, η $\varphi$ είναι παραγωγίσιμη σχεδόν παντού.*

Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.3.10, η $\varphi$ γράφεται στη μορφή $\varphi = g_1 - g_2$, όπου $g_1, g_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι αύξουσες συναρτήσεις. Έπεται ότι, για την απόδειξη του Θεωρήματος 3.4.1 μπορούμε να θεωρήσουμε μια αύξουσα συνάρτηση $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ και να αποδείξουμε ότι η $g$ είναι παραγωγίσιμη σχεδόν παντού. Θα δώσουμε την απόδειξη κάνοντας την πρόσθετη υπόθεση ότι η $g$ είναι συνεχής (η απόδειξη στη γενική περίπτωση έχει περισσότερες τεχνικές λεπτομέρειες αλλά χρησιμοποιεί παρόμοιες ιδέες, και την παραλείπουμε). Θα χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο λήμμα του F. Riesz.

**Λήμμα 3.4.2** (το λήμμα του ανατέλλοντος ηλίου, F. Riesz)**.** *Έστω $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Έστω $E$ το σύνολο των $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία υπάρχει $h = h_x > 0$ ώστε*

$$g(x+h) > g(x). \tag{3.4.2}$$

*Αν το $E$ είναι μη κενό, τότε είναι ανοικτό σύνολο, άρα γράφεται ως ξένη ένωση $E = \bigcup_k (a_k, b_k)$, όπου κάθε $(a_k, b_k)$ είναι ανοικτό διάστημα ή ημιευθεία. Για κάθε φραγμένο διάστημα $(a_k, b_k)$ αυτής της ένωσης, ισχύει*

$$g(b_k) - g(a_k) = 0. \tag{3.4.3}$$

*Απόδειξη.* Υποθέτουμε ότι το $E$ είναι μη κενό. Παρατηρούμε ότι είναι ανοικτό: αν $x \in E$ τότε υπάρχει $h > 0$ ώστε $g(x+h) > g(x)$, και λόγω της συνέχειας της $g$ στο $x$ μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ ώστε $x + \delta < x + h$ και $g(y) < g(x+h)$ για κάθε $y \in (x-\delta, x+\delta)$. Τότε, $(x-\delta, x+\delta) \subseteq E$: πράγματι, αν $y \in (x-\delta, x+\delta)$, τότε $x + h = y + (x+h-y)$ και $h_1 : x+h-y > x+h-(x+\delta) > 0$ (άρα, για το $y + h_1$ έχουμε $g(y) < g(x+h) = g(y+h_1)$). Τότε, γνωρίζουμε ότι το $E$ γράφεται στη μορφή $E = \bigcup_k (a_k, b_k)$, όπου κάθε $(a_k, b_k)$ είναι ανοικτό διάστημα ή ημιευθεία και τα $(a_k, b_k)$ είναι ξένα ανά δύο.

Θεωρούμε ένα φραγμένο διάστημα $(a_k, b_k)$ από αυτήν την ένωση. Τότε, $a_k \notin E$ και από τον ορισμό του $E$ δεν μπορούμε να έχουμε $g(b_k) > g(a_k)$. Δηλαδή, $g(b_k) \leqslant g(a_k)$.

Ας υποθέσουμε ότι $g(b_k) < g(a_k)$. Από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής υπάρχει $\gamma \in (a_k, b_k)$ ώστε $g(\gamma) = \frac{g(a_k)+g(b_k)}{2}$. Μπορούμε μάλιστα να επιλέξουμε το $\gamma$ να είναι το μέγιστο σημείο του $(a_k, b_k)$ με αυτήν την ιδιότητα. Αφού $\gamma \in E$, υπάρχει $u > \gamma$ με $g(u) > g(\gamma)$. Επίσης, αφού $b_k \notin E$ έχουμε $g(x) \leqslant g(b_k)$ για κάθε $x \geqslant b_k$. Όμως, $g(u) > g(\gamma) > g(b_k)$. Άρα, $u < b_k$. Εφαρμόζοντας ξανά το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής βρίσκουμε $\gamma_1 \in (u, b_k)$ με $g(\gamma_1) = g(\gamma)$. Αυτό είναι άτοπο, γιατί $\gamma_1 > \gamma$ και είχαμε υποθέσει ότι το $\gamma$ είναι το μέγιστο σημείο του $(a_k, b_k)$ στο οποίο η $g$ παίρνει την τιμή $\frac{g(a_k)+g(b_k)}{2}$. □

Τροποποιώντας ελαφρά το επιχείρημα της προηγούμενης απόδειξης παίρνουμε επίσης το εξής.

**Πόρισμα 3.4.3.** *Έστω $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Έστω $E$ το σύνολο των $x \in (a, b)$ για τα οποία υπάρχει $h = h_x > 0$ ώστε*

$$g(x + h) > g(x). \tag{3.4.4}$$

*Τότε, το $E$ είναι είτε κενό ή ανοικτό σύνολο, και στην δεύτερη περίπτωση γράφεται στη μορφή $E = \bigcup_k (a_k, b_k)$, όπου κάθε $(a_k, b_k)$ είναι φραγμένο ανοικτό διάστημα και $g(a_k) = g(b_k)$, με μόνη πιθανή εξαίρεση την περίπτωση όπου $a_k = a$, οπότε έχουμε μόνο την $g(a_k) \leqslant g(b_k)$.*

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 3.4.1 δίνουμε πρώτα κάποιους ορισμούς:

**Ορισμός 3.4.4.** *Για κάθε $x \in [a, b]$ και $h \neq 0$ με $x + h \in [a, b]$ ορίζουμε*

$$\Delta_h(f)(x) = \frac{f(x + h) - f(x)}{h}. \tag{3.4.5}$$

*Οι αριθμοί Dini της $f$ στο $x$ ορίζονται ως εξής:*

$$\begin{aligned} D^+(f)(x) &= \limsup_{h \to 0^+} \Delta_h(f)(x) \\ D_+(f)(x) &= \liminf_{h \to 0^+} \Delta_h(f)(x) \\ D^-(f)(x) &= \limsup_{h \to 0^-} \Delta_h(f)(x) \\ D_-(f)(x) &= \liminf_{h \to 0^-} \Delta_h(f)(x). \end{aligned}$$

**Απόδειξη του Θεωρήματος 3.4.1.** Έστω $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής αύξουσα συνάρτηση. Παρατηρούμε ότι $D_+(g)(x) \leqslant D^+(g)(x)$ και $D_-(g)(x) \leqslant D^-(g)(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$. Για την απόδειξη του θεωρήματος αρκεί να δείξουμε τα εξής:

(α) $D^+(g)(x) < \infty$ σχεδόν παντού στο $[a, b]$, και

(β) $D^+(g)(x) \leqslant D_-(g)(x)$ σχεδόν παντού στο $[a, b]$.

Έχοντας αποδείξει τα παραπάνω, εφαρμόζοντας το (β) για την αύξουσα συνάρτηση $h(x) = -g(-x)$ βλέπουμε ότι $D^-(g)(x) \leqslant D_+(g)(x)$ σχεδόν παντού. Άρα, σχεδόν παντού στο $[a, b]$ έχουμε

$$D^+(g)(x) \leqslant D_-(g)(x) \leqslant D^-(g)(x) \leqslant D_+(g)(x) \leqslant D^+(g)(x) < \infty \tag{3.4.6}$$

και έπεται ότι η $g'(x)$ υπάρχει σχεδόν παντού.

Σταθεροποιούμε $s > 0$ και ορίζουμε

$$E_s := \{x \in [a, b] : D^+(g)(x) > s\}. \tag{3.4.7}$$

Αποδεικνύουμε αρχικά ότι το $E_s$ είναι μετρήσιμο σύνολο (οι λεπτομέρειες αφήνονται για την Άσκηση 12). Εφαρμόζοντας το Πόρισμα 3.4.3 για την συνάρτηση $w(x) = g(x) - sx$ βλέπουμε ότι $E_s \subseteq \bigcup_k (a_k, b_k)$, όπου $g(b_k) - g(a_k) \geqslant s(b_k - a_k)$. Άρα,

$$\lambda(E_s) \leqslant \sum_k (b_k - a_k) \leqslant \frac{1}{s} \sum_k (g(b_k) - g(a_k)) \leqslant \frac{1}{s}(g(b) - g(a)). \tag{3.4.8}$$

Έπεται ότι $\lim_{s\to\infty} \lambda(E_s) = 0$. Αφού $\{x : D^+(g)(x) = \infty\} \subseteq E_s$ για κάθε $s > 0$, συμπεραίνουμε ότι $D^+(g)(x) < \infty$ σχεδόν παντού.

Στη συνέχεια σταθεροποιούμε $R > r$ και ορίζουμε

$$E_{r,R} = \{x \in [a,b] : D^+(g)(x) > R \text{ και } D_-(g)(x) < r\}. \tag{3.4.9}$$

Θα δείξουμε ότι $\lambda(E_{r,R}) = 0$. Παρατηρώντας ότι

$$\{x : D_-(g)(x) < D^+(g)(x)\} = \bigcup_{r,R\in\mathbb{Q}, r<R} E_{r,R} \tag{3.4.10}$$

βλέπουμε μετά ότι $\lambda(\{x : D_-(g)(x) < D^+(g)(x)\}) = 0$, δηλαδή $D^+(g)(x) \leqslant D_-(g)(x)$ σχεδόν παντού, και αυτό αποδεικνύει το (β).

Υποθέτουμε ότι $\lambda(E_{r,R}) > 0$. Αφού $R > r$, μπορούμε να βρούμε ανοικτό σύνολο $U$ ώστε $E_{r,R} \subset U \subset (a,b)$ και $\lambda(U) < (R/r)\lambda(E_{r,R})$. Γράφουμε το $U$ σαν ένωση ξένων ανοικτών διαστημάτων, $U = \bigcup_n I_n$. Σταθεροποιούμε κάποιο $n$ και εφαρμόζουμε το Πόρισμα 3.4.3 για την συνάρτηση $\ell(x) = -g(-x) + rx$ στο διάστημα $-I_n$. Γυρίζοντας πίσω στο $(a,b)$ παίρνουμε μια ξένη ένωση διαστημάτων $\bigcup_k (a_k, b_k)$, η οποία περιέχεται στο $I_n$, τέτοια ώστε

$$g(b_k) - g(a_k) \leqslant r(b_k - a_k). \tag{3.4.11}$$

Εφαρμόζοντας όμως το Πόρισμα 3.4.3 για την $m(x) = g(x) - Rx$ στο $(a_k, b_k)$, βρίσκουμε μια νέα ξένη ένωση διαστημάτων $U_n = \bigcup_{k,j} (a_{k,j}, b_{k,j})$ με $(a_{k,j}, b_{k,j}) \subset (a_k, b_k)$ για κάθε $k$ και $j$, ώστε

$$g(b_{k,j}) - g(a_{k,j}) \geqslant R(b_{k,j} - a_{k,j}). \tag{3.4.12}$$

Από τα παραπάνω έπεται ότι

$$\begin{aligned}
\lambda(U_n) &= \sum_{k,j} (b_{k,j} - a_{k,j}) \leqslant \frac{1}{R} \sum_k \left( \sum_j (g(b_{k,j}) - g(a_{k,j})) \right) \\
&\leqslant \frac{1}{R} \sum_k (g(b_k) - g(a_k)) \leqslant \frac{r}{R} \sum_k (b_k - a_k) \\
&\leqslant \frac{r}{R} \lambda(I_n).
\end{aligned}$$

Αφού $D^+(g)(x) > R$ και $D_-(g)(x) < r$ για κάθε $x \in E_{r,R}$, έχουμε $E_{r,R} \cap I_n \subseteq U_n \subseteq I_n$. Άρα,

$$\begin{aligned}
\lambda(E_{r,R}) &= \sum_n \lambda(E_{r,R} \cap I_n) \leqslant \sum_n \lambda(U_n) \\
&\leqslant \frac{r}{R} \sum_n \lambda(I_n) = \frac{r}{R} \lambda(U) < \lambda(E_{r,R}).
\end{aligned}$$

Αυτό είναι άτοπο, άρα $\lambda(E_{r,R}) = 0$ και η απόδειξη είναι πλήρης. □

Είδαμε ότι οι αύξουσες συνεχείς συναρτήσεις $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες σχεδόν παντού. Αυτό που μπορούμε να πούμε σχετικά με την (3.4.1) είναι το εξής.

**Πρόταση 3.4.5.** *Έστω $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ αύξουσα και συνεχής. Τότε, η $g'$ ορίζεται σχεδόν παντού στο $[a,b]$ και είναι μετρήσιμη και μη αρνητική. Τέλος,*

$$\int_a^b g'(x)d\lambda(x) \leqslant g(b) - g(a). \tag{3.4.13}$$

*Απόδειξη.* Επεκτείνουμε την $g$ σε συνεχή αύξουσα συνάρτηση, θέτοντας $g \equiv g(b)$ στο $[b,\infty)$ και $g \equiv g(a)$ στο $(-\infty, a]$. Η $g'$ ορίζεται σχεδόν παντού από το Θεώρημα 3.4.1. Είναι μετρήσιμη, διότι οι συναρτήσεις

$$u_n(x) = \frac{g\left(x + \frac{1}{n}\right) - g(x)}{1/n} \tag{3.4.14}$$

είναι μετρήσιμες και $u_n(x) \to g'(x)$ σχεδόν παντού στο $[a,b]$. Επίσης, αφού η $g$ είναι αύξουσα, έχουμε $u_n \geqslant 0$ άρα και $g' = \lim\limits_{n\to\infty} u_n \geqslant 0$.

Από το λήμμα του Fatou έχουμε

$$\int_a^b g'(x)d\lambda(x) \leqslant \liminf_n \int_a^b u_n(x)d\lambda(x). \tag{3.4.15}$$

Όμως,

$$\begin{aligned}\int_a^b u_n(x)d\lambda(x) &= n\int_a^b g(x+1/n)d\lambda(x) - n\int_a^b g(x)d\lambda(x)\\ &= n\int_{a+1/n}^{b+1/n} g(y)d\lambda(y) - n\int_a^b g(x)d\lambda(x)\\ &= n\int_b^{b+1/n} g(x)d\lambda(x) - n\int_a^{a+1/n} g(x)d\lambda(x).\end{aligned}$$

Αφού η $g$ είναι συνεχής, έχουμε

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1/n}\int_a^{a+1/n} g(x)d\lambda(x) = g(a) \ \ \text{και} \ \ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1/n}\int_b^{b+1/n} g(x)d\lambda(x) = g(b). \tag{3.4.16}$$

Αυτό αποδεικνύει την (3.4.13). □

**Παρατήρηση 3.4.6.** Η συνάρτηση Cantor-Lebesgue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι αύξουσα και συνεχής. Έχουμε δεί ότι $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in [0,1] \setminus C$. Αφού $\lambda(C) = 0$, έχουμε $f'(x) = 0$ σχεδόν παντού. Θυμηθείτε ότι $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$. Έτσι, έχουμε

$$\int_0^1 f'(x)d\lambda(x) = 0 < 1 = f(1) - f(0). \tag{3.4.17}$$

Το παράδειγμα αυτό δείχνει ότι η ανισότητα στην (3.4.13) μπορεί να είναι γνήσια.

## 3.5 Απόλυτα συνεχείς συναρτήσεις

**Ορισμός 3.5.1.** Μια συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ λέγεται **απολύτως συνεχής** αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν $(a_k, b_k)$, $1 \leqslant k \leqslant N$ είναι ξένα ανά δύο υποδιαστήματα του $[a,b]$ με $\sum\limits_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta$ τότε $\sum_{k=1}^N |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$.

**Παρατηρήσεις 3.5.2.** (α) Από τον ορισμό είναι άμεσο (πάρτε $N = 1$) ότι κάθε απολύτως συνεχής συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής (ισοδύναμα, συνεχής).

(β) Αν η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι απολύτως συνεχής, τότε η $f$ έχει φραγμένη κύμανση. Με βάση τα αποτελέσματα της προηγούμενης παραγράφου, η $f$ γράφεται ως διαφορά $f = \varphi_1 - \varphi_2$ δύο συνεχών αυξουσών συναρτήσεων $\varphi_1, \varphi_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$. Επίσης, η συνάρτηση $v_\varphi(x) = V(\varphi \mid a, x)$ είναι συνεχής, και μάλιστα απολύτως συνεχής στο $[a, b]$.

(γ) Αν $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι μια Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση, τότε η $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ με

$$F(x) = \int_a^x f(x)\, d\lambda(x) \tag{3.5.1}$$

είναι απολύτως συνεχής. Αυτό προκύπτει από το εξής: *Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε, αν $E$ είναι ένα μετρήσιμο υποσύνολο του $[a, b]$ με $\lambda(E) < \delta$ τότε*

$$\int_E f\, d\lambda < \varepsilon. \tag{3.5.2}$$

*Απόδειξη.* Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε την συνάρτηση $g_n(x) = \min\{|f(x)|, n\}$. Παρατηρήστε ότι $g_n \leqslant n$. Η $\{g_n\}$ είναι αύξουσα και $g_n \to |f|$. Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \int g_n\, d\lambda = \int |f|\, d\lambda. \tag{3.5.3}$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Μπορούμε να βρούμε $n \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\int (|f| - g_n)\, d\lambda = \int |f|\, d\lambda - \int g_n\, d\lambda < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.5.4}$$

Επιλέγουμε $\delta = \frac{\varepsilon}{2n}$. Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(E) < \delta$. Γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_E |f|\, d\lambda &= \int_E g_n\, d\lambda + \int_E (|f| - g_n)\, d\lambda \leqslant \int_E g_n\, d\lambda + \int (|f| - g_n)\, d\lambda \\ &\leqslant n\lambda(E) + \frac{\varepsilon}{2} < n\frac{\varepsilon}{2n} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Έστω τώρα $(a_k, b_k)$, $1 \leqslant k \leqslant N$ ξένα ανά δύο υποδιαστήματα του $[a, b]$ με $\sum\limits_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta$. Γράφουμε

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^N |F(b_k) - F(a_k)| &= \sum_{k=1}^N \left| \int_{a_k}^{b_k} f\, d\lambda \right| \leqslant \sum_{k=1}^N \int_{a_k}^{b_k} |f|\, d\lambda \\ &= \int_{\bigcup_{k=1}^N (a_k, b_k)} |f|\, d\lambda < \varepsilon,\end{aligned}$$

διότι

$$\lambda\left( \bigcup_{k=1}^N (a_k, b_k) \right) = \sum_{k=1}^N (b_k - a_k) < \delta. \tag{3.5.5}$$

Έπεται ότι η $F$ είναι απολύτως συνεχής. $\square$

Η τελευταία παρατήρηση δείχνει ότι η απόλυτη συνέχεια είναι αναγκαία συνθήκη που πρέπει να ικανοποιεί μια σχεδόν παντού παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [a, , b] \to \mathbb{R}$ ώστε να έχουμε την

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f(t)\, d\lambda(t) \tag{3.5.6}$$

για κάθε $x \in [a, b]$. Όπως θα δούμε, η συνθήκη αυτή είναι και ικανή.

**Θεώρημα 3.5.3.** *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ απολύτως συνεχής συνάρτηση. Τότε, η $f$ είναι παραγωγίσιμη σχεδόν παντού στο $[a, b]$. Επιπλέον, αν $f'(x) = 0$ σχεδόν παντού, τότε η $f$ είναι σταθερή.*

Το γεγονός ότι η $f$ είναι παραγωγίσιμη σχεδόν παντού προκύπτει από τα αποτελέσματα της προηγούμενης παραγράφου και από την παρατήρηση ότι κάθε απολύτως συνεχής συνάρτηση είναι συνεχής και έχει φραγμένη κύμανση, άρα γράφεται ως διαφορά δύο συνεχών αυξουσών συναρτήσεων. Για να δείξουμε ότι η υπόθεση «$f'(x) = 0$ σχεδόν παντού» συνεπάγεται ότι η $f$ είναι σταθερή, θα χρειαστούμε κάποια λήμματα κάλυψης του Vitali, τα οποία περιγράφουμε στο γενικότερο πλαίσιο του $\mathbb{R}^d$.

**Ορισμός 3.5.4.** Λέμε ότι μια οικογένεια $\mathcal{B} = \{B_j : j \in J\}$ από μπάλες είναι **Vitali κάλυψη** ενός συνόλου $E \subset \mathbb{R}^d$ αν για κάθε $x \in E$ και για κάθε $\eta > 0$ υπάρχει μια μπάλα $B_j \in \mathcal{B}$ τέτοια ώστε $x \in B_j$ και $\lambda(B_j) < \eta$. Δηλαδή, αν κάθε $x \in E$ καλύπτεται από μπάλες της οικογένειας $\mathcal{B}$ με οσοδήποτε μικρό μέτρο.

**Λήμμα 3.5.5.** *Έστω $E$ μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ με $\lambda(E) < \infty$. Αν $\mathcal{B}$ είναι μια Vitali κάλυψη του $E$ τότε, για κάθε $\delta > 0$ μπορούμε να βρούμε πεπερασμένες το πλήθος μπάλες $B_1, \ldots, B_N$ στην $\mathcal{B}$ οι οποίες είναι ξένες ανά δύο και ικανοποιούν την*

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda(B_i) \geqslant \lambda(E) - \delta. \tag{3.5.7}$$

*Απόδειξη.* Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγικά το Λήμμα 3.2.5. Θέτουμε $\gamma = 3^{-d}$. Για δοθέν $0 < \delta < \lambda(E)$, μπορούμε να βρούμε συμπαγές $E' \subseteq E$ με $\lambda(E') \geqslant \delta$. Τότε, το $E'$ καλύπτεται από μια πεπερασμένη υποοικογένεια της $\mathcal{B}$, και το Λήμμα 3.2.5 μας εξασφαλίζει ότι υπάρχουν ξένες ανά δύο μπάλες $B_1, \ldots, B_{N_1} \in \mathcal{B}$ ώστε

$$\sum_{i=1}^{N_1} \lambda(B_i) \geqslant \gamma\lambda(E') \geqslant \gamma\delta. \tag{3.5.8}$$

Κρατάμε τις $B_1, \ldots, B_{N_1}$ και διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(i) Αν $\sum_{i=1}^{N_1} \lambda(B_i) \geqslant \lambda(E) - \delta$ τότε έχουμε ήδη αποδείξει το ζητούμενο.

(ii) Αν $\sum_{i=1}^{N_1} \lambda(B_i) < \lambda(E) - \delta$, ορίζουμε $E_2 = E \setminus \bigcup_{i=1}^{N_1} \overline{B_i}$ και, αφού $\lambda(E_2) \geqslant \lambda(E) - \sum_{i=1}^{N_1} \lambda(B_i) > \delta$, βρίσκουμε συμπαγές $E_2' \subseteq E_2$ με $\lambda(E_2') \geqslant \delta$. Αφού η $\mathcal{B}$ είναι Vitali κάλυψη του $E$, εύκολα ελέγχουμε ότι οι μπάλες της $\mathcal{B}$ που είναι ξένες προς την $\bigcup_{i=1}^{N_1} \overline{B_i}$ εξακολουθούν να καλύπτουν το $E_2'$. Άρα, το $E_2'$ καλύπτεται από μια πεπερασμένη υποοικογένεια της $\mathcal{B}$, και το Λήμμα 3.2.5 μας εξασφαλίζει ότι υπάρχουν ξένες ανά δύο μπάλες $B_{N_1+1},\dots,B_{N_2} \in \mathcal{B}$ ώστε

$$\sum_{i=N_1+1}^{N_2} \lambda(B_i) \geqslant \gamma\lambda(E_2') \geqslant \gamma\delta. \tag{3.5.9}$$

Δηλαδή,

$$\sum_{i=1}^{N_2} \lambda(B_i) \geqslant 2\gamma\delta. \tag{3.5.10}$$

Κρατάμε τις $B_1,\dots,B_{N_2}$ και συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο. Αν $\sum_{i=1}^{N_2} \lambda(B_i) \geqslant \lambda(E)-\delta$ τότε έχουμε ήδη αποδείξει το ζητούμενο. Αν $\sum_{i=1}^{N_2} \lambda(B_i) < \lambda(E)-\delta$, βρίσκουμε ξένες μπάλες $B_{N_2+1},\dots,B_{N_3} \in \mathcal{B}$ ώστε

$$\sum_{i=1}^{N_3} \lambda(B_i) \geqslant 3\gamma\delta. \tag{3.5.11}$$

Αν συνεχίσουμε έτσι, και αν έχουμε κάνει $k$ βήματα, έχουμε επιλέξει ξένες μπάλες από την $\mathcal{B}$ ώστε το άθροισμα των μέτρων τους να είναι μεγαλύτερο ή ίσο από $k\gamma\delta$. Έτσι, είτε θα πετύχουμε το ζητούμενο διότι $\sum_{i=1}^{N_s} \lambda(B_i) \geqslant \lambda(E)-\delta$ στο $s$-βήμα της διαδικασίας, ή κάποια στιγμή θα φτάσουμε στο $k$-βήμα για τον μικρότερο $k$ που ικανοποιεί την $k\gamma\delta \geqslant \lambda(E)-\delta$, οπότε θα έχουμε πάλι το ζητούμενο, διότι

$$\sum_{i=1}^{N_k} \lambda(B_i) \geqslant k\gamma\delta \geqslant \lambda(E)-\delta. \tag{3.5.12}$$

$\square$

Πόρισμα του Λήμματος 3.5.5 είναι το εξής.

**Λήμμα 3.5.6.** *Έστω $E$ μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ με $\lambda(E) < \infty$. Αν $\mathcal{B}$ είναι μια Vitali κάλυψη του $E$ τότε, για κάθε $\delta > 0$ μπορούμε να βρούμε πεπερασμένες το πλήθος μπάλες $B_1,\dots,B_N$ στην $\mathcal{B}$ οι οποίες είναι ξένες ανά δύο και ικανοποιούν την*

$$\lambda\left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{N} B_i\right) < 2\delta. \tag{3.5.13}$$

*Απόδειξη.* Θεωρούμε ανοικτλο σύνολο $G \supseteq E$ με $\lambda(G\setminus E) < \delta$. Οι μπάλες από την $\mathcal{B}$ που, επιπλέον, περιέχονται στο $G$ εξακολουθούν να σχηματίζουν Vitali κάλυψη $\mathcal{B}'$ του $E$. Εφαρμόζοντας το Λήμμα 3.5.5 βρίσκουμε πεπερασμένες το πλήθος μπάλες $B_1,\dots,B_N$ στην $\mathcal{B}'$ οι οποίες είναι ξένες ανά δύο και ικανοποιούν την

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda(B_i) \geqslant \lambda(E)-\delta. \tag{3.5.14}$$

Τότε,

$$\left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{N} B_i\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{N} B_i\right) \subseteq G, \tag{3.5.15}$$

και τα δύο σύνολα στο αριστερό μέλος είναι ξένα. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}\lambda\left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{N} B_i\right) &\leqslant \lambda(G) - \lambda\left(\bigcup_{i=1}^{N} B_i\right)\\ &< \lambda(E) + \delta - (\lambda(E) - \delta) = 2\delta.\end{aligned}$$

□

**Απόδειξη του Θεωρήματος 3.5.3.** Υποθέτουμε ότι η $f$ είναι απολύτως συνεχής και ότι $f'(x) = 0$ σχεδόν παντού, και θα δείξουμε ότι η $f$ είναι σταθερή. Αρκεί να δείξουμε ότι $f(b) = f(a)$, διότι μετά μπορούμε να επαναλάβουμε το ίδιο επιχείρημα στο διάστημα $[a, x]$ και να συμπεράνουμε ότι $f(x) = f(a)$ για κάθε $a < x \leqslant b$. Θεωρούμε το σύνολο $E$ των $x \in (a, b)$ για τα οποία υπάρχει η $f'(x)$ και είναι ίση με μηδέν. Από την υπόθεση έχουμε $\lambda(E) = b - a$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Για κάθε $x \in E$ έχουμε

$$\lim_{h\to 0} \left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right| = 0, \tag{3.5.16}$$

άρα, για κάθε $\eta > 0$ μπορούμε να βρούμε $I_x = (a_x, b_x) \subset [a, b]$ τέτοιο ώστε

$$x \in I_x, \quad b_x - a_x < \eta, \quad \text{και} \quad |f(b_x) - f(a_x)| < \varepsilon(b_x - a_x). \tag{3.5.17}$$

Η οικογένεια όλων αυτών των διαστημάτων είναι κάλυψη του $E$ κατά Vitali. Από το Λήμμα 3.5.6, για κάθε $\delta > 0$ μπορούμε να βρούμε πεπερασμένα το πλήθος τέτοια διαστήματα $I_i = (a_i, b_i)$, $i = 1, \ldots, N$, τα οποία είναι ξένα ανά δύο και ικανοποιούν την

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda(I_i) \geqslant \lambda(E) - \delta = (b - a) - \delta. \tag{3.5.18}$$

Ταυτόχρονα έχουμε $|f(b_i) - f(a_i)| \leqslant \varepsilon(b_i - a_i)$, άρα

$$\sum_{i=1}^{N} |f(b_i) - f(a_i)| \leqslant \varepsilon \sum_{i=1}^{N} (b_i - a_i) \leqslant \varepsilon(b - a), \tag{3.5.19}$$

διότι τα $(a_i, b_i)$ είναι ξένα ανά δύο και περιέχονται στο $[a, b]$.

Το συμπλήρωμα της ένωσης $\bigcup_{i=1}^{N} I_i$ στο $[a, b]$ είναι μια πεπερασμένη ένωση κλειστών διαστημάτων $\bigcup_{j=1}^{N} [u_j, v_j]$, και από την (3.5.19) έχουμε

$$\sum_{j=1}^{M} (v_j - u_j) \leqslant \delta. \tag{3.5.20}$$

Χρησιμοποιώντας την απόλυτη συνέχεια της $f$ μπορούμε να επιλέξουμε το $\delta$ αρκετά μικρό ώστε να έχουμε

$$\sum_{j=1}^{M} |f(v_j) - f(u_j)| \leqslant \varepsilon. \tag{3.5.21}$$

Τότε,

$$\begin{aligned} |f(b) - f(a)| &\leqslant \sum_{i=1}^{N} |f(b_i) - f(a_i)| + \sum_{j=1}^{M} |f(v_j) - f(u_j)| \\ &\leqslant \varepsilon(b-a) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $f(b) - f(a) = 0$. □

Είμαστε τώρα σε θέση να δείξουμε ότι οι απολύτως συνεχείς συναρτήσεις είναι ακριβώς εκείνες οι συναρτήσεις που ικανοποιούν την (3.4.1).

**Θεώρημα 3.5.7.** *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ απολύτως συνεχής συνάρτηση. Τότε, η $f'(x)$ ορίζεται σχεδόν παντού, και η $f'$ είναι ολοκληρώσιμη. Επιπλέον, για κάθε $x \in [a,b]$,*

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,d\lambda(t). \tag{3.5.22}$$

*Ειδικότερα,*

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\,d\lambda(t). \tag{3.5.23}$$

*Αντίστροφα, αν η $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη, τότε υπάρχει απολύτως συνεχής συνάρτηση $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $g'(x) = h(x)$ σχεδόν παντού. Μπορούμε μάλιστα να πάρουμε την $g(x) = \int_a^x h(x)\,d\lambda(x)$.*

*Απόδειξη.* Η $f$ είναι συνεχής συνάρτηση με φραγμένη κύμανση, άρα είναι παραγωγίσιμη σχεδόν παντού, από το Θεώρημα 3.4.1. Επίσης, η $f'$ είναι ολοκληρώσιμη, από την Πρόταση 3.4.5. Ορίζουμε $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ με

$$g(x) = \int_a^x f'(x)\,d\lambda(x). \tag{3.5.24}$$

Τότε, η $g$ είναι απολύτως συνεχής από την Παρατήρηση 3.5.2 (γ). Άρα, η $g - f$ είναι απολύτως συνεχής. Από το θεώρημα παραγώγισης του Lebesgue έχουμε ότι

$$g'(x) = f'(x) \ \text{ σχεδόν παντού.} \tag{3.5.25}$$

Τώρα, το Θεώρημα 3.5.3 δείχνει ότι η $g - f$ είναι σταθερή. Από την $g(x) - f(x) = g(a) - f(a)$ έπεται ότι

$$f(x) - f(a) = g(x) - g(a) = g(x) = \int_a^x f'(t)\,d\lambda(t) \tag{3.5.26}$$

για κάθε $x \in [a,b]$.

Το αντίστροφο προκύπτει άμεσα από το γεγονός ότι αν η $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη τότε η $g(x) = \int_a^x h(x)\,d\lambda(x)$, $x \in [a,b]$, είναι απολύτως συνεχής και, από το θεώρημα παραγώγισης του Lebesgue, $g'(x) = h(x)$ σχεδόν παντού. □

Μια κλάση απολύτως συνεχών συναρτήσεων μας δίνουν οι Lipschitz συνεχείς συναρτήσεις. Αν η $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί την $|f(x) - f(y)| \leqslant L|x-y|$ για κάποια σταθερά $L > 0$ και για κάθε $x, y \in [a,b]$ τότε είναι φανερό ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε πεπερασμένη οικογένεια ξένων ανά δύο υποδιαστημάτων $(a_k, b_k)$, $1 \leqslant k \leqslant N$ του $[a,b]$ με $\sum\limits_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \varepsilon/L$ ισχύει

$$\sum_{k=1}^{N} |f(b_k) - f(a_k)| \leqslant L \sum_{k=1}^{N}(b_k - a_k) < \varepsilon. \tag{3.5.27}$$

Από το Θεώρημα 3.5.7 έπεται άμεσα το εξής.

**Πόρισμα 3.5.8.** *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Lipschitz συνεχής συνάρτηση. Τότε, η $f'(x)$ ορίζεται σχεδόν παντού, και η $f'$ είναι ολοκληρώσιμη. Επιπλέον, για κάθε $x \in [a,b]$,*

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)d\lambda(t). \tag{3.5.28}$$

## 3.6 Ασκήσεις

**Ομάδα Α΄**

**1.** Αποδείξτε το Λήμμα 3.3.4.

**2.** (α) Δείξτε ότι η συνάρτηση $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $\varphi(x) = x \sin\frac{1}{x}$ αν $x \neq 0$ και $\varphi(0) = 0$ είναι συνεχής αλλά έχει άπειρη κύμανση.

(β) Δείξτε ότι η συνάρτηση $\psi : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $\psi(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$ αν $x \neq 0$ και $\psi(0) = 0$ έχει φραγμένη κύμανση.

**3.** (α) Έστω $(\varphi_n)$ ακολουθία συναρτήσεων που ορίζονται στο $[a,b]$. Υποθέτουμε ότι κάθε $\varphi_n$ έχει φραγμένη κύμανση και ότι υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $V(\varphi_n \mid a,b) \leqslant M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $\varphi_n \to \varphi$ κατά σημείο, δείξτε ότι η $\varphi$ έχει φραγμένη κύμανση και $V(\varphi \mid a,b) \leqslant M$.

(β) Η υπόθεση $V(\varphi_n \mid a,b) \leqslant M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ στο (α) είναι ουσιαστική. Δείξτε ότι η ακολουθία συναρτήσεων

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} x \sin\frac{1}{x}, & x \geqslant \frac{1}{2n\pi} \\ 0, & 0 \leqslant x < \frac{1}{2n\pi} \end{cases}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στη συνάρτηση $\varphi$ της Άσκησης 2(α) και ότι κάθε $\varphi_n$ έχει φραγμένη κύμανση (ενώ η $\varphi$ όχι).

**4.** Έστω $(\varphi_n)$ ακολουθία συναρτήσεων που ορίζονται στο $[a,b]$ και έχουν φραγμένη κύμανση. Αν $\varphi_n \to \varphi$ κατά σημείο, δείξτε ότι

$$V(\varphi \mid a,b) \leqslant \liminf_{n\to\infty} V(\varphi_n \mid a,b).$$

[*Υπόδειξη για τις Ασκήσεις 3 και 4:* Δείξτε ότι $V(\varphi_n, P) \to V(\varphi, P)$ για κάθε διαμέριση $P$ του $[a,b]$.]

**5.** Έστω $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε: για κάθε $\varepsilon > 0$, $V(\varphi \mid a+\varepsilon, b) \leqslant M$.

(α) Δείξτε ότι $V(\varphi \mid a,b) < +\infty$.

(β) Ποιά επιπλέον υπόθεση για την $\varphi$ μας εξασφαλίζει ότι $V(\varphi \mid a,b) \leqslant M$;

**6.** Θεωρούμε τη συνάρτηση $I(x) = 0$ αν $x < 0$ και $I(x) = 1$ αν $x \geqslant 0$. Έστω $(c_n)$ μια ακολουθία πραγματικών αριθμών με $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| < +\infty$ και έστω $(x_n)$ ακολουθία διαφορετικών ανά δύο σημείων του $(a, b]$. Αν

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n I(x - x_n), \quad x \in [a, b]$$

δείξτε ότι $\varphi \in BV[a, b]$ και

$$V(\varphi \mid a, b) = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|.$$

**7.** Έστω $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής και κατά τμήματα μονότονη συνάρτηση. Για κάθε $y \in \mathbb{R}$ ορίζουμε $N(y)$ το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\varphi(x) = y$ στο $[a, b]$. Αν $m = \min\{\varphi(x) : a \leqslant x \leqslant b\}$ και $M = \max\{\varphi(x) : a \leqslant x \leqslant b\}$, δείξτε ότι

$$V(\varphi \mid a, b) = \int_m^M N(y) d\lambda(y).$$

**8.** Βρείτε, αν υπάρχει, συνεχή συνάρτηση $\varphi \in BV[a, b]$ η οποία δεν είναι Lipschitz συνεχής.

**9.** Έστω $a, b > 0$. Ορίζουμε

$$f(x) = \begin{cases} x^a \sin(x^{-b}), & 0 < x \leqslant 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Δείξτε ότι η $f$ έχει φραγμένη κύμανση στο $[0, 1]$ αν και μόνο αν $a > b$. Παίρνοντας $a = b$, κατασκευάστε (για κάθε $0 < \alpha < 1$) μια συνάρτηση που ικανοποιεί την Lipschitz συνθήκη τάξης $\alpha$

$$|f(x) - f(y)| \leqslant A|x - y|^{\alpha}$$

για κάποια σταθερά $A > 0$, αλλά δεν έχει φραγμένη κύμανση.

**10.** Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = x^2 \sin(1/x^2)$, $x \neq 0$, και $f(0) = 0$. Δείξτε ότι η $f'(x)$ υπάρχει για κάθε $x$, αλλά η $f'$ δεν είναι ολοκληρώσιμη στο $[-1, 1]$.

**11.** Δείξτε (με βάση τον ορισμό) ότι η συνάρτηση Cantor-Lebesgue δεν είναι απολύτως συνεχής.

**12.** Έστω $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι η

$$D^+(g)(x) = \limsup_{h \to 0^+} \frac{g(x + h) - g(x)}{h}$$

είναι μετρήσιμη συνάρτηση.

**13**. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ απολύτως συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι:

(α) Η $f$ απεικονίζει σύνολα μέτρου μηδέν σε σύνολα μέτρου μηδέν.

(β) Η $f$ απεικονίζει μετρήσιμα σύνολα σε μετρήσιμα σύνολα.

**14.** Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ απολύτως συνεχής, αύξουσα συνάρτηση με $f(a) = A$ και $f(b) = B$. Έστω $g : [A, B] \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση.

(α) Δείξτε ότι η $g(f(x))f'(x)$ είναι μετρήσιμη στο $[a, b]$.

(β) Δείξτε ότι αν η $g$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[A, B]$ τότε η $g(f(x))f'(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και

$$\int_A^B g(y)d\lambda(y) = \int_a^b g(f(x))f'(x)d\lambda(x).$$

**15.** Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ απολύτως συνεχείς συναρτήσεις. Δείξτε ότι η $fg$ είναι απολύτως συνεχής, και

$$\int_a^b f'(x)g(x)d\lambda(x) = -\int_a^b f(x)g'(x)d\lambda(x) + f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

**Ομάδα Β′**

**16.** Έστω $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ μη μηδενική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει $c > 0$ ώστε

$$f^*(x) \geqslant \frac{c}{|x|^d} \quad \text{για κάθε } |x| \geqslant 1,$$

και συμπεράνατε ότι η $f^*$ δεν είναι ολοκληρώσιμη.

**17.** Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \frac{1}{|x|(\log 1/|x|)^2} \quad \text{αν } |x| \leqslant 1/2$$

και $f(x) = 0$ αλλιώς. Δείξτε ότι η $f$ είναι ολοκληρώσιμη. Δείξτε επίσης ότι υπάρχει $c > 0$ ώστε

$$f^*(x) \geqslant \frac{c}{|x|(\log 1/|x|)} \quad \text{για κάθε } |x| \leqslant 1/2,$$

και συμπεράνατε ότι η $f^*$ δεν είναι τοπικά ολοκληρώσιμη.

**18.** Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μη μηδενική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε

$$f_+^*(x) = \sup_{h>0} \int_x^{x+h} |f(y)|\, d\lambda(y).$$

Για κάθε $\alpha > 0$ θέτουμε $E_\alpha^+ = \{x \in \mathbb{R} : f_+^*(x) > \alpha\}$. Δείξτε ότι

$$\lambda(E_\alpha^+) = \frac{1}{\alpha} \int_{E_{\alpha^+}} |f(y)| d\lambda(y).$$

[*Υπόδειξη.* Εφαρμόστε το λήμμα του ανατέλλοντος ηλίου για την $F(x) = \int_a^x |f(y)|d\lambda(y) - \alpha x$.]

**19.** Έστω $F$ κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Θεωρούμε την συνάρτηση

$$\delta(x) = d(x, F) = \inf\{|x - y| : y \in F\}.$$

Ελέγξτε ότι $\delta(x + y) \leqslant |y|$ για κάθε $x \in F$ και για κάθε $y \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι, ισχυρότερα, ισχύει το εξής:

$$\lim_{y \to 0} \frac{\delta(x + y)}{|y|} = 0 \;\; \text{σχεδόν για κάθε } x \in F.$$

**20.** Κατασκευάστε μια αύξουσα συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα: η $f$ είναι ασυνεχής στο $x$ αν και μόνο αν $x \in \mathbb{Q}$.

**21.** Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $D^+(f)(x) \geqslant 0$ για κάθε $x \in [a,b]$. Δείξτε ότι η $f$ είναι αύξουσα.

**22.** Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αν η $f'(x)$ υπάρχει για κάθε $x \in (a,b)$ και $|f'(x)| \leqslant M$, δείξτε ότι $|f(x) - f(y)| \leqslant M|x-y|$ για κάθε $x, y \in [a,b]$ και ότι η $f$ είναι απολύτως συνεχής.

**23.** Έστω $E \subset \mathbb{R}^d$ με $\lambda(E) = 0$. Δείξτε ότι υπάρχει μη αρνητική ολοκληρώσιμη $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ με

$$\liminf_{\substack{\lambda(B)\to 0\\ x\in B}} \frac{1}{\lambda(B)} \int_B f(y)\,d\lambda(y) = \infty$$

για κάθε $x \in E$.

**23.** Έστω $E \subset \mathbb{R}$ με $\lambda(E) = 0$. Δείξτε ότι υπάρχει αύξουσα, απολύτως συνεχής $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $D_+(f)(x) = D_-(f)(x) = \infty$ για κάθε $x \in E$.

**24.** Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η $f$ ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M|x-y|$$

για κάποια σταθερά $M > 0$ και για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ αν και μόνο αν η $f$ είναι απολύτως συνεχής και $|f'(x)| \leqslant M$ σχεδόν για κάθε $x$.

**25.** Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Αποδείξτε τα εξής:

(α) Η $f$ είναι συνεχής.

(β) Η $f$ είναι Lipschitz συνεχής, άρα και απολύτως συνεχής, σε κάθε κλειστό διάστημα $[\gamma,\delta] \subset (a,b)$.

(γ) Η $f'(x)$ υπάρχει σε όλα, εκτός από αριθμήσιμα το πλήθος, τα $x \in (a,b)$, η $f' = D^+(f)$ είναι ολοκληρώσιμη, και

$$f(y) - f(x) = \int_x^y f'(t)\,d\lambda(t)$$

για κάθε $x < y$ στο $(a,b)$.

(δ) Αντίστροφα, αν η $g : (a,b) \to \mathbb{R}$ είναι αύξουσα, τότε για κάθε $\gamma \in (a,b)$ η $f(x) = \int_\gamma^x g(t)\,d\lambda(t)$ είναι κυρτή συνάρτηση στο $(a,b)$.

**26.** Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι η $f'(x)$ υπάρχει για κάθε $x \in (a,b)$ και η $f'$ είναι ολοκληρώσιμη. Δείξτε ότι η $f$ είναι απολύτως συνεχής και

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\,d\lambda(x).$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

# Χώροι $L_p$

## 4.1 Χώροι $L_p$

Έστω $E$ μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ και έστω $1 \leqslant p < \infty$. Θεωρούμε τον γραμμικό χώρο $\mathcal{L}_p(E)$ όλων των μετρήσιμων συναρτήσεων $f : E \to [-\infty, \infty]$ για τις οποίες

$$\int_E |f|^p d\lambda < \infty. \tag{4.1.1}$$

Παρατηρήστε ότι αν $f \in \mathcal{L}_p(E)$ τότε $|f(x)| < \infty$ σχεδόν παντού στο $E$. Ορίζουμε σχέση ισοδυναμίας στον $\mathcal{L}_p(E)$ θέτοντας $f \sim g$ αν $f = g$ $\lambda$-σχεδόν παντού. Το σύνολο $L_p(E)$ των κλάσεων ισοδυναμίας $[f]$, $f \in \mathcal{L}_p(E)$ γίνεται γραμμικός χώρος με πράξεις τις

$$[f] + [g] = [f + g] \ \text{ και } \ a[f] = [af]. \tag{4.1.2}$$

Θα συνεχίσουμε να χρησιμοποιούμε το σύμβολο $f$ για την κλάση $[f]$, εννοώντας ότι η $[f] \in L_p(E)$ αντιπροσωπεύεται από οποιαδήποτε συνάρτηση στοιχείο της. Αν λοιπόν $f \in L_p(E)$, ορίζουμε

$$\|f\|_p = \left(\int_E |f|^p d\lambda\right)^{1/p}. \tag{4.1.3}$$

Η ταύτιση συναρτήσεων που συμπίπτουν σχεδόν παντού γίνεται για να ικανοποιείται η $\|f\|_p = 0 \implies f = 0$. Πράγματι, αν $\int_E |f|^p d\lambda = 0$ τότε $f = 0$ σχεδόν παντού, δηλαδή $[f] = [0]$.

Θα δείξουμε ότι η $\|\cdot\|_p$ είναι νόρμα. Παρατηρούμε αρχικά ότι ο $L_p(E)$ είναι γραμμικός χώρος: Πράγματι, έστω $f, g \in L_p(E)$. Τότε, για κάθε $x \in E$ έχουμε

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x)|^p &\leqslant (|f(x)| + |g(x)|)^p \leqslant \big(2\max\{|f(x)|, |g(x)|\}\big)^p \\ &= 2^p \max\{|f(x)|^p, |g(x)|^p\} \leqslant 2^p(|f(x)|^p + |g(x)|^p), \end{aligned}$$

άρα

$$\int_E |f + g|^p \, d\lambda \leqslant 2^p \left(\int_E |f|^p \, d\lambda + \int_E |g|^p \, d\lambda\right) < \infty, \tag{4.1.4}$$

δηλαδή $f + g \in L_p(E)$.

**Πρόταση 4.1.1.** *Έστω $E$ μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ και έστω $1 \leqslant p < \infty$. Ο χώρος $(L_p(E), \|\cdot\|_p)$ είναι χώρος με νόρμα.*

*Απόδειξη.* Προφανώς, $\|f\|_p \geqslant 0$ για κάθε $f \in L_p(E)$, και είδαμε ότι αν $\|f\|_p = 0$ τότε $f = 0$. Είναι επίσης άμεσο ότι αν $f \in L_p(E)$ και $a \in \mathbb{R}$, τότε

$$\|af\|_p = |a|\|f\|_p.$$

Μένει λοιπόν να δείξουμε την τριγωνική ανισότητα. Αυτή προκύπτει άμεσα από την ανισότητα του Minkowski, την οποία δείχνουμε παρακάτω. □

**Λήμμα 4.1.2** (ανισότητα Young). *Αν $x, y \geqslant 0$ και $p, q > 1$ με $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, τότε*

$$xy \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \tag{4.1.5}$$

*με ισότητα μόνο αν $x^p = y^q$.*

*Απόδειξη.* Η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \ln x$ είναι γνησίως κοίλη. Αν λοιπόν $a_1, \ldots, a_m > 0$ και $t_j \in (0,1)$ με $t_1 + \cdots + t_m = 1$, τότε

$$\sum_{j=1}^{m} t_j \ln a_j \leqslant \ln(t_1 a_1 + \cdots + t_m a_m), \tag{4.1.6}$$

από την ανισότητα Jensen. Έπεται ότι

$$a_1^{t_1} a_2^{t_2} \cdots a_m^{t_m} \leqslant t_1 a_1 + \cdots + t_m a_m \tag{4.1.7}$$

με ισότητα μόνο αν $a_1 = \cdots = a_m$. Η ανισότητα αυτή γενικεύει την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου. Αν $t_1 = \cdots = t_m = 1/m$, παίρνουμε

$$\sqrt[m]{a_1 \cdots a_m} \leqslant \frac{a_1 + \cdots + a_m}{m}. \tag{4.1.8}$$

Ειδική περίπτωση της (4.1.7) είναι η

$$a^t b^{1-t} \leqslant ta + (1-t)b. \tag{4.1.9}$$

Εφαρμόζουμε την ανισότητα (4.1.9) με $a = x^p$, $b = y^q$. Αφού $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, επιλέγοντας $t = \frac{1}{p}$, συμπεραίνουμε ότι

$$xy = a^{1/p} b^{1/q} \leqslant \frac{a}{p} + \frac{b}{q} = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \tag{4.1.10}$$

με ισότητα μόνο αν $x^p = a = b = y^q$. □

**Ορισμός 4.1.3** (συζυγείς εκθέτες). Αν $p, q > 1$ και $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, λέμε ότι οι $p$ και $q$ είναι *συζυγείς εκθέτες*. Συμφωνούμε ότι ο συζυγής εκθέτης του $p = 1$ είναι ο $q = \infty$.

**Πρόταση 4.1.4** (ανισότητα Hölder). *Έστω $E$ μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$, $f \in L_p(E)$ και $g \in L_q(E)$, όπου $p, q > 1$ συζυγείς εκθέτες. Τότε, $fg \in L_1(E)$ και*

$$\int_E |fg| \, d\lambda \leqslant \left( \int_E |f|^p \, d\lambda \right)^{1/p} \left( \int_E |g|^q \, d\lambda \right)^{1/q}, \tag{4.1.11}$$

*δηλαδή*

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q. \tag{4.1.12}$$

*Απόδειξη.* Υποθέτουμε πρώτα ότι

$$\|f\|_p^p = \int_E |f|^p \, d\lambda = 1 \ \text{ και } \ \|g\|_q^q = \int_E |g|^q \, d\lambda = 1. \tag{4.1.13}$$

Από την ανισότητα του Young, για κάθε $x \in X$ ισχύει

$$|f(x)g(x)| \leqslant \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{1}{q}|g(x)|^q. \tag{4.1.14}$$

Ολοκληρώνοντας την τελευταία ανισότητα παίρνουμε

$$\int_E |fg| \, d\lambda \leqslant \frac{1}{p} \int_E |f|^p \, d\lambda + \frac{1}{q} \int_E |g|^q \, d\lambda = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \|f\|_p \|g\|_q. \tag{4.1.15}$$

Στην γενική περίπτωση: μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|f\|_p \neq 0$ και $\|g\|_q \neq 0$ (αλλιώς $f \equiv 0$ ή $g \equiv 0$ $\lambda-$σχεδόν παντού και το αριστερό μέλος της ζητούμενης ανισότητας μηδενίζεται, οπότε δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε). Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f_1 = \frac{f}{\|f\|_p} \ \text{ και } \ g_1 = \frac{g}{\|g\|_q}. \tag{4.1.16}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\int_E |f_1|^p \, d\lambda = \frac{1}{\|f\|_p^p} \int_E |f|^p \, d\lambda = 1 \ \text{ και } \ \int_E |g_1|^q \, d\lambda = \frac{1}{\|g\|_q^q} \int_E |g|^q \, d\lambda = 1. \tag{4.1.17}$$

Από την ειδική περίπτωση της ανισότητας που δείξαμε παραπάνω, έχουμε

$$\int_E |f_1 g_1| \, d\lambda \leqslant 1, \ \text{ δηλαδή, } \ \int_E |fg| \, d\lambda \leqslant \|f\|_p \|g\|_q. \tag{4.1.18}$$

□

**Πρόταση 4.1.5** (ανισότητα Minkowski). *Έστω $E$ μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ και $1 \leqslant p < \infty$. Αν $f, g \in L_p(E)$, τότε*

$$\left( \int_E |f+g|^p \, d\lambda \right)^{1/p} \leqslant \left( \int_E |f|^p \, d\lambda \right)^{1/p} + \left( \int_E |g|^p \, d\lambda \right)^{1/p}, \tag{4.1.19}$$

*δηλαδή*

$$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p. \tag{4.1.20}$$

*Απόδειξη.* Η ανισότητα είναι απλή στην περίπτωση $p=1$. Στη συνέχεια θεωρούμε την περίπτωση $1<p<\infty$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|f+g\|_p>0$. Γράφουμε

$$\begin{aligned}\|f+g\|_p^p &= \int_E |f+g|^p\,d\lambda = \int_E |f+g|^{p-1}|f+g|\,d\lambda\\ &\leqslant \int_E |f+g|^{p-1}|f|\,d\lambda + \int_E |f+g|^{p-1}|g|\,d\lambda\\ &\leqslant \left(\int_E |f+g|^{(p-1)q}\,d\lambda\right)^{1/q}\|f\|_p + \left(\int_E |f+g|^{(p-1)q}\,d\lambda\right)^{1/q}\|g\|_p,\end{aligned}$$

όπου, στο τελευταίο βήμα, εφαρμόσαμε την ανισότητα Hölder για τα ζευγάρια $|f+g|^{p-1},|f|$ και $|f+g|^{p-1},|g|$. Παρατηρούμε ότι $(p-1)q=p$ (οι $p$ και $q$ είναι συζυγείς εκθέτες). Συνεπώς,

$$\left(\int_E |f+g|^{(p-1)q}\,d\lambda\right)^{1/q} = \left(\int_E |f+g|^p\,d\lambda\right)^{1/q} = \|f+g\|_p^{p/q}. \tag{4.1.21}$$

Έπεται ότι

$$\|f+g\|_p^p \leqslant \|f+g\|_p^{p/q}\big(\|f\|_p+\|g\|_p\big). \tag{4.1.22}$$

Χρησιμοποιώντας την $p-\frac{p}{q}=1$ συμπεραίνουμε ότι

$$\|f+g\|_p = \frac{\|f+g\|_p^p}{\|f+g\|_p^{p/q}} \leqslant \|f\|_p+\|g\|_p. \tag{4.1.23}$$

□

## 4.2 Θεώρημα Riesz-Fischer

Σε αυτήν την παράγραφο δείχνουμε την πληρότητα του $L_p(E)$, $1\leqslant p<\infty$. Ορίζουμε επίσης τον χώρο $L_\infty(E)$ και αποδεικνύουμε ότι είναι πλήρης. Τέλος, δείχνουμε ότι αν $1\leqslant p<\infty$ τότε οι απλές ολοκληρώσιμες συναρτήσεις και οι συνεχείς συναρτήσεις με συμπαγή φορέα είναι πυκνές στον $L_p(E)$.

### 4.2.1 Θεώρημα Riesz-Fischer

**Θεώρημα 4.2.1** (Riesz-Fischer)**.** *Έστω $E$ μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ και $1\leqslant p<\infty$. Ο $L_p(E)$ είναι χώρος Banach.*

Για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε ένα γενικό κριτήριο. Δίνουμε πρώτα κάποιους ορισμούς.

**Ορισμός 4.2.2.** Έστω $(x_n)$ ακολουθία σε έναν χώρο $X$ με νόρμα. Λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^\infty x_n$ συγκλίνει αν υπάρχει $x\in X$ ώστε

$$S_n := \sum_{k=1}^n x_k \to x. \tag{4.2.1}$$

Λέμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^\infty x_k$ συγκλίνει απολύτως αν $\sum_{k=1}^\infty \|x_k\| < +\infty$.

**Λήμμα 4.2.3.** *Έστω $X$ ένας χώρος με νόρμα. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(α) *O $X$ είναι πλήρης.*

(β) *Αν $(x_k)$ είναι ακολουθία στον $X$ με $\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|<+\infty$, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}x_k$ συγκλίνει.*

*Απόδειξη.* Υποθέτουμε πρώτα ότι ο $X$ είναι πλήρης. Έστω $(x_k)$ ακολουθία στον $X$, με την ιδιότητα $\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|<\infty$. Για τυχόν $\varepsilon>0$, υπάρχει $n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ ώστε, για κάθε $n>m\geqslant n_0$,

$$\|x_{m+1}\|+\cdots+\|x_n\|<\varepsilon. \tag{4.2.2}$$

Τότε, αν $n>m\geqslant n_0$,

$$\|s_n-s_m\|=\|x_{m+1}+\cdots+x_n\|\leqslant\|x_{m+1}\|+\cdots+\|x_n\|<\varepsilon. \tag{4.2.3}$$

Το $\varepsilon>0$ ήταν τυχόν, άρα η $(s_n)$ είναι Cauchy. O $X$ είναι πλήρης, άρα η $s_n$ συγκλίνει σε κάποιο $x\in X$.

Αντίστροφα, έστω $(x_k)$ ακολουθία Cauchy στον $X$. Για $\varepsilon=\frac{1}{2^k}$, $k=1,2,\ldots$, μπορούμε να βρούμε $s_1<s_2<\cdots<s_k<\cdots$ ώστε, για κάθε $n>m\geqslant s_k$,

$$\|x_n-x_m\|<\frac{1}{2^k}. \tag{4.2.4}$$

Ειδικότερα,

$$s_{k+1}>s_k\geqslant s_k\Longrightarrow\|x_{s_{k+1}}-x_{n_k}\|<\frac{1}{2^k} \tag{4.2.5}$$

για κάθε $k\in\mathbb{N}$. Άρα,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|x_{s_{k+1}}-x_{s_k}\|<1<+\infty. \tag{4.2.6}$$

Η $\sum_{k=1}^{\infty}(x_{s_{k+1}}-x_{s_k})$ συγκλίνει απολύτως, οπότε (από την υπόθεσή μας) συγκλίνει: υπάρχει $x\in X$ ώστε

$$\sum_{k=1}^{m}(x_{s_{k+1}}-x_{s_k})\to x, \tag{4.2.7}$$

δηλαδή, $x_{s_{m+1}}-x_{s_1}\to x$. Άρα, $x_{s_k}\to x+x_{s_1}$. Δείξαμε ότι η $(x_k)$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Είναι όμως και ακολουθία Cauchy, άρα συγκλίνει στον $X$. Έπεται ότι ο $X$ είναι πλήρης. □

**Απόδειξη του Θεωρήματος 4.2.1**. Έστω $(f_k)$ ακολουθία στον $L_p(E)$ με την ιδιότητα

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|f_k\|_p=M<+\infty. \tag{4.2.8}$$

Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ ορίζουμε $g_n(x)=\sum_{k=1}^{n}|f_k(x)|$, $x\in X$. Τότε,

$$\|g_n\|_p\leqslant\sum_{k=1}^{n}\|f_k\|_p\leqslant M, \tag{4.2.9}$$

δηλαδή $g_n \in L_p(E)$ και $\int_E g_n^p d\lambda \leqslant M^p$. Η $(g_n)$ είναι αύξουσα, άρα ορίζεται η $g(x) = \lim g_n(x) \in [0, \infty]$. Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης,

$$\int_E g^p d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_E g_n^p d\lambda \leqslant M^p. \tag{4.2.10}$$

Συνεπώς, η $g^p$ είναι ολοκληρώσιμη. Έπεται ότι $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| < +\infty$ σχεδόν παντού.

Ορίζουμε $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$. Από την $g(x) < +\infty$ έχουμε ότι η $s(x) = \lim s_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ ορίζεται και παίρνει πεπερασμένη τιμή σχεδόν παντού. Η $s$ είναι μετρήσιμη και από την $|s_n(x)| \leqslant g_n(x) \leqslant g(x)$ συμπεραίνουμε ότι $|s(x)| \leqslant g(x)$ σχεδόν παντού. Έπεται ότι

$$\int_E |s|^p d\lambda \leqslant \int_E g^p d\lambda \leqslant M^p < \infty, \tag{4.2.11}$$

δηλαδή $s \in L_p(E)$. Τέλος, παρατηρούμε ότι

$$|s_n(x) - s(x)|^p \leqslant 2^p \max\{|s_n(x)|^p, |s(x)|^p\} \leqslant 2^p |g(x)|^p \tag{4.2.12}$$

σχεδόν παντού. Αφού $|s_n(x) - s(x)|^p \to 0$ σχεδόν παντού, χρησιμοποιώντας το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης βλέπουμε ότι

$$\int_E |s_n - s|^p d\lambda \to 0. \tag{4.2.13}$$

Αυτό δείχνει ότι $\|s_n - s\|_p \to 0$. Από το Λήμμα 4.2.3 έπεται ότι ο $L_p(E)$ είναι χώρος Banach. □

### 4.2.2 Ο χώρος $L_\infty(E)$

Στην περίπτωση $p = \infty$, ο χώρος $L_\infty(E)$ αποτελείται από τις μετρήσιμες $f$ που είναι «φραγμένες σχεδόν παντού». Ο ακριβής ορισμός είναι ο εξής.

**Ορισμός 4.2.4.** Έστω $E$ μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Η κλάση $\mathcal{L}_\infty(E)$ αποτελείται από όλες τις μετρήσιμες συναρτήσεις $f : E \to [-\infty, \infty]$ για τις οποίες υπάρχει $\beta > 0$ ώστε

$$\lambda\left(\{x \in E : |f(x)| > \beta\}\right) = 0. \tag{4.2.14}$$

Για μια τέτοια $f$, θέτουμε $\|f\|_\infty$ το infimum όλων αυτών των $\beta$. Παρατηρήστε ότι το infimum είναι minimum: αν $(\beta_n)$ είναι μία γνησίως φθίνουσα ακολουθία με $\beta_n \to \|f\|_\infty$, τότε

$$\lambda\left(\{x \in E : |f(x)| > \beta_n\}\right) = 0 \tag{4.2.15}$$

για κάθε $n$ και $\{x \in E : |f(x)| > \|f\|_\infty\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in E : |f(x)| > \beta_n\}$, άρα

$$\lambda\left(\{x \in E : |f(x)| > \|f\|_\infty\}\right) = 0. \tag{4.2.16}$$

Εύκολα βλέπουμε ότι ο $\mathcal{L}_\infty(E)$ είναι γραμμικός χώρος. Αν για κάποια $f \in \mathcal{L}_\infty(E)$ ισχύει $\|f\|_\infty = 0$, τότε συμπεραίνουμε ότι $f = 0$ σχεδόν παντού. Έτσι, για $f, g \in \mathcal{L}_\infty(E)$, θέτουμε $f \sim g$ αν $f = g$ σχεδόν παντού στο $E$.

**Ορισμός 4.2.5.** Έστω $E$ μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Τότε, το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας του χώρου $\mathcal{L}_\infty(E)$ ως προς τη σχέση $\sim$ συμβολίζεται με $L_\infty(E)$. Ο $L_\infty(E)$ γίνεται γραμμικός χώρος με τις προφανείς πράξεις.

Θα γράφουμε, όπως και πριν, $f \in L_\infty(E)$ αντί για $[f] \in L_\infty(E)$. Τέλος, για μια $f \in L_\infty(E)$ θέτουμε

$$\|f\|_\infty = \min\{\beta > 0 : \lambda(\{x \in E : |f(x)| > \beta\})\}. \tag{4.2.17}$$

Λέμε ότι ο $\|f\|_\infty$ είναι το *ουσιώδες supremum* της $f$.

**Πρόταση 4.2.6.** *Έστω $E$ μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Ο χώρος $(L_\infty(E), \|\cdot\|_\infty)$ είναι χώρος με νόρμα.*

*Απόδειξη.* Αφήνεται ως άσκηση. □

**Θεώρημα 4.2.7.** *Έστω $E$ μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Ο χώρος με νόρμα $(L_\infty(E), \|\cdot\|_\infty)$ είναι χώρος Banach.*

*Απόδειξη.* Θεωρούμε τα σύνολα

$$A_{n,m} = \{x \in E : |f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \|f_n - f_m\|_\infty\}, \qquad n, m \in \mathbb{N} \tag{4.2.18}$$

για τα οποία ισχύει $\lambda(E \setminus A_{n,m}) = 0$. Έτσι, αν ορίσουμε $A = \bigcap_{n,m} A_{n,m}$ έχουμε $\lambda(E \setminus A) = 0$ και

$$\sup_{x \in A} |f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \|f_n - f_m\|_\infty \tag{4.2.19}$$

για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$, άρα η $\{f_n\}$ είναι ομοιόμορφα Cauchy στο $A$ και συνεπώς ομοιόμορφα συγκλίνουσα. Υπάρχει λοιπόν μια μετρήσιμη συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$ ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $A$. Δηλαδή,

$$\|f_n - f\|_\infty = \|(f_n - f)\chi_A\|_\infty \leqslant \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \to 0. \tag{4.2.20}$$

Αυτό δείχνει ότι $f \in L_\infty(E)$ και $f_n \to f$ στον $L_\infty(E)$. □

### 4.2.3 Προσέγγιση συναρτήσεων στον $L_p$

Σε αυτήν την παράγραφο παρουσιάζουμε δύο βασικά αποτελέσματα προσέγγισης των συναρτήσεων που ανήκουν σε χώρους $L_p$.

**Θεώρημα 4.2.8.** *Έστω $E$ μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ και έστω $1 \leqslant p < \infty$. Θεωρούμε την οικογένεια $\mathcal{S}$ που αποτελείται από όλες τις απλές μετρήσιμες συναρτήσεις $\varphi : E \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει*

$$\lambda(\{x \in E : \varphi(x) \neq 0\}) < \infty. \tag{4.2.21}$$

*Η $\mathcal{S}$ είναι πυκνή στον $L_p(E)$.*

*Απόδειξη.* Αρχικά παρατηρούμε ότι αν $\varphi \in \mathcal{S}$ είναι μια απλή συνάρτηση με κανονική μορφή

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{A_j},$$

όπου τα $A_j \in \mathcal{M}$ είναι ξένα και αν $a_j \neq 0$ τότε $\lambda(A_j) < \infty$, έχουμε

$$\int_E |\varphi|^p \, d\lambda = \sum_{j=1}^n |a_j|^p \lambda(A_j) < \infty.$$

Δηλαδή $\mathcal{S} \subseteq L_p(E)$.

Έστω $f \in L_p(E)$, $f \geqslant 0$. Τότε, υπάρχει αύξουσα ακολουθία απλών συναρτήσεων $\{\varphi_n\}$ με $0 \leqslant \varphi_n \leqslant f$ και $\varphi_n \nearrow f$. Αφού $0 \leqslant \varphi_n \leqslant f$, έχουμε $\varphi_n \in L_p(E)$ για κάθε $n$, άρα $\varphi_n \in \mathcal{S}$ (άσκηση). Επιπλέον, $|f - \varphi_n|^p \leqslant f^p$ και αφού $f \in L_p(E)$, το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης δείχνει ότι

$$\int_E |\varphi_n - f|^p \, d\lambda \to 0,$$

δηλαδή ότι $\|\varphi_n - f\|_p \to 0$. Άρα, οι μη αρνητικές συναρτήσεις στον $L_p(E)$ προσεγγίζονται από απλές ως προς την $\|\cdot\|_p$. Για την γενική περίπτωση, αν $f \in L_p(E)$, γράφουμε $f = f^+ - f^-$ και βρίσκουμε $\varphi_n, \psi_n \in \mathcal{S}$ με $\|\varphi_n - f^+\|_p \to 0$ και $\|\psi_n - f^-\|_p \to 0$. Τότε, οι $\zeta_n := \varphi_n - \psi_n$ ανήκουν στην $\mathcal{S}$ και

$$\|\zeta_n - f\|_p = \|(\varphi_n - \psi_n) - (f^+ - f^-)\|_p \leqslant \|\varphi_n - f^+\|_p + \|\psi_n - f^-\|_p \to 0,$$

το οποίο αποδεικνύει το ζητούμενο. □

**Ορισμός 4.2.9** (φορέας)**.** *Έστω $E$ μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ και έστω $f : E \to \mathbb{R}$. Το κλειστό σύνολο*

$$\mathrm{supp}(f) = \overline{\{x \in E : f(x) \neq 0\}} \tag{4.2.22}$$

*λέγεται φορέας της $f$.*

Θεωρούμε τον υπόχωρο $C_c(\mathbb{R}^d)$ του χώρου $C(\mathbb{R}^d)$ των συνεχών συναρτήσεων $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ που αποτελείται από όλες τις συνεχείς $f$ που έχουν συμπαγή φορέα, δηλαδή μηδενίζονται έξω από κάποιο συμπαγές σύνολο $K = K(f) \subseteq \mathbb{R}^d$. Θα δείξουμε ότι κάθε $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$, όπου $1 \leqslant p < \infty$, προσεγγίζεται από συνεχείς συναρτήσεις με συμπαγή φορέα.

**Θεώρημα 4.2.10.** *Έστω $1 \leqslant p < \infty$. Το σύνολο $C_c(\mathbb{R}^d)$ των συνεχών συναρτήσεων με συμπαγή φορέα του $\mathbb{R}^d$ είναι πυκνό στον $L_p(\mathbb{R}^d)$.*

*Απόδειξη.* Λογω του Θεωρήματος 4.2.8, αρκεί να δείξουμε ότι κάθε απλή συνάρτηση $\varphi \in \mathcal{S}$, που επιπλέον έχει συμπαγή φορέα (άσκηση), προσεγγίζεται από συνεχείς συναρτήσεις με συμπαγή φορέα. Λόγω γραμμικότητας του ολοκληρώματος, μπορούμε εύκολα να αναχθούμε στην περίπτωση που $\varphi = \chi_A$ για κάποιο $A \subseteq \mathbb{R}^d$ με $\lambda(A) < \infty$. Από την κανονικότητα του μέτρου Lebesgue, για το τυχόν $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε συμπαγές $K_\varepsilon$ και ανοικτό $U_\varepsilon$ ώστε $K_\varepsilon \subseteq A \subseteq U_\varepsilon$ και $\lambda(U_\varepsilon \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon^p$. Χρησιμοποιώντας το λήμμα του Urysohn μπορούμε να ορίσουμε $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$ που ικανοποιεί τις $0 \leqslant f \leqslant 1$, $f \equiv 0$ στο $U_\varepsilon^c$ και $f \equiv 1$ στο $K_\varepsilon$. Τότε, $|f - \chi_A| \leqslant 1$ και $f = \chi_A$ στο $K_\varepsilon \cup U_\varepsilon^c$, άρα

$$\|f - \chi_A\|_p \leqslant [\lambda(U_\varepsilon \setminus K_\varepsilon)]^{1/p} < \varepsilon.$$

□

Κλείνουμε αυτήν την παράγραφο με μια Πρόταση που θα μας φανεί χρήσιμη αρκετές φορές.

**Πρόταση 4.2.11.** *Έστω $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant p < \infty$. Τότε,*

$$\lim_{|z|\to 0} \|f(x+z) - f(x)\|_p := \lim_{|z|\to 0} \left( \int_{\mathbb{R}^d} |f(x+z) - f(x)|^p d\lambda(x) \right)^{1/p} = 0.$$

*Απόδειξη.* Θεωρούμε πρώτα $g$ συνεχή, η οποία μηδενίζεται έξω από κάποια μπάλα $\widehat{B}(r) = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| \leqslant r\}$. Η $g$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, άρα για το τυχόν $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε $\delta \in (0,1)$ τέτοιο ώστε: αν $u, v \in \mathbb{R}^d$ και $|u - v| \leqslant \delta$ τότε $|f(u) - f(v)| \leqslant \varepsilon$. Τότε, αν $|z| < \delta$ έχουμε $f(x+z) = 0$ έξω από τη μπάλα $\widehat{B}(r+1)$ και

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x+z) - f(x)|^p d\lambda(x) = \int_{\widehat{B}(r+1)} |f(x+z) - f(x)|^p d\lambda(x) \leqslant \varepsilon^p \lambda(\widehat{B}(r+1)),$$

δηλαδή

$$\|f(x+z) - f(x)\|_p \leqslant [\lambda(\widehat{B}(r+1))]^{1/p} \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $\lim_{|z|\to 0} \|f(x+z) - f(x)\|_p = 0$.

Έστω τώρα $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ και έστω $\varepsilon > 0$. Μπορούμε να βρούμε $g$ συνεχή, η οποία μηδενίζεται έξω από κάποια μπάλα $B(r)$, με την ιδιότητα $\|f(x) - g(x)\|_p \leqslant \varepsilon$. Τότε, για κάθε $z \in \mathbb{R}^d$ έχουμε $\|f(x+z) - g(x+z)\|_p \leqslant \varepsilon$. Γράφουμε

$$\begin{aligned} \|f(x+z) - f(x)\|_p &\leqslant \|f(x+z) - g(x+z)\|_p + \|g(x+z) - g(x)\|_p + \|g(x) - f(x)\|_p \\ &\leqslant 2\varepsilon + \|g(x+z) - g(x)\|_p \end{aligned}$$

για κάθε $z \in \mathbb{R}^d$, και αφήνοντας το $z \to 0$ έχουμε

$$\limsup_{z\to 0} \|f(x+z) - f(x)\|_p \leqslant 2\varepsilon$$

διότι $\lim_{|z|\to 0} \|g(x+z) - g(x)\|_p = 0$.

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται ότι $\lim_{|z|\to 0} \|f(x+z) - f(x)\|_p = 0$. □

## 4.3 Θεώρημα Fubini

Έστω $d_1, d_2$ θετικοί ακέραιοι και $d = d_1 + d_2$. Γράφουμε τον $\mathbb{R}^d$ στη μορφή $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$ και συμβολίζουμε τα σημεία του $\mathbb{R}^d$ με $(x, y)$, όπου $x \in \mathbb{R}^{d_1}$ και $y \in \mathbb{R}^{d_2}$. Για κάθε συνάρτηση $f : \mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2} \to \mathbb{R}$ ορίζουμε:

(i) Για κάθε $x \in \mathbb{R}^{d_1}$ την συνάρτηση $f_x : \mathbb{R}^{d_2} \to \mathbb{R}$ με $f_x(y) := f(x, y)$.

(ii) Για κάθε $y \in \mathbb{R}^{d_2}$ την συνάρτηση $f^y : \mathbb{R}^{d_1} \to \mathbb{R}$ με $f^y(x) := f(x, y)$.

Τελείως ανάλογα, για κάθε σύνολο $E \subseteq \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$ ορίζουμε:

(i) Για κάθε $x \in \mathbb{R}^{d_1}$ το σύνολο $E_x := \{y \in \mathbb{R}^{d_2} : (x, y) \in E\}$.

(ii) Για κάθε $y \in \mathbb{R}^{d_2}$ το σύνολο $E^y := \{x \in \mathbb{R}^{d_1} : (x, y) \in E\}$.

Το θεώρημα του Fubini μας επιτρέπει να υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης $f:\mathbb{R}^d=\mathbb{R}^{d_1}\times\mathbb{R}^{d_2}\to\mathbb{R}$ ολοκληρώνοντας «πρώτα ως προς $x$ και μετά ως προς $y$» ή «πρώτα ως προς $y$ και μετά ως προς $x$».

**Θεώρημα 4.3.1** (Fubini)**.** *Έστω $f:\mathbb{R}^{d_1}\times\mathbb{R}^{d_2}\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε, σχεδόν για κάθε $y\in\mathbb{R}^{d_2}$ η συνάρτηση $f^y$ είναι ολοκληρώσιμη στον $\mathbb{R}^{d_1}$ και η συνάρτηση*

$$y\mapsto\int_{\mathbb{R}^{d_1}}f^y(x)d\lambda_{d_1}(x) \tag{4.3.1}$$

*είναι ολοκληρώσιμη στον $\mathbb{R}^{d_2}$. Επιπλέον,*

$$\int_{\mathbb{R}^d}fd\lambda_d=\int_{\mathbb{R}^{d_2}}\left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}}f(x,y)d\lambda_{d_1}(x)\right)d\lambda_{d_2}(y). \tag{4.3.2}$$

Το Θεώρημα 4.3.1 είναι φυσικά συμμετρικό ως προς $x$ και $y$. Δηλαδή, αν $f:\mathbb{R}^{d_1}\times\mathbb{R}^{d_2}\to\mathbb{R}$ είναι μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση, τότε με τον ίδιο ακριβώς τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι σχεδόν για κάθε $x\in\mathbb{R}^{d_1}$ η συνάρτηση $f_x$ είναι ολοκληρώσιμη στον $\mathbb{R}^{d_2}$ και η συνάρτηση

$$x\mapsto\int_{\mathbb{R}^{d_2}}f_x(y)d\lambda_{d_2}(y) \tag{4.3.3}$$

είναι ολοκληρώσιμη στον $\mathbb{R}^{d_1}$, και ότι

$$\int_{\mathbb{R}^d}fd\lambda_d=\int_{\mathbb{R}^{d_1}}\left(\int_{\mathbb{R}^{d_2}}f(x,y)d\lambda_{d_2}(y)\right)d\lambda_{d_1}(x). \tag{4.3.4}$$

Δηλαδή, μπορούμε να κάνουμε εναλλαγή στη σειρά ολοκλήρωσης:

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}}\left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}}f(x,y)d\lambda_{d_1}(x)\right)d\lambda_{d_2}(y)=\int_{\mathbb{R}^{d_1}}\left(\int_{\mathbb{R}^{d_2}}f(x,y)d\lambda_{d_2}(y)\right)d\lambda_{d_1}(x)=\int_{\mathbb{R}^d}fd\lambda_d. \tag{4.3.5}$$

Η απόδειξη του Θεωρήματος 4.3.1 έχει αρκετά λεπτά σημεία. Αν γνωρίζουμε ότι η $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη, δεν είναι απαραίτητα σωστό ότι για κάθε $y\in\mathbb{R}^{d_2}$ η συνάρτηση $f^y$ είναι μετρήσιμη. Παρομοίως, αν το $E\subset\mathbb{R}^d$ είναι μετρήσιμο, δεν είναι απαραίτητα σωστό ότι για κάθε $y\in\mathbb{R}^{d_2}$ το σύνολο $E^y$ είναι μετρήσιμο (για παράδειγμα, θεωρήστε το $E=N\times\{0\}$ στο $\mathbb{R}^2$, όπου $N$ είναι ένα μη μετρήσιμο υποσύνολο του $[0,1]$ – τότε, $\lambda_2(E)=0$ αλλά το $E^0=N$ δεν είναι μετρήσιμο).

**Απόδειξη του Θεωρήματος 4.3.1.** Ορίζουμε $\mathcal{F}$ την κλάση των συναρτήσεων $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ που ικανοποιούν τα τρία συμπεράσματα του θεωρήματος, και θα αποδείξουμε ότι $L_1(\mathbb{R}^d)\subseteq\mathcal{F}$. Η απόδειξη θα γίνει σε έξι βήματα.

**Βήμα 1.** *Κάθε πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός συναρτήσεων από την $\mathcal{F}$ ανήκει κι αυτός στην $\mathcal{F}$.*

Πράγματι, έστω $f_1,\dots,f_k\in\mathcal{F}$ και έστω $a_1,\dots,a_k\in\mathbb{R}$. Για κάθε $i=1,\dots,k$ υπάρχει σύνολο $Z_i\subset\mathbb{R}^{d_2}$ με $\lambda_{d_2}(Z_i)=0$ ώστε για κάθε $y\notin Z_i$ η $f_i^y$ να είναι ολοκληρώσιμη. Αν θέσουμε $Z=Z_1\cup\cdots\cup Z_k$, τότε $\lambda_{d_2}(Z)=0$ και για κάθε $y\notin Z$ έχουμε ότι οι $f_i^y$ είναι ολοκληρώσιμες. Έπεται ότι η

$$(a_1f_1+\cdots+a_kf_k)^y=a_1f_1^y+\cdots+a_kf_k^y$$

είναι ολοκληρώσιμη για κάθε $y \notin Z$. Από την γραμμικότητα του ολοκληρώματος συμπεραίνουμε τώρα ότι η

$$y \mapsto \int_{\mathbb{R}^{d_1}} (a_1 f_1 + \cdots + a_k f_k)^y(x) d\lambda_{d_1}(x) = \sum_{i=1}^k a_i \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f_i^y(x) d\lambda_{d_1}(x)$$

είναι ολοκληρώσιμη, και

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{d_2}} & \left( \int_{\mathbb{R}^{d_1}} (a_1 f_1 + \cdots + a_k f_k)(x,y) d\lambda_{d_1}(x) \right) d\lambda_{d_2}(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left( \sum_{i=1}^k a_i \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f_i(x,y) d\lambda_{d_1}(x) \right) d\lambda_{d_2}(y) \\ &= \sum_{i=1}^k a_i \int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left( \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f_i(x,y) d\lambda_{d_1}(x) \right) d\lambda_{d_2}(y) \\ &= \sum_{i=1}^k a_i \int_{\mathbb{R}^d} f_i d\lambda_d = \int_{\mathbb{R}^d} (a_1 f_1 + \cdots + a_k f_k) d\lambda_d.\end{aligned}$$

Άρα, $a_1 f_1 + \cdots + a_k f_k \in \mathcal{F}$.

**Βήμα 2.** *Έστω $(f_k)$ μια αύξουσα ή φθίνουσα ακολουθία συναρτήσεων στην $\mathcal{F}$, η οποία συγκλίνει κατά σημείο σε κάποια ολοκληρώσιμη $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Τότε, $f \in \mathcal{F}$.*

Παίρνοντας τις $-f_k$ στην θέση των $f_k$ αν χρειαστεί, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f_k \nearrow f$. Μπορούμε επίσης (χρησιμοποιώντας και το Βήμα 1) να αντικαταστήσουμε τις $f_k$ με τις $f_k - f_1$ και να υποθέσουμε ότι οι $f_k$ είναι μη αρνητικές. Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης έχουμε

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_k d\lambda_d = \int_{\mathbb{R}^d} f d\lambda_d. \tag{4.3.6}$$

Αφού $f_k \in \mathcal{F}$, για κάθε $k$ υπάρχει $A_k \subset \mathbb{R}^{d_2}$ με $\lambda_{d_2}(A_k) = 0$ ώστε: αν $y \notin A_k$ τότε η $f_k^y$ είναι ολοκληρώσιμη στον $\mathbb{R}^{d_1}$. Θέτουμε $A = \bigcup_{k=1}^\infty A_k$. Τότε, $\lambda_{d_2}(A) = 0$ και αν $y \notin A$ έχουμε ότι η $f_k^y$ είναι ολοκληρώσιμη στον $\mathbb{R}^{d_1}$ για κάθε $k$. Επίσης, από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης έχουμε

$$g_k(y) := \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f_k^y(x) d\lambda_{d_1}(x) \to g(y) := \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f^y(x) d\lambda_{d_1}(x).$$

Αφού $f_k \in \mathcal{F}$ έχουμε επίσης ότι κάθε $g_k$ είναι ολοκληρώσιμη και, πάλι από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης,

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} g_k(y) d\lambda_{d_2}(y) \to \int_{\mathbb{R}^{d_2}} g(y) d\lambda_{d_2}(y). \tag{4.3.7}$$

Αφού $f_k \in \mathcal{F}$, έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} g_k(y) d\lambda_{d_2}(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f_k d\lambda_d.$$

συνδυάζοντας αυτήν την σχέση με τις (4.3.6) και (4.3.7) παίρνουμε

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} g(y) d\lambda_{d_2}(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f d\lambda_d.$$

Η $f$ είναι ολοκληρώσιμη, άρα το δεξιό μέλος είναι πεπερασμένο. Συνεπώς, η $g$ είναι ολοκληρώσιμη. Έπεται ότι $g(y) < \infty$ σχεδόν παντού, δηλαδή η $f^y$ είναι ολοκληρώσιμη σχεδόν για κάθε $y$, και

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left( \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f(x,y) d\lambda_{d_1}(x) \right) d\lambda_{d_2}(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f d\lambda_d.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι $f \in \mathcal{F}$.

**Βήμα 3.** *Αν το $E$ είναι $G_\delta$-σύνολο και $\lambda_d(E) < \infty$, τότε η $\chi_E$ ανήκει στην $\mathcal{F}$.*

(α) Υποθέτουμε πρώτα ότι το $E$ είναι ένας φραγμένος ανοικτός κύβος, δηλαδή $E = Q_1 \times Q_2$ όπου $Q_1$ και $Q_2$ είναι ανοικτοί κύβοι στον $\mathbb{R}^{d_1}$ και τον $\mathbb{R}^{d_2}$ αντίστοιχα. Τότε, η $(\chi_E)^y$ είναι ολοκληρώσιμη για κάθε $y$, με ολοκλήρωμα $\lambda_{d_1}(Q_1)$ αν $y \in Q_2$ και ολοκλήρωμα ίσο με μηδέν αν $y \notin Q_2$. Άρα, η $g = \lambda_{d_1}(Q_1)\chi_{Q_2}$ είναι επίσης ολοκληρώσιμη, και

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} g(y) d\lambda_{d_2}(y) = \lambda_{d_1}(Q_1)\lambda_{d_2}(Q_2).$$

Αφού

$$\int_{\mathbb{R}^d} \chi_E d\lambda_d = \lambda_d(E) = \lambda_{d_1}(Q_1)\lambda_{d_2}(Q_2),$$

έχουμε ότι $\chi_E \in \mathcal{F}$.

(β) Υποθέτουμε τώρα ότι το $E$ περιέχεται στο σύνορο κάποιου κλειστού κύβου. Αφού το σύνορο του κύβου έχει μέτρο μηδέν στον $\mathbb{R}^d$, έχουμε $\int_{\mathbb{R}^d} \chi_E d\lambda_d = 0$. Παρατηρούμε τώρα, διακρίνοντας περιπτώσεις, ότι σχεδόν για κάθε $y$, το σύνολο $E^y$ έχει μέτρο μηδέν στον $\mathbb{R}^{d_1}$, άρα αν ορίσουμε $g(y) = \int_{\mathbb{R}^{d_1}} \chi_E(x,y) d\lambda_{d_1}(x)$ τότε $g(y) = 0$ σχεδόν για κάθε $y$. Έπεται ότι $\int_{\mathbb{R}^{d_1}} g(y) d\lambda_{d_2}(y) = 0$, το οποίο δείχνει ότι $\chi_E \in \mathcal{F}$.

(γ) Υποθέτουμε τώρα ότι το $E$ είναι πεπερασμένη ένωση κλειστών κύβων με ξένα εσωτερικά. Έστω $E = \bigcup_{i=1}^k Q_i$. Αν γράψουμε $\tilde{Q}_i$ για το εσωτερικό του $Q_k$, τότε μπορούμε να γράψουμε την $\chi_E$ σαν γραμμικό συνδυασμό των $\chi_{\tilde{Q}_i}$ και των $\chi_{A_i}$, όπου κάθε $A_i$ είναι υποσύνολο του συνόρου του $Q_i$. Από τα (α) και (β) έχουμε ότι $\chi_{\tilde{Q}_i} \in \mathcal{F}$, $\chi_{A_i} \in \mathcal{F}$, και από το Βήμα 1 συμπεραίνουμε ότι $\chi_E \in \mathcal{F}$.

(δ) Υποθέτουμε τώρα ότι το $E$ είναι ανοικτό και έχει πεπερασμένο μέτρο. Μπορούμε να γράψουμε το $E$ στη μορφή

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k,$$

όπου $Q_k$ είναι κύβοι με ξένα εσωτερικά. Αν θέσουμε $f_m = \sum_{k=1}^m \chi_{Q_k}$, τότε $f_k \nearrow \chi_E$ σχεδόν παντού. Αφού $f_k \in \mathcal{F}$ (από το (γ)) και η $\chi_E$ είναι ολοκληρώσιμη (διότι $\lambda_d(E) < \infty$) συμπεραίνουμε ότι $\chi_E \in \mathcal{F}$ χρησιμοποιώντας το Βήμα 2.

(ε) Τέλος, έστω $E$ ένα $G_\delta$-σύνολο με $\lambda_d(E) < \infty$. Μπορούμε να γράψουμε το $E$ στη μορφή

$$E = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k,$$

όπου $(G_k)$ είναι μια φθίνουσα ακολουθία ανοικτών συνόλων, και $\lambda_d(G_1) < \infty$ (άσκηση). Τότε, οι συναρτήσεις $\chi_{G_k}$ ανήκουν στην $\mathcal{F}$ από το (δ) και σχηματίζουν μια φθίνουσα ακολουθία που συγκλίνει κατά σημείο στην $\chi_E$. Από το Βήμα 2 συμπεραίνουμε ότι $\chi_E \in \mathcal{F}$, και το Βήμα 3 έχει ολοκληρωθεί.

**Βήμα 4.** *Αν $\lambda_d(E) = 0$ τότε $\chi_E \in \mathcal{F}$.*

Πράγματι, αφού το $E$ είναι μετρήσιμο και $\lambda_d(E) = 0$, μπορούμε να βρούμε $G_\delta$-σύνολο $G \supseteq E$ με $\lambda_d(G) = 0$. Από το Βήμα 3 έχουμε ότι $\chi_G \in \mathcal{F}$, άρα

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left( \int_{\mathbb{R}^{d_1}} \chi_G(x,y) d\lambda_1(x) \right) d\lambda_2(y) = \int_{\mathbb{R}^d} \chi_G d\lambda_d = 0.$$

Άρα,

$$\int_{\mathbb{R}^{d_1}} \chi_G(x,y) d\lambda_{d_1}(x) = 0 \ \ \text{σχεδόν για κάθε } y.$$

Έπεται ότι $\lambda_{d_1}(G^y) = 0$ σχεδόν για κάθε $y$. Αφού $E^y \subseteq G^y$ για κάθε $y$, συμπεραίνουμε ότι $\lambda_{d_1}(E^y) = 0$ σχεδόν για κάθε $y$, δηλαδή $\int_{\mathbb{R}^{d_1}} \chi_E(x,y) d\lambda_{d_1}(x) = 0$ σχεδόν για κάθε $y$. Συνεπώς,

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left( \int_{\mathbb{R}^{d_1}} \chi_E(x,y) d\lambda_1(x) \right) d\lambda_2(y) = 0 = \int_{\mathbb{R}^d} \chi_E d\lambda_d.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι $\chi_E \in \mathcal{F}$.

**Βήμα 5.** *Αν το $E$ είναι μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ και $\lambda_d(E) < \infty$, τότε η $\chi_E$ ανήκει στην $\mathcal{F}$.*

Πράγματι, θεωρούμε ένα $G_\delta$-σύνολο $G \supseteq E$ με $\lambda_d(G \setminus E) = 0$, γράφουμε

$$\chi_E = \chi_G - \chi_{G \setminus E},$$

και χρησιμοποιώντας το Βήμα 3, το Βήμα 4 και το γεγονός ότι η $\mathcal{F}$ είναι κλειστή ως προς πεπερασμένους γραμμικούς συνδυασμούς, συμπεραίνουμε ότι $\chi_E \in \mathcal{F}$.

**Βήμα 6.** *Κάθε ολοκληρώσιμη συνάρτηση ανήκει στην $\mathcal{F}$.*

Παρατηρούμε πρώτα ότι, αφού η $f$ γράφεται στη μορφή $f = f^+ - f^-$ και οι $f^+, f^-$ είναι ολοκληρώσιμες, και αφού η $\mathcal{F}$ είναι κλειστή ως προς πεπερασμένους γραμμικούς συνδυασμούς, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η $f$ είναι μη αρνητική. Γνωρίζουμε τώρα ότι υπάρχει αύξουσα ακολουθία μη αρνητικών απλών ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $\varphi_k$ ώστε $\varphi_k \nearrow f$. Κάθε $\varphi_k$ είναι πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός χαρακτηριστικών συναρτήσεων συνόλων πεπερασμένου μέτρου, άρα κάθε $\varphi_k \in \mathcal{F}$ από το Βήμα 5 και το Βήμα 1. Έπεται ότι $f \in \mathcal{F}$, από το Βήμα 2. $\square$

Στο υπόλοιπο αυτής της παραγράφου δίνουμε κάποιες χρήσιμες εφαρμογές του θεωρήματος Fubini, ξεκινώντας από το θεώρημα Tonelli.

**Θεώρημα 4.3.2** (Tonelli). *Έστω $f : \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2} \to \mathbb{R}$ μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε, σχεδόν για κάθε $y \in \mathbb{R}^{d_2}$ η συνάρτηση $f^y$ είναι μετρήσιμη στον $\mathbb{R}^{d_1}$ και η συνάρτηση*

$$y \mapsto \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f^y(x) d\lambda_{d_1}(x) \tag{4.3.8}$$

*είναι μετρήσιμη στον $\mathbb{R}^{d_2}$. Επιπλέον,*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f d\lambda_d = \int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left( \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f(x,y) d\lambda_{d_1}(x) \right) d\lambda_{d_2}(y). \tag{4.3.9}$$

*Απόδειξη.* Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $f_k : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ θέτοντας

$$f_k(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{αν } |(x,y)| < k \text{ και } f(x,y) < k \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Κάθε $f_k$ είναι ολοκληρώσιμη. Από το θεώρημα Fubini, υπάρχει $E_k \subset \mathbb{R}^{d_2}$ με $\lambda_{d_2}(E_k) = 0$ ώστε: αν $y \notin E_k$ τότε η $f_k^y$ είναι ολοκληρώσιμη. Αν θέσουμε $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, βλέπουμε ότι $\lambda_{d_2}(E) = 0$ και αν $y \notin E$ τότε η $f_k^y$ είναι μετρήσιμη για κάθε $k$. Αφού $f_k^y \nearrow f^y$, από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης βλέπουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f_k(x,y) d\lambda_{d_1}(x) \to \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f(x,y) d\lambda_{d_1}(x)$$

για κάθε $y \notin E$. Πάλι από το θεώρημα Fubini, η $y \mapsto \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f_k(x,y) d\lambda_{d_1}(x)$ είναι μετρήσιμη στο $E^c$, άρα και η $y \mapsto \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f(x,y) d\lambda_{d_1}(x)$. Εφαρμόζοντας και πάλι το θεώρημα μονότονης σύγκλισης, παίρνουμε

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left( \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f_k(x,y) d\lambda_{d_1}(x) \right) d\lambda_{d_2}(y) \to \int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left( \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f(x,y) d\lambda_{d_1}(x) \right) d\lambda_{d_2}(y). \tag{4.3.10}$$

Όμως, από το θεώρημα Fubini γνωρίζουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left( \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f_k(x,y) d\lambda_{d_1}(x) \right) d\lambda_{d_2}(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f_k d\lambda_d. \tag{4.3.11}$$

Εφαρμόζοντας απευθείας το θεώρημα μονότονης σύγκλισης για τις $f_k$ έχουμε επίσης

$$\int_{\mathbb{R}^d} f_k d\lambda_d \to \int_{\mathbb{R}^d} f d\lambda_d. \tag{4.3.12}$$

Συνδυάζοντας τις (4.3.10), (4.3.11) και (4.3.12) έχουμε το συμπέρασμα. □

**Παρατήρηση 4.3.3.** Πολύ συχνά, το θεώρημα Tonelli χρησιμοποιείται σε συνδυασμό με το θεώρημα Fubini. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ και θέλουμε να εξετάσουμε αν είναι ολοκληρώσιμη και, αν ναι, να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμά της κάνοντας *διαδοχική ολοκλήρωση* (πρώτα ως προς $x$ και μετά ως προς $y$). Για να αιτιολογήσουμε την χρήση της διαδοχικής ολοκλήρωσης, εφαρμόζουμε πρώτα το θεώρημα Tonelli για την $|f|$: αυτό μας επιτρέπει να υπολογίσουμε ή να εκτιμήσουμε τα διαδοχικά ολοκληρώματα της $|f|$, διότι η $|f|$ είναι μη αρνητική. Αν αυτά είναι πεπερασμένα, από το Θεώρημα 4.3.2 έχουμε ότι η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη, δηλαδή $\int_{\mathbb{R}^d} |f| \, d\lambda_d < \infty$. Τότε όμως, ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος 4.3.1 και μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε εκείνο το θεώρημα για να υπολογίσουμε το $\int_{\mathbb{R}^d} f d\lambda_d$.

**Πόρισμα 4.3.4.** *Έστω $E$ μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$. Τότε, σχεδόν για κάθε $y \in \mathbb{R}^{d_2}$ το σύνολο*

$$E^y = \{x \in \mathbb{R}^{d_1} : (x,y) \in E\}$$

*είναι μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^{d_1}$. Επιπλέον, η $y \mapsto \lambda_{d_1}(E^y)$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση, και*

$$\lambda_d(E) = \int_{\mathbb{R}^{d_2}} \lambda_{d_1}(E^y) d\lambda_{d_2}(y).$$

*Απόδειξη.* Άμεση εφαρμογή του Θεωρήματος 4.3.2. Επιλέγουμε σαν $f$ την $\chi_E$ και παρατηρούμε ότι $(\chi_E)^y = \chi_{E^y}$. Πράγματι, $(\chi_E)^y(x) = 1$ αν και μόνο αν $\chi_E(x,y) = 1$ δηλαδή αν και και μόνο αν $(x,y) \in E$. Αυτό όμως είναι ισοδύναμο με την $x \in E^y$, δηλαδή την $\chi_{E^y}(x) = 1$. Από το Θεώρημα 4.3.2 η $(\chi_E)^y$ είναι μετρήσιμη σχεδόν για κάθε $y$, δηλαδή η $\chi_{E^y}$ είναι μετρήσιμη σχεδόν για κάθε $y$. Ισοδύναμα, το $E^y$ είναι μετρήσιμο σχεδόν για κάθε $y$. Τέλος, πάλι από το Θεώρημα 4.3.2, έχουμε

$$\begin{aligned}\lambda_d(E) &= \int_{\mathbb{R}^d} \chi_E d\lambda_d = \int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left( \int_{\mathbb{R}^{d_1}} (\chi_E)^y(x) d\lambda_{d_1}(x) \right) d\lambda_{d_2}(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left( \int_{\mathbb{R}^{d_1}} \chi_{E^y}(x) d\lambda_{d_1}(x) \right) d\lambda_{d_2}(y) = \int_{\mathbb{R}^{d_2}} \lambda_{d_1}(E^y) d\lambda_{d_2}(y).\end{aligned}$$

□

**Πρόταση 4.3.5.** *Έστω $E_1 \subset \mathbb{R}^{d_1}$ και $E_2 \subset \mathbb{R}^{d_2}$ μετρήσιμα σύνολα. Τότε, το $E = E_1 \times E_2$ είναι μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Επιπλέον,*

$$\lambda_d(E) = \lambda_{d_1}(E_1)\lambda_{d_2}(E_2),$$

*με την σύμβαση ότι αν κάποιο από τα $\lambda_{d_i}(E_i)$ είναι ίσο με μηδέν, τότε $\lambda_d(E) = 0$.*

Για την απόδειξη της Πρότασης 4.3.5 θα χρειαστούμε ένα λήμμα:

**Λήμμα 4.3.6.** *Έστω $E_1 \subset \mathbb{R}^{d_1}$ και $E_2 \subset \mathbb{R}^{d_2}$. Τότε,*

$$\lambda_d^*(E_1 \times E_2) \leqslant \lambda_{d_1}^*(E_1)\lambda_{d_2}^*(E_2),$$

*με την σύμβαση ότι αν κάποιο από τα $\lambda_{d_i}^*(E_i)$ είναι ίσο με μηδέν, τότε $\lambda_d^*(E) = 0$.*

*Απόδειξη.* Έστω $\varepsilon > 0$. Από τον ορισμό του εξωτερικού μέτρου, υπάρχουν ακολουθίες ανοικτών ορθογωνίων $(I_k)$ και $(J_s)$ στον $\mathbb{R}^{d_1}$ και τον $\mathbb{R}^{d_2}$ αντίστοιχα, ώστε

$$E_1 \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k, \quad E_2 \subseteq \bigcup_{s=1}^{\infty} J_s,$$

και

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) < \lambda_{d_1}^*(E_1) + \varepsilon, \quad \sum_{s=1}^{\infty} \ell(J_s) < \lambda_{d_2}^*(E_2) + \varepsilon.$$

Παρατηρούμε ότι

$$E_1 \times E_2 \subseteq \bigcup_{k,s=1}^{\infty} I_k \times J_s,$$

και χρησιμοποιώντας την υποπροσθετικότητα του εξωτερικού μέτρου γράφουμε

$$\begin{aligned}\lambda_d^*(E_1 \times E_2) &\leqslant \sum_{k,s=1}^{\infty} \ell(I_k \times J_s) = \sum_{k,s=1}^{\infty} \ell(I_k)\ell(J_s) \\ &= \left( \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) \right) \left( \sum_{s=1}^{\infty} \ell(J_s) \right) \leqslant (\lambda_{d_1}^*(E_1) + \varepsilon)(\lambda_{d_2}^*(E_2) + \varepsilon).\end{aligned}$$

Αν $\lambda^*_{d_1}(E_1) > 0$ και $\lambda^*_{d_2}(E_2) > 0$, τότε

$$\lambda^*_{2d}(E_1 \times E_2) \leqslant \lambda^*_{d_1}(E_1)\lambda^*_{d_2}(E_2) + A\varepsilon + \varepsilon^2$$

όπου $A = \lambda^*_{d_1}(E_1) + \lambda^*_{d_2}(E_2)$, και αφήνοντας το $\varepsilon \to 0^+$ παίρνουμε το ζητούμενο (αν κάποιο από τα $E_i$ έχει άπειρο εξωτερικό μέτρο και το άλλο θετικό εξωτερικό μέτρο, τότε δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε).

Μένει η περίπτωση όπου, για παράδειγμα, $\lambda^*_{d_1}(E_1) = 0$. Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $E_2^m = E_2 \cap \{y \in \mathbb{R}^{d_2} : |y| \leqslant m\}$. Το προηγούμενο επιχείρημα δείχνει ότι, για κάθε $\varepsilon > 0$,

$$\lambda^*_d(E_1 \times E_2^m) \leqslant \varepsilon(\lambda^*_{d_2}(E_2^m) + \varepsilon)$$

και αφήνοντας το $\varepsilon \to 0^+$ παίρνουμε $\lambda^*_d(E_1 \times E_2^m) = 0$. Αφού $E_1 \times E_2^m \nearrow E_1 \times E_2$ καθώς το $m \to \infty$, συμπεραίνουμε ότι $\lambda^*_d(E_1 \times E_2) = 0$. □

**Απόδειξη της Πρότασης 4.3.5.** Αρκεί να δείξουμε ότι το $E$ είναι μετρήσιμο. Κατόπιν, αφού $E^y = E_1$ για κάθε $y \in E_2$ και $E^y = \emptyset$ αλλιώς, από το Πόρισμα 4.3.4 παίρνουμε

$$\lambda(E) = \int_{\mathbb{R}^{d_2}} \lambda_{d_1}(E^y)d\lambda_{d_2}(y) = \int_{E_2} \lambda_{d_1}(E_1)d\lambda_{d_2}(y) = \lambda_{d_1}(E_1)\lambda_{d_2}(E_2).$$

Για την μετρησιμότητα του $E$, χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι, αφού τα $E_1$ και $E_2$ είναι μετρήσιμα, μπορούμε να βρούμε $G_\delta$-σύνολα $G_i$ με $E_i \subseteq G_i$ και $\lambda_{d_i}(G_i \setminus E_i) = 0$. Το σύνολο $G = G_1 \times G_2$ είναι μετρήσιμο στον $\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$, και

$$((G_1 \times G_2) \setminus (E_1 \times E_2)) \subseteq ((G_1 \setminus E_1) \times G_2) \cup (G_1 \times (G_2 \setminus E_2)).$$

Από το Λήμμα 4.3.6 βλέπουμε ότι

$$\lambda^*_d((G_1 \setminus E_1) \times G_2) \leqslant \lambda_{d_1}(G_1 \setminus E_1)\lambda_{d_2}(G_2) = 0$$

και

$$\lambda^*_d(G_1 \times (G_2 \setminus E_2)) \leqslant \lambda_{d_1}(G_1)\lambda_{d_2}(G_2 \setminus E_2) = 0.$$

Άρα, $\lambda^*_d(G \setminus E) = 0$. Έπεται ότι το $E = G \setminus (G \setminus E)$ είναι μετρήσιμο. □

**Πόρισμα 4.3.7.** *Έστω $f : \mathbb{R}^{d_1} \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε, η $\tilde{f} : \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2} \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από την*

$$\tilde{f}(x,y) = f(x)$$

*είναι μετρήσιμη συνάρτηση.*

*Απόδειξη.* Αφού η $f$ είναι μετρήσιμη, για κάθε $a \in \mathbb{R}$ το σύνολο $E_a = \{x \in \mathbb{R}^{d_1} : f(x) < a\}$ είναι μετρήσιμο. Αφού

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2} : \tilde{f}(x,y) < a\} = E_a \times \mathbb{R}^{d_2},$$

από την Πρόταση 4.3.5 βλέπουμε ότι το $\{\tilde{f} < a\}$ είναι μετρήσιμο για κάθε $a \in \mathbb{R}$. Με βάση τον ορισμό, η $\tilde{f}$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση. □

**Πόρισμα 4.3.8.** *Έστω $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ μη αρνητική συνάρτηση. Ορίζουμε*

$$\mathcal{A}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}:0\leqslant y\leqslant f(x)\}.$$

*Τότε, η $f$ είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν το $\mathcal{A}$ είναι μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^{d+1}$, και αν αυτό συμβαίνει τότε*

$$\lambda_{d+1}(\mathcal{A})=\int_{\mathbb{R}^d}f(x)d\lambda_d(x).$$

*Απόδειξη.* Υποθέτουμε πρώτα ότι η $f$ είναι μετρήσιμη. Από το Πόρισμα 4.3.7 βλέπουμε εύκολα ότι η συνάρτηση

$$F(x,y)=f(x)-y$$

είναι μετρήσιμη συνάρτηση (διότι οι $F_1(x,y)=f(x)$ και $F_2(x,y)=y$ είναι μετρήσιμες). Έπεται ότι το

$$\mathcal{A}=\{(x,y):y\geqslant 0\}\cap\{(x,y):F(x,y)\leqslant 0\}$$

είναι μετρήσιμο σύνολο.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι το $\mathcal{A}$ είναι μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^{d+1}$. Για κάθε $x\in\mathbb{R}^{d_1}$ έχουμε

$$\mathcal{A}_x=\{y\in\mathbb{R}:(x,y)\in\mathcal{A}\}=[0,f(x)].$$

Από το Πόρισμα 4.3.4 (με εναλλαγή των ρόλων των $x$ και $y$) η συνάρτηση $f(x)=\lambda_1(\mathcal{A}_x)$ είναι μετρήσιμη. Επιπλέον,

$$\lambda_{d+1}(\mathcal{A})=\int_{\mathbb{R}^{d+1}}\chi_A d\lambda_{d+1}=\int_{\mathbb{R}^d}\lambda_1(\mathcal{A}_x)d\lambda_d(x)=\int_{\mathbb{R}^d}f(x)d\lambda_d(x),$$

και έχουμε το ζητούμενο. □

**Πρόταση 4.3.9.** *Έστω $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε, η συνάρτηση $\tilde{f}:\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ που ορίζεται από την*

$$\tilde{f}(x,y)=f(x-y)$$

*είναι μετρήσιμη.*

*Απόδειξη.* Αρκεί να δείξουμε ότι: αν $a\in\mathbb{R}$ και αν $E_a=\{z\in\mathbb{R}^d:f(z)<a\}$, τότε το σύνολο

$$\tilde{E}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d:x-y\in E_a\}$$

είναι μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$. Θα δείξουμε, γενικότερα, ότι αν $A$ είναι ένα μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ τότε το $\tilde{A}=\{(x,y):x-y\in A\}$ είναι μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$.

Παρατηρούμε αρχικά ότι αν το $G$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ τότε το $\tilde{G}$ είναι επίσης ανοικτό. Παίρνοντας αριθμήσιμες τομές βλέπουμε ότι αν το $A$ είναι $G_\delta$-σύνολο τότε το $\tilde{A}$ είναι επίσης $G_\delta$-σύνολο.

Θεωρούμε τώρα ένα σύνολο $Z$ με $\lambda_d(Z)=0$. Υπάρχει ακολουθία $(G_n)$ ανοικτών συνόλων στον $\mathbb{R}^d$ με $Z\subset G_n$ και $\lambda_d(G_n)\to 0$. Ορίζουμε $B_k=\{(x,y)\in\mathbb{R}^{2d}:|y|\leqslant k\}$ και θεωρούμε το $\tilde{G_n}\cap B_k$.

Παρατηρούμε ότι $\chi_{\tilde{G_n}\cap B_k} = \chi_{G_n}(x-y)\chi_{B_k}(y)$, άρα

$$\begin{aligned}\lambda_{2d}(\tilde{G_n}\cap B_k) &= \int_{\mathbb{R}^{2d}} \chi_{G_n}(x-y)\chi_{B_k}(y)d\lambda_{2d}(x,y)\\ &= \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d}\chi_{G_n}(x-y)d\lambda_d(x)\right)\chi_{B_k}(y)d\lambda_d(y)\\ &= \int_{\mathbb{R}^d}\lambda_d(G_n)\chi_{B_k}(y)d\lambda_d(y) = \lambda_d(G_n)\lambda_d(B_k)\end{aligned}$$

(χρησιμοποιήσαμε την $\int_{\mathbb{R}^d}\chi_{G_n}(x-y)d\lambda_d(x) = \lambda_d(y+G_n) = \lambda_d(G_n)$ για κάθε $y$, η οποία ισχύει γιατί το $\lambda_d$ είναι αναλλοίωτο ως προς μεταφορές). Έπεται ότι, για κάθε $k$,

$$0 \leqslant \lambda_{2d}(\tilde{Z}\cap B_k) \leqslant \lambda_{2d}(\tilde{G_n}\cap B_k) \to 0$$

καθώς το $n\to\infty$, άρα $\lambda_{2d}(\tilde{Z}\cap B_k) = 0$. Αφού $\tilde{Z}\cap B_k \nearrow \tilde{Z}$, συμπεραίνουμε ότι $\lambda_{2d}(\tilde{Z}) = 0$.

Τώρα, αφού κάθε μετρήσιμο $E\subseteq\mathbb{R}^d$ γράφεται στη μορφή $E = A\setminus Z$, όπου το $A$ είναι $G_\delta$-σύνολο και το $Z$ έχει μέτρο μηδέν, παρατηρώντας ότι $\tilde{E} = \tilde{A}\setminus\tilde{Z}$ και χρησιμοποιώντας τα παραπάνω, βλέπουμε ότι το $\tilde{E}$ είναι μετρήσιμο. □

## 4.4 Συνέλιξη

Έστω $f,g\in L_1(\mathbb{R}^d)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi:\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ με

$$\varphi(x,y) = f(x-y)g(y), \tag{4.4.1}$$

η οποία είναι μετρήσιμη (βλέπε Πρόταση 4.3.9 και Πόρισμα 4.3.7). Ανήκει επίσης στον $L_1(\mathbb{R}^{2d})$:

$$\int_{\mathbb{R}^d}|\varphi(x,y)|\,d\lambda(x) = |g(y)|\int_{\mathbb{R}^d}|f(x-y)|\,d\lambda(x) = |g(y)|\|f\|_1$$

(βλέπε Άσκηση 15 για την τελευταία ισότητα). Επομένως,

$$\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|\varphi(x,y)|\,d\lambda(x)\right)d\lambda(y) = \int_{\mathbb{R}^d}|g(y)|\|f\|_1\,d\lambda(y) = \|f\|_1\|g\|_1 < \infty.$$

Από το θεώρημα Tonelli έπεται ότι $\varphi\in L_1(\mathbb{R}^{2d})$ και από από το θεώρημα Fubini έχουμε ότι το ολοκλήρωμα

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,d\lambda(y)$$

ορίζεται σχεδόν για κάθε $x\in\mathbb{R}^d$ και επιπλέον (αν θέσουμε την τιμή του ίση με μηδέν εκεί που δεν ορίζεται) σαν συνάρτηση του $x$ ορίζει ένα στοιχείο του $L_1(\mathbb{R}^d)$.

**Ορισμός 4.4.1** (συνέλιξη). Έστω $f,g\in L_1(\mathbb{R}^d)$. Τότε, η συνάρτηση $f*g$ που ορίζεται σχεδόν παντού από την

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,d\lambda(y) \tag{4.4.2}$$

ανήκει στον $L_1(\mathbb{R}^d)$ και λέγεται *συνέλιξη* των $f$ και $g$.

Οι επόμενες προτάσεις περιγράφουν κάποιες βασικές ιδιότητες της συνέλιξης.

**Πρόταση 4.4.2.** *Αν $f,g\in L_1(\mathbb{R}^d)$, τότε*

$$\|f*g\|_1 \leqslant \|f\|_1\|g\|_1. \tag{4.4.3}$$

*Επιπλέον, η απεικόνιση $(f,g)\mapsto f*g$ είναι συνεχής (ως προς την $\|\cdot\|_1$).*

*Απόδειξη.* Για τη συνάρτηση $\varphi(x,y)=f(x-y)g(y)$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\|f*g\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^d}\left|\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,d\lambda(y)\right| d\lambda(x) \leqslant \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|\varphi(x,y)|\,d\lambda(x)\right)d\lambda(y)\\ &= \|f\|_1\|g\|_1.\end{aligned}$$

Για τη συνέχεια της $f*g$ θα δείξουμε ότι αν οι $f_k,f,g_k,g\in L_1(\mathbb{R}^d)$ ικανοποιούν τις $\|f_k-f\|_1\to 0$ και $\|g_k-g\|_1\to 0$, τότε $\|f_k*g_k-f*g\|_1\to 0$. Πράγματι,

$$\begin{aligned}\|f_k*g_k-f*g\|_1 &= \|f_k*(g_k-g)+(f_k-f)*g\|_1 \leqslant \|f_k*(g_k-g)\|_1+\|(f_k-f)*g\|_1\\ &\leqslant \|f_k\|_1\|g_k-g\|_1+\|f_k-f\|_1\|g\|_1\to 0,\end{aligned}$$

αν συνδυάσουμε τις υποθέσεις με το γεγονός ότι $\sup_k\|f_k\|_1<\infty$ (αφού η $(f_k)$ είναι συγκλίνουσα στον $L_1(\mathbb{R}^d)$). □

**Πρόταση 4.4.3.** *Έστω $f,g,h\in L_1(\mathbb{R}^d)$. Η συνέλιξη έχει τις εξής ιδιότητες:*

(i) *Είναι διγραμμική, δηλαδή*

$$(f+g)*h=f*h+g*h \quad \text{και} \quad f*(g+h)=f*g+f*h. \tag{4.4.4}$$

(ii) *Είναι μεταθετική, δηλαδή*

$$f*g=g*f. \tag{4.4.5}$$

(iii) *Είναι προσεταιριστική, δηλαδή*

$$(f*g)*h=f*(g*h). \tag{4.4.6}$$

*Απόδειξη.* Το (α) είναι άμεσο. Λόγω της συνέχειας της $(f,g)\mapsto f*g$, για να αποδείξουμε τα (β) και (γ) σε πλήρη γενικότητα αρκεί να τα αποδείξουμε για τις συνεχείς συναρτήσεις με συμπαγή φορέα, λόγω του Θεωρήματος 4.2.10.

(β) Για τη μεταθετικότητα, γράφουμε

$$(f*g)(x)=\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,d\lambda(y)=\int_{\mathbb{R}^d} f(z)g(x-z)\,d\lambda(z)=(g*f)(x),$$

όπου κάναμε την αλλαγή μεταβλητής $z=x-y$.

(γ) Για την προσεταιριστικότητα, έχουμε:

$$\begin{aligned}\big(f*(g*h)\big)(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)(g*h)(y)\;d\lambda(y)\\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\left(\int_{\mathbb{R}^d} g(y-z)h(z)\;d\lambda(z)\right)d\lambda(y)\\ &= \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y-z)\;d\lambda(y)\right)h(z)\;d\lambda(z)\\ &= \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-z-u)g(u)\;du\right)h(z)\;d\lambda(z)\\ &= \int_{\mathbb{R}^d}(f*g)(x-z)h(z)\;d\lambda(z)\\ &= \big((f*g)*h\big)(x),\end{aligned}$$

όπου κάναμε την αλλαγή μεταβλητής $u=y-z$. □

Η τελευταία Πρόταση δίνει κάποιες βασικές ιδιότητες της συνέλιξης συναρτήσεων στον $L_p(E)$, $p>1$. Θα χρειαστούμε την ακόλουθη παρατήρηση.

**Παρατήρηση 4.4.4.** Έστω $E$ μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ και έστω $1<p<\infty$. Για κάθε $f\in L_p(E)$ ισχύει

$$\|f\|_p=\max\left\{\int_E fh d\lambda : \|h\|_q\leqslant 1\right\},$$

όπου $q$ είναι ο συζυγής εκθέτης του $p$. Για την απόδειξη, παρατηρούμε αρχικά ότι αν $h\in L_q(E)$ και $\|h\|_q\leqslant 1$, τότε

$$\left|\int_E fhd\lambda\right|\leqslant \|f\|_p\|h\|_q\leqslant \|f\|_p,$$

από την ανισότητα Hölder. Άρα,

$$\|f\|_p\geqslant \sup\left\{\int_E fhd\lambda : \|h\|_q\leqslant 1\right\}.$$

Από την άλλη πλευρά, αν $\|f\|_p\neq 0$ και αν ορίσουμε $h=\frac{1}{\|f\|_p^{p/q}}|f(x)|^{p-1}\mathrm{sign}(f(x))$ (όπου $\mathrm{sign}(a)=1$ αν $a>0$, $\mathrm{sign}(a)=-1$ αν $a<0$ και $\mathrm{sign}(0)=0$) τότε

$$\|h\|_q^q=\frac{1}{\|f\|_p^p}\int_E |f(x)|^{(p-1)q}d\lambda(x)=\frac{1}{\|f\|_p^p}\int_E|f(x)|^pd\lambda(x)=1$$

και

$$\begin{aligned}\int_E f(x)h(x)d\lambda(x) &= \frac{1}{\|f\|_p^{p/q}}\int_E |f(x)|^pd\lambda(x)\\ &= \frac{1}{\|f\|_p^{p/q}}\|f\|_p^p=\|f\|_p^{p-p/q}=\|f\|_p.\end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο.

**Πρόταση 4.4.5.** *Έστω $E$ μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ και έστω $1<p<\infty$.*

(i) *Αν $f \in L_p(E)$ και $g \in L_1(E)$, τότε σχεδόν για κάθε $x$ η συνάρτηση $y \mapsto f(x-y)g(y)$ είναι ολοκληρώσιμη ως προς $y$, άρα η $f * g$ είναι καλά ορισμένη. Επιπλέον, $f * g \in L_p(E)$ και*

$$\|f * g\|_p \leqslant \|f\|_p \|g\|_1.$$

(ii) *Αν $f \in L_p(E)$ και $g \in L_q(E)$, όπου $q$ είναι ο συζυγής εκθέτης του $p$, τότε $f * g \in L_\infty(E)$ και*

$$\|f * g\|_\infty \leqslant \|f\|_p \|g\|_q.$$

*Επίσης, η $f * g$ είναι ομοιόμορφα συνεχής και $\lim\limits_{|x|\to\infty} (f * g)(x) = 0$.*

*Απόδειξη.* (i) Έστω $q$ ο συζυγής εκθέτης του $p$ και έστω $h \in L_q(E)$ με $\|h\|_q \leqslant 1$. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} |(f*g)(x)|\,|h(x)|\,d\lambda(x) &\leqslant \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|\,|g(y)|\,d\lambda(y)\right) |h(x)|\,d\lambda(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} |g(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|\,|h(x)|\,d\lambda(x)\right) d\lambda(y) \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^d} |g(y)|\,\|f\|_p \|h\|_q\,d\lambda(y) \\
&= \|f\|_p \|h\|_q \|g\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_1.
\end{aligned}$$

Με βάση την Παρατήρηση 4.4.4, η $f * g$ ανήκει στον $L_p(E)$ και $\|f * g\|_p \leqslant \|f\|_p \|g\|_1$. Από την απόδειξη φαίνεται ότι

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|\,|g(y)|\,d\lambda(y)\right)^p d\lambda(x) < \infty,$$

άρα σχεδόν για κάθε $x$ έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|\,|g(y)|\,d\lambda(y) < \infty,$$

δηλαδή η συνάρτηση $y \mapsto f(x-y)g(y)$ είναι ολοκληρώσιμη ως προς $y$.
(ii) Από την ανισότητα Hölder, για κάθε $x$ έχουμε

$$|(f*g)(x)| \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|\,|g(y)|\,d\lambda(y) \leqslant \|f\|_p \|g\|_q,$$

άρα

$$\|f * g\|_\infty = \sup\{|(f*g)(x)| : x \in \mathbb{R}^d\} \leqslant \|f\|_p \|g\|_q.$$

Για τον τελευταίο ισχυρισμό, θεωρούμε τυχόν $\varepsilon \in (0,1)$ και βρίσκουμε $u, v \in C_c(\mathbb{R}^d)$ με $\|f-u\|_p \leqslant \varepsilon$ και $\|g-v\|_q \leqslant \varepsilon$. Τότε,

$$\begin{aligned}
\|u*v - f*g\|_\infty &\leqslant \|u*(v-g)\|_\infty + \|(u-f)*g\|_\infty \\
&\leqslant \|u\|_p \|v-g\|_q + \|u-f\|_p \|g\|_q \leqslant (\|f\|_p + 1)\,\varepsilon + \|g\|_q\,\varepsilon.
\end{aligned}$$

Επιπλέον, η $u*v$ έχει συμπαγή φορέα, δηλαδή υπάρχει $M > 0$ ώστε: αν $|x| > M$ τότε $(u*v)(x) = 0$. Άρα, αν $|x| > M$ έχουμε

$$|(f*g)(x)| = |(f*g)(x) - (u*v)(x)| \leqslant \|f*g - u*v\|_\infty \leqslant C\varepsilon,$$

όπου $C = \|f\|_p + \|g\|_q + 1$. Αυτό αποδεικνύει ότι $\lim_{|x|\to\infty} (f*g)(x) = 0$. □

## 4.5 Ασκήσεις

**Ομάδα Α΄**

**1.** Έστω $E$ μετρήσιμο σύνολο και έστω $1 \leqslant p < \infty$. Αν $f \in L_p(E)$ δείξτε ότι: για κάθε $\alpha > 0$ ισχύει

$$\lambda(\{|f| \geqslant \alpha\}) \leqslant \left(\frac{\|f\|_p}{\alpha}\right)^p.$$

**2.** Έστω $E$ μετρήσιμο σύνολο με $0 < \lambda(E) < \infty$ και έστω $1 \leqslant p < \infty$. Αν $f : E \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση, δείξτε ότι $f \in L_p(E)$ αν και μόνο αν

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^p \lambda(\{n-1 \leqslant |f| < n\}) < \infty.$$

**3.** Έστω $E$ μετρήσιμο σύνολο και έστω $1 \leqslant p < \infty$. Αν $f_n, f \in L_p(E)$ και $f_n \to f$ σχεδόν παντού στο $E$, δείξτε ότι

$$\|f_n - f\|_p \to 0 \quad \text{αν και μόνο αν} \quad \|f_n\|_p \to \|f\|_p.$$

**4.** Έστω $E$ μετρήσιμο σύνολο και έστω $1 < p < \infty$ και $q$ ο συζυγής εκθέτης του $p$. Αν $f_n \to f$ στον $L_p(E)$ και $g_n \to g$ στον $L_q(E)$, δείξτε ότι $f_n g_n \to fg$ στον $L_1(E)$.

**5.** Έστω $E$ μετρήσιμο σύνολο με $0 < \lambda(E) < \infty$ και έστω $1 \leqslant p < q < \infty$.

(α) Αν $f : E \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση, δείξτε ότι

$$\|f\|_q \leqslant \|f\|_p [\lambda(E)]^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}.$$

(β) Δείξτε ότι $L_q(E) \subseteq L_p(E)$.

(γ) Δείξτε ότι $L_q(E) \neq L_p(E)$.

**6.** Έστω $E$ μετρήσιμο σύνολο και έστω $1 \leqslant p < q < r < \infty$. Δείξτε ότι κάθε $f \in L_q(E)$ γράφεται στην μορφή $f = g + h$ για κάποιες $g \in L_p(E)$ και $h \in L_r(E)$.

*Υπόδειξη.* Θεωρήστε το $B = \{|f| > 1\}$ και τις $g = f\chi_B$, $h = f - g$.

**7.** Έστω $E$ μετρήσιμο σύνολο και έστω $1 \leqslant p < r < \infty$. Δείξτε ότι: αν $f \in L_p(E) \cap L_r(E)$ τότε $f \in L_q(E)$ για κάθε $p \leqslant q \leqslant r$.

**8.** Έστω $E$ μετρήσιμο σύνολο με $\lambda(E) = 1$ και έστω $f \in L_p(E)$ για κάποιον $p \geqslant 1$. Δείξτε ότι

$$\log \|f\|_p \geqslant \int_E \log |f|.$$

**9.** Έστω $E$ μετρήσιμο σύνολο και έστω $c_1, \ldots, c_m > 0$ με $c_1 + \cdots + c_m = 1$. Δείξτε ότι: αν $f_1, \ldots, f_m : E \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμες συναρτήσεις, τότε

$$\int_E \left(\prod_{i=1}^m |f_i|^{c_i}\right) \leqslant \prod_{i=1}^m \left(\int_E |f_i|\right)^{c_i}.$$

**10.** Έστω $E$ μετρήσιμο σύνολο και έστω $p,q \geqslant 1$. Αν $t \in (0,1)$ και $r = tp + (1-t)q$ δείξτε ότι για κάθε μετρήσιμη συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$ ισχύει

$$\|f\|_r^r \leqslant \|f\|_p^{tp} + \|f\|_q^{(1-t)q}.$$

**11.** Έστω $E$ μετρήσιμο σύνολο, έστω $p \geqslant 1$ και έστω $(f_n)$ ακολουθία στον $L_p(E)$ με $\|f_n\|_p \leqslant 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $f_n \to f$ σχεδόν παντού στο $E$, δείξτε ότι $f \in L_p(E)$ και $\|f\|_p \leqslant 1$.

**12.** Έστω $(f_n)$ ακολουθία μη αρνητικών συναρτήσεων στον $L_1(\mathbb{R})$ με $\int f_n = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι: για κάθε $\delta > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\{x:|x|>\delta\}} f_n = 0.$$

Δείξτε ότι: για κάθε $p > 1$,

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_p = \infty.$$

**13.** Έστω $E$ μετρήσιμο σύνολο, έστω $p \geqslant 1$ και έστω $f \in L_p(E)$. Δείξτε ότι

$$\int |f|^p = p\int_0^\infty t^{p-1}\lambda(\{x \in E : |f(x)| > t\})\, dt.$$

**14.** Έστω $E$ μετρήσιμο σύνολο, έστω $p \geqslant 1$ και έστω $(f_n)$ ακολουθία στον $L_p(E)$ με $\|f_n - f\|_p \to 0$. Έστω $(g_n)$ ομοιόμορφα φραγμένη ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων στο $E$ με $g_n \to g$ σχεδόν παντού στο $E$. Δείξτε ότι $\|f_n g_n - fg\|_p \to 0$.

**15.** Έστω $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$. Για κάθε $t \in \mathbb{R}^d$ ορίζουμε $f_t(x) = f(x+t)$, $x \in \mathbb{R}^d$. Δείξτε ότι:

(α) Για κάθε $t$ έχουμε $f_t \in L_1(\mathbb{R}^d)$ και $\int f_t = \int f$.

(β) $\lim\limits_{t\to 0} \int |f - f_t| = 0$.

**16.** Έστω $E$ μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ με $0 < \lambda(E) < \infty$ και έστω $f : E \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι $\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

**17.** Έστω $1 \leqslant p_0 < p_1 \leqslant \infty$. Δώστε παραδείγματα μετρήσιμων συναρτήσεων $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ που ικανοποιούν τα εξής:

(α) $f \in L_p(0,\infty)$ αν και μόνο αν $p_0 < p < p_1$.

(β) $f \in L_p(0,\infty)$ αν και μόνο αν $p_0 \leqslant p \leqslant p_1$.

(γ) $f \in L_p(0,\infty)$ αν και μόνο αν $p = p_0$.

[*Υπόδειξη.* Δοκιμάστε συναρτήσεις της μορφής $f(x) = x^a|\log x|^b$.]

**18.** Έστω $E, F$ μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$ με $0 < \lambda(E), \lambda(F) < \infty$.

(α) Δείξτε ότι η $\chi_E * \chi_F$ είναι συνεχής συνάρτηση.

(β) Δείξτε ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε: αν $|x| < \varepsilon$ τότε $\lambda(E \cap (F + x)) > 0$.

**Ομάδα Β΄**

**19.** Έστω $\{f_n\}$ ακολουθία μη αρνητικών συνεχών συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι κάθε $f_n$ μηδενίζεται έξω από το $[0,1/n]$ και

$$\int_0^{1/n} f_n(t)\, dt = 1.$$

Έστω $g \in L_1(\mathbb{R})$. Ορίζουμε $g_n = f_n * g$. Δείξτε ότι $\|g_n - g\|_1 \to 0$ καθώς το $n \to \infty$.

**20.** Έστω $E$ μετρήσιμο σύνολο και έστω $p, q, r \geqslant 1$ με $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Δείξτε ότι: αν $f \in L_p(E)$ και $g \in L_q(E)$ τότε $fg \in L_r(E)$ και

$$\|fg\|_r \leqslant \|f\|_p \|g\|_q.$$

**21.** Έστω $E$ μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ με $0 < \lambda(E) < \infty$ και έστω $f : E \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $p \geqslant 1$ και σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε

$$\lambda\left(\{x \in E : |f(x)| \geqslant t\}\right) \leqslant \frac{C}{t^p}$$

για κάθε $t > 0$. Δείξτε ότι $f \in L_r(\mu)$ για κάθε $1 \leqslant r < p$.

**22.** Έστω $r \geqslant 1$ και $f_n : (0,1) \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις με $\|f_n\|_r \leqslant M$ για κάθε $n$. Υποθέτουμε ότι $f_n \to f$ σχεδόν παντού στο $(0,1)$. Δείξτε ότι για κάθε $1 \leqslant p < r$ ισχύει $\|f_n - f\|_p \to 0$.

**23.** Δίνεται φραγμένη Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που μηδενίζεται έξω από το $[-1,1]$. Για κάθε $h > 0$ ορίζουμε τη συνάρτηση $\varphi_h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$\varphi_h(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t)\, d\lambda(t), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Δείξτε ότι $\|\varphi_h\|_2 \leqslant \|f\|_2$ και $\|\varphi_h - f\|_2 \to 0$ όταν $h \to 0^+$.

**24.** Έστω $E$ μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, με $0 < \lambda(E) < \infty$. Δείξτε ότι $n \cdot \left(\chi_E * \chi_{[0,1/n]}\right) \to \chi_E$ σχεδόν παντού καθώς $n \to \infty$.

**25.** Έστω $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι για κάθε $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ ισχύει $f \cdot g \in L_1(\mathbb{R}^d)$. Δείξτε ότι $g \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$.

**26.** Έστω $1 \leqslant p < \infty$ και $f \in L_p[0,1]$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$f_n = 2^n \sum_{k=1}^{2^n} a_{n,k}(f) \chi_{J_{n,k}},$$

όπου $J_{n,k} = \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right)$ και $a_{n,k}(f) = \int_{J_{n,k}} f\, d\lambda$. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_p = 0.$$

**27.** Έστω $1 < p < \infty$ και έστω $f \in L_p[0,\infty)$. Δείξτε ότι

$$\left| \int_0^x f(t)\, d\lambda(t) \right| \leqslant \|f\|_p x^{1-\frac{1}{p}}$$

για κάθε $x > 0$ και ότι

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{1-\frac{1}{p}}} \int_0^x f(t)\ d\lambda(t) = 0.$$

**28.** Υποθέτουμε ότι $f \in L_p(\mathbb{R})$ για κάθε $1 \leqslant p < 2$ και επιπλέον ότι

$$\sup_{1\leqslant p<2} \|f\|_p < +\infty.$$

Δείξτε ότι $f \in L_2(\mathbb{R})$ και

$$\|f\|_2 = \lim_{p\to 2^-} \|f\|_p.$$

**29.** Έστω $f \in L_1[0,1]$ με την εξής ιδιότητα: υπάρχει $C > 0$ ώστε

$$\int_A |f|\ d\lambda \leqslant C\sqrt{\lambda(A)}$$

για κάθε Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο $A \subseteq [0,1]$. Δείξτε ότι $f \in L_p[0,1]$ για κάθε $1 \leqslant p < 2$. Είναι αναγκαστικά η $f$ στον $L_2[0,1]$;

**30.** Έστω $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση, για την οποία ισχύει

$$(*) \qquad \int_E \exp\left(f(x)\right)\ d\lambda(x) = 1.$$

όπου $E = \mathrm{supp}(f)$. Αποδείξτε ότι $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ για κάθε $1 \leqslant p < \infty$ και $\|f\|_p \leqslant Cp$, όπου $C > 0$ μια απόλυτη σταθερά. Δώστε παράδειγμα μετρήσιμης συνάρτησης $f$ που ικανοποιεί την $(*)$ αλλά $f \notin L_\infty(\mathbb{R}^d)$.

**31.** Έστω $f \in L^1((0,1))$. Για $x \in (0,1)$ ορίζουμε

$$g(x) = \int_x^1 \frac{f(t)}{t}\, dt.$$

Δείξτε ότι $g \in L^1((0,1))$ και

$$\int_0^1 g(x)\, d\lambda(x) = \int_0^1 f(x)\, d\lambda(x).$$

**32.** Έστω $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση. Αν η $g(x,y) = f(x) - f(y)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $(0,1) \times (0,1)$, δείξτε ότι $f \in L^1(0,1)$.

**33.** Έστω $0 < p < 1$. Ορίζουμε τον (αρνητικό αυτή τη φορά) *συζυγή εκθέτη* $q$ του $p$ από τη σχέση $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Έστω $E$ μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Αν $f, g : E \to [0,\infty]$ δείξτε ότι

$$\int fg\ d\mu \geqslant \left(\int f^p\ d\mu\right)^{1/p} \left(\int g^q\ d\mu\right)^{1/q}$$

και

$$\left(\int (f+g)^p\ d\mu\right)^{1/p} \geqslant \left(\int f^p\ d\mu\right)^{1/p} + \left(\int g^p\ d\mu\right)^{1/p}.$$

**34.** Δείξτε ότι αν $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$, τότε ο $L_q[0,1]$ είναι πρώτης κατηγορίας υποσύνολο του $L_p[0,1]$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

# Σειρές Fourier

## 5.1 Σειρές Fourier ολοκληρώσιμων συναρτήσεων

Σε αυτό το κεφάλαιο θεωρούμε συναρτήσεις με μιγαδικές τιμές. Αν $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ είναι οποιαδήποτε συνάρτηση, τότε η $f$ γράφεται στη μορφή $f=u+iv$, όπου $u(x)=\mathrm{Re}(f(x))$ και $v(x)=\mathrm{Im}(f(x))$, $x\in[a,b]$. Λέμε ότι η $f$ είναι ολοκληρώσιμη αν οι $u,v$ είναι ολοκληρώσιμες, και ορίζουμε

$$\int_a^b f(x)\,d\lambda(x)=\int_a^b u(x)\,d\lambda(x)+i\int_a^b v(x)\,d\lambda(x). \tag{5.1.1}$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι εξακολουθεί να ισχύει η γραμμικότητα: αν οι $f,g:[a,b]\to\mathbb{C}$ είναι ολοκληρώσιμες και αν $t,s\in\mathbb{C}$ τότε

$$\int_a^b (tf(x)+sg(x))\,d\lambda(x)=t\int_a^b f(x)\,d\lambda(x)+s\int_a^b g(x)\,d\lambda(x). \tag{5.1.2}$$

Θα χρησιμοποιούμε συχνά το εξής: αν η $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ είναι ολοκληρώσιμη, τότε

$$\left|\int_a^b f(x)\,d\lambda(x)\right|\leqslant\int_a^b |f(x)|\,d\lambda(x). \tag{5.1.3}$$

Για την απόδειξη αυτού του ισχυρισμού, γράφουμε

$$\int_a^b f(x)\,d\lambda(x)=Re^{ix_0},\quad \text{όπου}\ \ R=\left|\int_a^b f(x)\,d\lambda(x)\right|\ \ \text{και}\ \ x_0\in\mathbb{R}, \tag{5.1.4}$$

και παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\,d\lambda(x)\right| &= e^{-ix_0}\int_a^b f(x)\,d\lambda(x)=\int_a^b e^{-ix_0}f(x)\,d\lambda(x)\\ &=\int_a^b \mathrm{Re}(e^{-ix_0}f(x))\,d\lambda(x)\leqslant\int_a^b |e^{-ix_0}f(x)|\,d\lambda(x)\\ &=\int_a^b |f(x)|\,d\lambda(x).\end{aligned}$$

Στην τρίτη ισότητα χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι αφού το ολοκλήρωμα της $e^{-ix_0}f(x)$ είναι πραγματικός αριθμός θα ισούται με το ολοκλήρωμα της $\mathrm{Re}(e^{-ix_0}f(x))$.

**Ορισμός 5.1.1** (μιγαδικές συναρτήσεις στο μοναδιαίο κύκλο)**.** Συμβολίζουμε με $\mathbb{T}$ το μοναδιαίο κύκλο

$$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{e^{ix} : x \in \mathbb{R}\}. \tag{5.1.5}$$

Αν $F : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ είναι συνάρτηση με μιγαδικές τιμές, ορίζουμε $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ με

$$f(x) = F(e^{ix}). \tag{5.1.6}$$

Παρατηρήστε ότι η $f$ είναι $2\pi$-περιοδική. Αντίστροφα, αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι μια $2\pi$-περιοδική συνάρτηση, τότε η $F : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ με $F(e^{ix}) = f(x)$ είναι καλά ορισμένη (πράγματι, αν $e^{ix_1} = e^{ix_2}$ για κάποιους $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ τότε $x_2 = x_1 + 2k\pi$ για κάποιον ακέραιο $k$, άρα $f(x_1) = f(x_2)$ από την $2\pi$-περιοδικότητα της $f$). Έχουμε λοιπόν μια $1-1$ αντιστοιχία ανάμεσα στις συναρτήσεις $F : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ και τις $2\pi$-περιοδικές συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

Με βάση αυτήν την αντιστοιχία, λέμε ότι η $F$ είναι ολοκληρώσιμη αν η $f$ είναι ολοκληρώσιμη σε κάποιο (άρα σε κάθε) διάστημα μήκους $2\pi$, η $F$ είναι συνεχής αν η $f$ είναι συνεχής, η $F$ είναι παραγωγίσιμη αν η $f$ είναι παραγωγίσιμη, η $F$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη αν η $f$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη και ούτω καθεξής.

**Ορισμός 5.1.2** (ο χώρος $L_p(\mathbb{T})$)**.** Για κάθε $1 \leqslant p < \infty$ θεωρούμε το χώρο $L_p(\mathbb{T})$ των $2\pi$-περιοδικών μετρήσιμων συναρτήσεων $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ για τις οποίες

$$\int_{\mathbb{T}} |f(x)|^p d\lambda(x) < \infty, \tag{5.1.7}$$

ταυτίζοντας ως συνήθως συναρτήσεις που είναι ίσες σχεδόν παντού, εφοδιασμένο με τη νόρμα

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(x)|^p d\lambda(x)\right)^{1/p}. \tag{5.1.8}$$

Γράφοντας $\mathbb{T}$ εννοούμε οποιοδήποτε διάστημα μήκους $2\pi$, για παράδειγμα το $(-\pi, \pi]$. Ο $(L_p(\mathbb{T}), \|\cdot\|_p)$ είναι χώρος Banach (η απόδειξη είναι όμοια με αυτήν που δόθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο). Θεωρούμε επίσης τον χώρο $(L^\infty(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$ των «ουσιωδώς φραγμένων» $2\pi$-περιοδικών μετρήσιμων $f$, ο οποίος είναι χώρος Banach με νόρμα την

$$\|f\|_\infty = \min\{\beta \geqslant 0 : \lambda(\{x \in \mathbb{T} : |f(x)| > \beta\}) = 0\} = \lim_{p\to\infty} \|f\|_p. \tag{5.1.9}$$

**Ορισμός 5.1.3** (τριγωνομετρικά πολυώνυμα)**.** *Πραγματικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο* είναι κάθε πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός των συναρτήσεων $\cos kx$ και $\sin kx$. Δηλαδή, κάθε συνάρτηση της μορφής

$$T(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

όπου $n \in \mathbb{N}$ και $a_k, b_k \in \mathbb{R}$. Ο βαθμός του $T$ είναι ο μικρότερος $n \geqslant 0$ για τον οποίο το $T$ έχει μια αναπαράσταση αυτής της μορφής. Συμβολίζουμε με $\mathcal{T}_n$ την κλάση όλων των τριγωνομετρικών πολυωνύμων που έχουν βαθμό μικρότερο ή ίσο από $n$. Παρατηρήστε ότι ο $\mathcal{T}_n$ είναι γραμμικός υπόχωρος του χώρου των συνεχών $2\pi$-περιοδικών συναρτήσεων $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

*Μιγαδικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο* είναι μια συνάρτηση της μορφής

$$p(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} \tag{5.1.10}$$

όπου $n \geqslant 0$, $c_k \in \mathbb{C}$ και $|c_n| + |c_{-n}| \neq 0$. Ο $n$ είναι ο βαθμός του $p$. Θεωρούμε επίσης ότι η μηδενική συνάρτηση είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο μηδενικού βαθμού.

Χρησιμοποιώντας την γραμμικότητα του ολοκληρώματος και το γεγονός ότι, αν $k \in \mathbb{Z}$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} e^{ikt} dt = \begin{cases} 0, & \text{αν } k \neq 0 \\ 1, & \text{αν } k = 0 \end{cases}, \tag{5.1.11}$$

ελέγχουμε εύκολα ότι

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} p(x) e^{-ikx} d\lambda(x) \quad \text{για κάθε } |k| \leqslant n. \tag{5.1.12}$$

**Ορισμός 5.1.4** (τριγωνομετρική σειρά). Τριγωνομετρική σειρά είναι μια σειρά της μορφής

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}. \tag{5.1.13}$$

Με τον όρο *πραγματική τριγωνομετρική σειρά* αναφερόμαστε σε μια σειρά της μορφής

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{5.1.14}$$

όπου $a_k, b_k \in \mathbb{R}$. Το συμμετρικό $n$-οστό μερικό άθροισμα της σειράς (5.1.13) είναι το τριγωνομετρικό πολυώνυμο

$$s_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}, \tag{5.1.15}$$

ενώ το $n$-οστό μερικό άθροισμα της σειράς (5.1.14) είναι το πραγματικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \tag{5.1.16}$$

**Ορισμός 5.1.5** (σειρά Fourier). Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ ορίζουμε τον $k$-οστό **συντελεστή Fourier** της $f$ μέσω της

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} d\lambda(x). \tag{5.1.17}$$

Από την (5.1.3) έχουμε

$$|\widehat{f}(k)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} d\lambda(x) \right| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\, d\lambda(x) = \|f\|_1, \tag{5.1.18}$$

χρησιμοποιώντας και το γεγονός ότι $|e^{-ikx}| = 1$. Συνεπώς, η ακολουθία $\{\widehat{f}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ είναι φραγμένη.

Η **σειρά Fourier** της $f$ είναι η σειρά συναρτήσεων

$$S(f,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)e^{ikx}. \tag{5.1.19}$$

Το **$n$-οστό μερικό άθροισμα** της σειράς Fourier της $f$ είναι το μιγαδικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο

$$s_n(f,x) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{ikx}. \tag{5.1.20}$$

Αν $F : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση, θεωρούμε την $f(x) = F(e^{ix})$ και ορίζουμε τους συντελεστές Fourier της $f$ μέσω του περιορισμού της $f$ στο $(-\pi,\pi]$, χρησιμοποιώντας την (5.1.17).

**Παρατήρηση 5.1.6.** Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Για κάθε $k \geqslant 0$ ορίζουμε

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\, d\lambda(x) \tag{5.1.21}$$

και για κάθε $k \geqslant 1$ ορίζουμε

$$b_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\, d\lambda(x). \tag{5.1.22}$$

Αν η $f$ είναι άρτια, δηλαδή $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x$, τότε όλοι οι συντελεστές $b_k$ μηδενίζονται, και

$$a_k(f) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos kx\, d\lambda(x). \tag{5.1.23}$$

Αν η $f$ είναι περιττή, δηλαδή $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x$, τότε όλοι οι συντελεστές $a_k$ μηδενίζονται, και

$$b_k(f) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin kx\, d\lambda(x). \tag{5.1.24}$$

Παρατηρήστε ότι: αν $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$,

$$\begin{aligned}\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\, d\lambda(x) - i\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\, d\lambda(x)\\ &= \frac{a_k(f) - ib_k(f)}{2},\end{aligned} \tag{5.1.25}$$

και

$$\begin{aligned}\widehat{f}(-k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\, d\lambda(x) + i\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\, d\lambda(x)\\ &= \frac{a_k(f) + ib_k(f)}{2}.\end{aligned} \tag{5.1.26}$$

Επίσης,

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, d\lambda(x) = \frac{a_0(f)}{2}. \tag{5.1.27}$$

Παίρνουμε έτσι την επόμενη πρόταση.

**Πρόταση 5.1.7.** *Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Για κάθε $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ισχύουν οι*

$$a_k(f) = \widehat{f}(k) + \widehat{f}(-k) \ \ \textit{και} \ \ b_k(f) = i(\widehat{f}(k) - \widehat{f}(-k)). \tag{5.1.28}$$

*Επίσης, $a_0(f) = 2\widehat{f}(0)$ και*

$$s_n(f,x) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{ikx} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx). \tag{5.1.29}$$

*Απόδειξη.* Οι ισότητες $a_0(f) = 2\widehat{f}(0)$, $a_k(f) = \widehat{f}(k) + \widehat{f}(-k)$ και $b_k(f) = i(\widehat{f}(k) - \widehat{f}(-k))$ προκύπτουν άμεσα από τις (5.1.25), (5.1.26) και (5.1.27). Για την (5.1.29) γράφουμε

$$\begin{aligned}
s_n(f,x) &= \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{ikx} \\
&= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} \widehat{f}(k)e^{ikx} + \sum_{k=-n}^{-1} \widehat{f}(k)e^{ikx} \\
&= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} \widehat{f}(k)e^{ikx} + \sum_{k=1}^{-n} \widehat{f}(-k)e^{-ikx} \\
&= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} \widehat{f}(k)(\cos kx + i\sin kx) + \sum_{k=1}^{-n} \widehat{f}(-k)(\cos kx - i\sin kx) \\
&= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\widehat{f}(k) + \widehat{f}(-k))\cos kx + \sum_{k=1}^{n} i(\widehat{f}(k) - \widehat{f}(-k))\sin kx \\
&= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx),
\end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας την (5.1.28). □

Το βασικό πρόβλημα που θα μας απασχολήσει είναι το εξής: αν $F : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση, ή ισοδύναμα, αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι μια $2\pi$-περιοδική συνάρτηση, ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα μήκους $2\pi$, θα εξετάσουμε αν η ακολουθία $s_n(f,x) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{ikx}$ «συγκλίνει» στην $f$.

Σαν ένα πρώτο παράδειγμα, θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x$ στο $[-\pi,\pi)$ και την επεκτείνουμε σε $2\pi$-περιοδική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. Η $f$ είναι προφανώς ολοκληρώσιμη στο $[-\pi,\pi]$. Θα υπολογίσουμε τους συντελεστές Fourier της $f$. Αφού η $f$ είναι περιττή, έχουμε

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\, d\lambda(x) = 0. \tag{5.1.30}$$

Για κάθε $k \neq 0$ γράφουμε

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xe^{-ikx}d\lambda(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\left[-\frac{e^{-ikx}}{ik}\right]' d\lambda(x) \\
&= \frac{1}{2\pi}\,\frac{-xe^{-ikx}}{ik}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{-ikx}}{ik}\,d\lambda(x) \\
&= \frac{1}{2\pi}\,\frac{-\pi e^{-ik\pi} - \pi e^{ik\pi}}{ik} = -\frac{1}{2k}\,\frac{e^{ik\pi}+e^{-ik\pi}}{i} \\
&= \frac{(-1)^{k+1}}{ik}.
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{-ikx}}{ik}\,d\lambda(x) = 0$. Έπεται ότι

$$\begin{aligned}
S(f,x) &= \sum_{k\neq 0}\frac{(-1)^{k+1}}{ik}e^{ikx} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}e^{ikx} - (-1)^{-k+1}e^{-ikx}}{ik} \\
&= 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sin kx}{k}.
\end{aligned} \tag{5.1.31}$$

Θα μπορούσε κανείς, εναλλακτικά, να παρατηρήσει πρώτα ότι $a_k(f) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, διότι η $f$ είναι περιττή. Αυτό σημαίνει ότι

$$S(f,x) = \sum_{k\neq 0} b_k(f)\sin kx. \tag{5.1.32}$$

Χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση κατά μέρη, ακριβώς όπως παραπάνω, μπορείτε να υπολογίσετε τους συντελεστές $b_k(f)$ και να καταλήξετε πάλι στην (5.1.31).

## 5.2 Τριγωνομετρικά πολυώνυμα

Σκοπός μας σε αυτήν την παράγραφο είναι να δείξουμε ότι η κλάση των τριγωνομετρικών πολυωνύμων είναι πυκνή στο χώρο $(C(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$ των συνεχών $2\pi$-περιοδικών συναρτήσεων $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

**Θεώρημα 5.2.1.** *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ συνεχής $2\pi$-περιοδική συνάρτηση. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει μιγαδικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο $p$ τέτοιο ώστε*

$$\|f-p\|_\infty = \max\{|f(x)-p(x)| : x \in \mathbb{R}\} \leqslant \varepsilon. \tag{5.2.1}$$

*Ισοδύναμα, υπάρχει ακολουθία $\{p_m\}$ τριγωνομετρικών πολυωνύμων τέτοια ώστε $\|f - p_m\|_\infty \to 0$.*

Στη συνέχεια θα δούμε και άλλες αποδείξεις του Θεωρήματος 5.2.1. Δίνουμε όμως πρώτα μία απόδειξη που είναι «ανεξάρτητη» από την θεωρία των σειρών Fourier. Ξεκινάμε με κάποιες παρατηρήσεις για τα πραγματικά τριγωνομετρικά πολυώνυμα.

**Πρόταση 5.2.2.** *Κάθε πραγματικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο $T(x)$ βαθμού $n$ είναι πολυώνυμο των $\cos x$ και $\sin x$ βαθμού $n$. Δηλαδή, υπάρχει πολυώνυμο $p(t,s)$ βαθμού $n$ ώστε*

$$T(x) = p(\cos x, \sin x). \tag{5.2.2}$$

Η Πρόταση 5.2.2 είναι άμεση συνέπεια του ακόλουθου λήμματος.

**Λήμμα 5.2.3.** *Για κάθε $n \geqslant 1$, οι συναρτήσεις $\cos nx$ και $(\sin(n+1)x)/\sin x$ είναι πολυώνυμα του $\cos x$ βαθμού $n$.*

*Απόδειξη.* Δείχνουμε με επαγωγή ότι: για κάθε $n \geqslant 1$ υπάρχουν $a_{0,n}, \dots, a_{n-1,n} \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\cos nx = 2^{n-1}\cos^n x + \sum_{j=0}^{n-1} a_{j,n}\cos^j x. \tag{5.2.3}$$

Παρατηρήστε ότι η (5.2.3) ισχύει τετριμμένα για $n = 1$, ενώ για $n = 2$ γνωρίζουμε ότι

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1. \tag{5.2.4}$$

Υποθέτουμε ότι η (5.2.3) ισχύει για το $\cos kx$, $k \geqslant 2$. Από την τριγωνομετρική ταυτότητα

$$\cos[(k+1)x] + \cos[(k-1)x] = 2\cos kx \cos x \tag{5.2.5}$$

παίρνουμε

$$\begin{aligned}\cos(k+1)x &= 2\cos kx\cos x - \cos(k-1)x \\ &= 2\cos x\left(2^{k-1}\cos^k x + \sum_{j=0}^{k-1} a_{j,k}\cos^j x\right) - 2^{k-2}\cos^{k-1} x - \sum_{j=0}^{k-2} a_{j,k-1}\cos^j x \\ &= 2^k\cos^{k+1} x + \sum_{j=0}^{k} a_{j,k+1}\cos^j x\end{aligned}$$

για κατάλληλους $a_{j,k+1} \in \mathbb{R}$. Για τον δεύτερο ισχυρισμό του λήμματος, χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική ταυτότητα

$$\sin[(k+1)x] - \sin[(k-1)x] = 2\cos kx \sin x \tag{5.2.6}$$

δείχνουμε επαγωγικά ότι, για κάθε $n \geqslant 1$,

$$\frac{\sin(n+1)x}{\sin x} = 2^n\cos^n x + \sum_{j=0}^{n-1} a_{j,n}\cos^j x \tag{5.2.7}$$

για κατάλληλους $a_{j,n} \in \mathbb{R}$ (η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση). □

**Παρατήρηση 5.2.4.** Θεωρούμε το σύνολο

$$B_n = \{1, \cos x, \cos^2 x, \dots, \cos^n x, \sin x, \sin x\cos x, \dots, \sin x\cos^{n-1} x\}. \tag{5.2.8}$$

Από το Λήμμα 5.2.3 έχουμε

$$\mathcal{T}_n \subseteq \mathrm{span}(B_n), \tag{5.2.9}$$

όπου $\mathrm{span}(B_n)$ είναι ο γραμμικός χώρος που παράγεται από το $B$. Ειδικότερα, η διάσταση $\dim(\mathcal{T}_n)$ του $\mathcal{T}_n$ είναι μικρότερη ή ίση από $2n+1$, κάτι που είναι φανερό και από το γεγονός ότι

$$\mathcal{T}_n = \mathrm{span}(A_n), \tag{5.2.10}$$

όπου

$$A_n = \{1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx, \sin x, \dots, \sin nx\}. \tag{5.2.11}$$

Παρατηρήστε ότι $\mathrm{card}(A_n) = \mathrm{card}(B_n) = 2n+1$ (με $\mathrm{card}(X)$ συμβολίζουμε το πλήθος των στοιχείων ενός πεπερασμένου συνόλου $X$).

**Πρόταση 5.2.5.** *Για κάθε $n \geqslant 0$ ισχύει*

$$\mathcal{T}_n = \mathrm{span}(B_n) = \mathrm{span}(A_n). \tag{5.2.12}$$

Για την απόδειξη της Πρότασης 5.2.5 θα δείξουμε πρώτα ότι το $A_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο. Θα χρειαστούμε την επόμενη πρόταση.

**Πρόταση 5.2.6** (σχέσεις ορθογωνιότητας)**.** *Ισχύουν τα παρακάτω:*

(i) *Αν $m, n = 0, 1, 2, \dots$ και $m \neq n$ τότε*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, d\lambda(x) = 0. \tag{5.2.13}$$

(ii) *Αν $m, n = 1, 2, \dots$ και $m \neq n$ τότε*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, d\lambda(x) = 0. \tag{5.2.14}$$

(iii) *Αν $m = 0, 1, 2, \dots$ και $n = 1, 2, \dots$ τότε*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \, d\lambda(x) = 0. \tag{5.2.15}$$

(iv) *Αν $m, n = 1, 2, \dots$ τότε*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx \, d\lambda(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, d\lambda(x) = \frac{1}{2}. \tag{5.2.16}$$

*Απόδειξη.* Αφήνεται ως άσκηση. Χρησιμοποιήστε τις ταυτότητες

$$\begin{aligned} 2\cos\vartheta\cos\varphi &= \cos(\vartheta-\varphi) + \cos(\vartheta+\varphi), \\ 2\sin\vartheta\cos\varphi &= \sin(\vartheta+\varphi) + \sin(\vartheta-\varphi), \\ 2\sin\vartheta\sin\varphi &= \cos(\vartheta-\varphi) - \cos(\vartheta+\varphi), \end{aligned}$$

και τις $2\cos^2\vartheta = \cos 2\vartheta + 1$, $2\sin^2\vartheta = 1 - \cos 2\vartheta$. □

**Πρόταση 5.2.7.** *Το σύνολο $A = \{1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx, \sin x, \dots, \sin nx\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο (πάνω από το $\mathbb{R}$).*

*Απόδειξη.* Δείχνουμε ότι αν

$$T(x) = \nu_0 + \sum_{k=1}^{n} (\nu_k \cos kx + \mu_k \sin kx) \equiv 0, \tag{5.2.17}$$

για κάποιους $\nu_k, \mu_k \in \mathbb{R}$, τότε

$$\nu_0 = \nu_1 = \cdots = \nu_n = \mu_1 = \cdots = \mu_n = 0. \tag{5.2.18}$$

Αυτό προκύπτει άμεσα από την Πρόταση 5.2.6. Για παράδειγμα, για κάθε $m = 1, \ldots, n$ έχουμε

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-\pi}^{\pi} T(x) \sin mx d\lambda(x) \\ &= \nu_0 \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx d\lambda(x) + \sum_{k=1}^{n} \left( \nu_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \, \sin mx d\lambda(x) + \mu_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \, \sin mx d\lambda(x) \right) \\ &= \mu_m \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \, \sin mx d\lambda(x) = \mu_m, \end{aligned}$$

διότι $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \, \sin mx d\lambda(x) = 0$ για κάθε $0 \leqslant k \leqslant n$ και $\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \, \sin mx d\lambda(x) = 0$ για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n$, $k \neq m$. Όμοια δείχνουμε ότι $\nu_m = 0$ για κάθε $m = 0, 1, \ldots, n$. □

**Απόδειξη της Πρότασης 5.2.5.** Από την Πρόταση 5.2.7 γίνεται σαφές ότι $\dim(\mathcal{T}_n) = 2n+1$: το $A$ είναι μία βάση του $\mathcal{T}_n$. Επιπλέον, αφού $\mathrm{span}(B) \supseteq \mathcal{T}_n$ και $\dim(\mathrm{span}(B)) \leqslant 2n+1$, συμπεραίνουμε ότι, τελικά,

$$\mathcal{T}_n = \mathrm{span}(B) = \mathrm{span}(A). \tag{5.2.19}$$

Ειδικότερα, κάθε πολυώνυμο του $\cos x$, βαθμού μικρότερου ή ίσου από $n$, ανήκει στην κλάση $\mathcal{T}_n$. □

Θα χρησιμοποιήσουμε το προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass (μια απόδειξη δίνεται στο Παράρτημα).

**Θεώρημα 5.2.8.** *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πολυώνυμο $p$ ώστε*

$$\|f - p\|_\infty = \max\{|f(x) - p(x)| : x \in [a,b]\} \leqslant \varepsilon. \tag{5.2.20}$$

*Ισοδύναμα, υπάρχει ακολουθία $\{p_m\}$ πολυωνύμων ώστε $\|f - p_m\|_\infty \to 0$.*

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 5.2.8 θα δείξουμε ότι η κλάση $\mathcal{T}$ των πραγματικών τριγωνομετρικών πολυωνύμων είναι «πυκνή» στον χώρο των συνεχών $2\pi$-περιοδικών πραγματικών συναρτήσεων:

**Θεώρημα 5.2.9.** *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής $2\pi$-περιοδική συνάρτηση. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πραγματικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο $T$ ώστε*

$$\|f - T\|_\infty = \max\{|f(x) - T(x)| : x \in \mathbb{R}\} \leqslant \varepsilon. \tag{5.2.21}$$

*Ισοδύναμα, υπάρχει ακολουθία $\{T_m\}$ πραγματικών τριγωνομετρικών πολυωνύμων ώστε $\|f - T_m\|_\infty \to 0$.*

*Απόδειξη.* Δείχνουμε πρώτα τον ισχυρισμό του θεωρήματος, κάνοντας την επιπλέον υπόθεση ότι η $f$ είναι άρτια: δηλαδή, $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ με

$$g(y) = f(\arccos y). \tag{5.2.22}$$

Η $g$ είναι καλά ορισμένη, διότι $\arccos y \in [0,\pi]$ για κάθε $y \in [-1,1]$, και συνεχής, ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων. Από το Θεώρημα 5.2.8 υπάρχει πολυώνυμο $p$ ώστε $\|g-p\|_\infty < \varepsilon$. Δηλαδή,

$$|f(\arccos y) - p(y)| < \varepsilon \tag{5.2.23}$$

για κάθε $y \in [-1,1]$. Ορίζουμε $T(x) = p(\cos x)$. Το $T$ είναι πολυώνυμο του $\cos x$, άρα $T \in \mathcal{T}$. Παρατηρούμε ότι, για κάθε $x \in [0,\pi]$ υπάρχει $y \in [-1,1]$ ώστε $y = \cos x$, και τότε,

$$|f(x) - T(x)| = |f(x) - p(\cos x)| = |f(\arccos y) - p(y)| < \varepsilon. \tag{5.2.24}$$

Αφού οι $f$ και $T$ είναι άρτιες συναρτήσεις, έπεται ότι

$$\|f - T\|_\infty = \max\{|f(x) - T(x)| : -\pi \leqslant x \leqslant \pi\} < \varepsilon, \tag{5.2.25}$$

το οποίο είναι το ζητούμενο.

Για τη γενική περίπτωση, θεωρούμε τυχούσα συνεχή $2\pi$-περιοδική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και ορίζουμε

$$f_1(x) = f(x) + f(-x) \quad \text{και} \quad f_2(x) = [f(x) - f(-x)]\sin x. \tag{5.2.26}$$

Παρατηρήστε ότι οι $f_1$ και $f_2$ είναι άρτιες, συνεχείς και $2\pi$-περιοδικές. Άρα, μπορούμε να βρούμε τριγωνομετρικά πολυώνυμα $T_1$ και $T_2$ ώστε

$$\|f_1 - T_1\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{και} \quad \|f_2 - T_2\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5.2.27}$$

Αν θέσουμε

$$T_3(x) = \frac{1}{2}(T_1(x)\sin^2 x + T_2(x)\sin x), \tag{5.2.28}$$

τότε $T_3 \in \mathcal{T}$ και, για κάθε $x \in [-\pi,\pi]$,

$$\begin{aligned}|2f(x)\sin^2 x - 2T_3(x)| &= |f_1(x)\sin^2 x + f_2(x)\sin x - T_1(x)\sin^2 x - T_2(x)\sin x|\\ &\leqslant |(f_1(x) - T_1(x))\sin^2 x| + |(f_2(x) - T_2(x))\sin x|\\ &\leqslant |f_1(x) - T_1(x)| + |f_2(x) - T_2(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Με άλλα λόγια, αν ορίσουμε $f_3(x) = f(x)\sin^2 x$ τότε

$$\|f_3 - T_3\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5.2.29}$$

Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση $g(x) := f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$. Η $g$ είναι συνεχής και $2\pi$-περιοδική. Συνεπώς, ο ίδιος συλλογισμός δείχνει ότι υπάρχει τριγωνομετρικό πολυώνυμο $T_4$ ώστε, για τη συνάρτηση

$f_4(x) = g(x)\sin^2 x$ να ισχύει $\|f_4 - T_4\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$. Αν ορίσουμε $T_5(x) = T_4(x+\pi/2)$, τότε το $T_5$ είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο (εξηγήστε γιατί) και για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αν θέσουμε $y = x + \pi/2$ έχουμε

$$\begin{aligned} |f(x)\cos^2 x - T_5(x)| &= |f(x)\cos^2 x - T_4(x+\pi/2)| \\ &= |f(y-\pi/2)\sin^2 y - T_4(y)| < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \tag{5.2.30}$$

Συνεπώς,

$$\|f_5 - T_5\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{5.2.31}$$

όπου $f_5(x) = f(x)\cos^2 x$.

Παρατηρήστε ότι $f = f_3 + f_5$, διότι $f(x) = f(x)\sin^2 x + f(x)\cos^2 x$. Ορίζουμε $T = T_3 + T_5$. Τότε, $T \in \mathcal{T}$ και

$$\begin{aligned} \|f - T\|_\infty &= \|(f_3 + f_5) - (T_3 + T_5)\|_\infty \\ &\leqslant \|f_3 - T_3\|_\infty + \|f_5 - T_5\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned} \tag{5.2.32}$$

Αυτό αποδεικνύει το θεώρημα. □

**Πόρισμα 5.2.10.** *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής $2\pi$-περιοδική συνάρτηση με την ιδιότητα*

$$a_k(f) = b_k(f) = 0 \tag{5.2.33}$$

*για κάθε $k$. Τότε, $f \equiv 0$.*

*Απόδειξη.* Από την υπόθεση και από τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος είναι φανερό ότι

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)T(x)\,d\lambda(x) = 0 \tag{5.2.34}$$

για κάθε τριγωνομετρικό πολυώνυμο $T$. Από το Θεώρημα 5.2.9 υπάρχει ακολουθία $\{T_m\}$ τριγωνομετρικών πολυωνύμων ώστε $\|f - T_m\|_\infty \to 0$. Τότε, για κάθε $m$ έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,d\lambda(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,d\lambda(x) - \int_{-\pi}^{\pi} f(x)T_m(x)\,d\lambda(x) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)(f(x) - T_m(x))\,d\lambda(x). \end{aligned} \tag{5.2.35}$$

Άρα,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,d\lambda(x) \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \|f\|_\infty \|f - T_m\|_\infty d\lambda(x) = 2\pi\|f\|_\infty\|f - T_m\|_\infty \to 0. \tag{5.2.36}$$

Έπεται ότι

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,d\lambda(x) = 0, \tag{5.2.37}$$

και, αφού η $f$ είναι συνεχής, συμπεραίνουμε ότι $f \equiv 0$. □

**Απόδειξη του Θεωρήματος 5.2.1.** Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ συνεχής $2\pi$-περιοδική συνάρτηση και έστω $\varepsilon>0$. Γράφουμε $f=u+iv$ και, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 5.2.9. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ βρίσκουμε πραγματικά τριγωνομετρικά πολυώνυμα $T_1,T_2$ τέτοια ώστε

$$\|u-T_1\|_\infty \leqslant \varepsilon/\sqrt{2} \ \text{ και } \ \|v-T_2\|_\infty \leqslant \varepsilon/\sqrt{2}. \tag{5.2.38}$$

Παρατηρήστε ότι αν ορίσουμε $p=u+iv$ τότε

$$|f(x)-p(x)|^2 = |u(x)-T_1(x)|^2+|v(x)-T_2(x)|^2 \leqslant \|u-T_1\|_\infty^2+\|v-T_2\|_\infty^2 \leqslant \varepsilon^2 \tag{5.2.39}$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα

$$\|f-p\|_\infty = \max\{|f(x)-p(x)| : x\in\mathbb{R}\} \leqslant \varepsilon. \tag{5.2.40}$$

Μένει να δείξουμε ότι η $p=u+iv$ είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Υπάρχει $n\in\mathbb{N}$ τέτοιος ώστε τα $T_1,T_2$ να γράφονται στη μορφή

$$T_1(x)=\sum_{k=0}^n (a_k\cos kx+b_k\sin kx) \ \text{ και } \ T_2(x)=\sum_{k=0}^n (t_k\cos kx+s_k\sin kx), \tag{5.2.41}$$

όπου $a_k,b_k,t_k,s_k\in\mathbb{R}$. Αν ορίσουμε $c_k=\frac{a_k-ib_k}{2}$ και $d_k=\frac{t_k-is_k}{2}$, τότε από τους υπολογισμούς της Παρατήρησης 5.1.6 βλέπουμε ότι

$$p(x)=T_1(x)+iT_2(x)=\sum_{k=-n}^n c_ke^{ikx}+i\sum_{k=-n}^n d_ke^{ikx}=\sum_{k=-n}^n (c_k+id_k)e^{ikx}, \tag{5.2.42}$$

δηλαδή το $p$ είναι (μιγαδικό) τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού το πολύ ίσου με $n$. □

**Πόρισμα 5.2.11.** *Αν η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ είναι συνεχής $2\pi$-περιοδική συνάρτηση με*

$$\widehat{f}(k)=0 \tag{5.2.43}$$

*για κάθε $k\in\mathbb{Z}$, τότε $f\equiv 0$.*

*Απόδειξη.* Ακριβώς όπως στην απόδειξη του Πορίσματος 5.2.10, από την υπόθεση και από τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος είναι φανερό ότι

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)p(x)\,d\lambda(x)=0 \tag{5.2.44}$$

για κάθε μιγαδικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο $p$. Από το Θεώρημα 5.2.1 υπάρχει ακολουθία $\{p_m\}$ μιγαδικών τριγωνομετρικών πολυωνύμων ώστε $\|f-p_m\|_\infty\to 0$. Τότε, για κάθε $m$ έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,d\lambda(x) &= \int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,d\lambda(x)-\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\overline{p_m(x)}\,d\lambda(x)\\ &= \int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\overline{f(x)-p_m(x)}\,d\lambda(x).\end{aligned} \tag{5.2.45}$$

Άρα,

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,d\lambda(x)\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}\|f\|_\infty\|f-p_m\|_\infty d\lambda(x)=2\pi\|f\|_\infty\|f-p_m\|_\infty\to 0. \tag{5.2.46}$$

Έπεται ότι

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, d\lambda(x) = 0, \tag{5.2.47}$$

και, αφού η $|f|^2$ είναι συνεχής, συμπεραίνουμε ότι $|f| \equiv 0$, δηλαδή $f \equiv 0$. □

## 5.3 Βασικές ιδιότητες των σειρών Fourier

Σε αυτήν την παράγραφο συγκεντρώνουμε βασικές και χρήσιμες ιδιότητες των σειρών Fourier, τις οποίες θα χρησιμοποιούμε συχνά στα επόμενα. Κάποιες πολύ στοιχειώδεις ιδιότητες είναι οι εξής:

(i) Αν $f, g \in L_1(\mathbb{T})$ και $\alpha \in \mathbb{C}$ τότε

$$\widehat{f + \alpha g}(k) = \widehat{f}(k) + \alpha \, \widehat{g}(k) \tag{5.3.1}$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

(ii) Αν $g \in L_1(\mathbb{T})$ τότε

$$\widehat{\overline{g}}(k) = \overline{\widehat{g}(-k)} \tag{5.3.2}$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

(iii) Αν $f \in L_1(\mathbb{T})$, $\alpha \in \mathbb{R}$ και $f_\alpha(t) = f(t + \alpha)$, τότε

$$\widehat{f_\alpha}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t + \alpha) e^{-ikt} dt = e^{ik\alpha} \widehat{f}(k) \tag{5.3.3}$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

(iv) Αν $f \in L_1(\mathbb{T})$, $n \in \mathbb{Z}$ και $g_n(t) = f(t) e^{int}$, τότε

$$\widehat{g_n}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{int} e^{-ikt} dt = \widehat{f}(k - n) \tag{5.3.4}$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Όπως είδαμε, για κάθε $k \in \mathbb{Z}$,

$$|\widehat{f}(k)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x) e^{-ikx} d\lambda(x) \right| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(x)| \, d\lambda(x) = \|f\|_1. \tag{5.3.5}$$

Με άλλα λόγια, η $\{\widehat{f}(k)\}_{k=-\infty}^{\infty}$ είναι φραγμένη. Ισχύει όμως κάτι ισχυρότερο:

**Θεώρημα 5.3.1** (Riemann-Lebesgue)**.** *Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Τότε,*

$$\lim_{|k| \to \infty} \widehat{f}(k) = 0. \tag{5.3.6}$$

*Απόδειξη.* Έστω $\varepsilon > 0$. Θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα είναι πυκνά στον $L_1(\mathbb{T})$: υπάρχει τριγωνομετρικό πολυώνυμο $p_\varepsilon$ ώστε

$$\|f - p_\varepsilon\|_1 < \varepsilon. \tag{5.3.7}$$

Πράγματι, αυτό είναι άμεσο από το Θεώρημα 4.2.10 (οι συνεχείς συναρτήσεις είναι πυκνές στον $L_1(\mathbb{T})$) και το Θεώρημα 5.2.1 (τα τριγωνομετρικά πολύώνυμα είναι πυκνά στον $(C(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$, άρα και στον $(C(\mathbb{T})), \|\cdot\|_1)$). Έστω $n_0 = n_0(\varepsilon)$ ο βαθμός του $p_\varepsilon$. Για κάθε $|k| > n_0$ ισχύει

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}(f(x) - p_\varepsilon(x))e^{-ikx}d\lambda(x) = \widehat{f - p_\varepsilon}(k) \tag{5.3.8}$$

διότι $\int_{\mathbb{T}} p_\varepsilon(x)e^{-ikx}d\lambda(x) = 0$. Συνεπώς,

$$|\widehat{f}(k)| = |\widehat{f - p_\varepsilon}(k)| \leqslant \|f - p_\varepsilon\|_1 < \varepsilon \tag{5.3.9}$$

για κάθε $|k| > n$. Έπεται το ζητούμενο. □

Οι επόμενες προτάσεις δίνουν τους συντελεστές Fourier των συναρτήσεων που προκύπτουν αν ολοκληρώσουμε ή παραγωγίσουμε μια συνάρτηση.

**Πρόταση 5.3.2.** *Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$ και έστω $F$ το αόριστο ολοκλήρωμα της $f$:*

$$F(x) = c + \int_0^x f(t)\,d\lambda(t), \qquad x \in \mathbb{T}. \tag{5.3.10}$$

*Θεωρούμε τη συνάρτηση $G(x) = F(x) - \widehat{f}(0)x$. Τότε,*

$$\widehat{G}(k) = \frac{\widehat{f}(k)}{ik} \tag{5.3.11}$$

*για κάθε $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.*

*Απόδειξη.* Παρατηρήστε αρχικά ότι

$$F(x + 2\pi) - F(x) = \int_x^{x+2\pi} f(t)\,d\lambda(t) = \int_{\mathbb{T}} f(t)\,d\lambda(t) = 2\pi\widehat{f}(0). \tag{5.3.12}$$

Άρα, αν $\widehat{f}(0) \neq 0$ τότε η $F$ δεν είναι $2\pi$-περιοδική. Γι' αυτό το λόγο θεωρούμε τη συνάρτηση $G(x) = F(x) - \widehat{f}(0)x$. Η $G$ είναι $2\pi$-περιοδική, απολύτως συνεχής, και $G'(x) = f(x) - \widehat{f}(0)$ σχεδόν παντού στο $\mathbb{T}$. Για κάθε $k \neq 0$ έχουμε

$$\begin{aligned}\widehat{G}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} G(t)e^{-ikt}d\lambda(t) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{G(t)e^{-ikt}}{-ik}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi(ik)}\int_{\mathbb{T}}(f(t) - \widehat{f}(0))e^{-ikt}d\lambda(t)\\ &= \frac{1}{(ik)}\widehat{f}(k).\end{aligned}$$

□

**Παρατήρηση 5.3.3.** Έστω $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Για κάθε $k \neq 0$, ολοκληρώνοντας κατά μέρη γράφουμε

$$\begin{aligned} 2\pi\widehat{f}(k) &= \int_{\mathbb{T}} f(x)e^{-ikx}d\lambda(x) = f(x)\,\frac{-e^{-ikx}}{ik}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{ik}\int_{\mathbb{T}} f'(x)e^{-ikx}d\lambda(x) \\ &= \frac{1}{ik}\int_{\mathbb{T}} f'(x)e^{-ikx}d\lambda(x), \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι, αφού η $f$ είναι $2\pi$-περιοδική,

$$f(x)\,\frac{-e^{-ikx}}{ik}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Με άλλα λόγια,

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{ik}\,\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f'(x)e^{-ikx}d\lambda(x) = \frac{1}{ik}\widehat{f'}(k) \tag{5.3.13}$$

για κάθε $k \neq 0$. Από την περιοδικότητα της $f$ είναι φανερό ότι

$$2\pi\widehat{f'}(0) = \int_{\mathbb{T}} f'(x) = f(\pi) - f(-\pi) = 0. \tag{5.3.14}$$

Συνεπώς,

$$\widehat{f'}(k) = ik\widehat{f}(k), \qquad k \in \mathbb{Z}. \tag{5.3.15}$$

Ομοίως, αν η $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη, τότε

$$\widehat{f''}(k) = (ik)\widehat{f'}(k) = (ik)^2\widehat{f}(k) \tag{5.3.16}$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, και επαγωγικά έχουμε την ακόλουθη πρόταση.

**Πρόταση 5.3.4.** *Έστω $f \in C^m(\mathbb{T})$, δηλαδή η $f$ είναι $m$ φορές συνεχώς παραγωγίσιμη. Τότε,*

$$\widehat{f^{(m)}}(k) = (ik)^m\widehat{f}(k) \tag{5.3.17}$$

*για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, και*

$$\lim_{|k|\to\infty}[k^m\widehat{f}(k)] = 0. \tag{5.3.18}$$

*Ειδικότερα, υπάρχει $C > 0$ ώστε, για κάθε $k \neq 0$,*

$$|\widehat{f}(k)| \leqslant \frac{C}{|k|^m}. \tag{5.3.19}$$

*Απόδειξη.* Είναι άμεση συνέπεια της Πρότασης 5.3.5, την οποία εφαρμόζουμε, διαδοχικά, $m$ φορές. Ο τελευταίος ισχυρισμός προκύπτει από το λήμμα Riemann-Lebesgue (Θεώρημα 5.3.1) το οποίο εφαρμόζουμε για την $f^{(m)}$. $\square$

Γενικότερα, η (5.3.15) ισχύει για τις απολύτως συνεχείς συναρτήσεις.

**Πρόταση 5.3.5.** *Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Αν η $f$ είναι απολύτως συνεχής, τότε*

$$\widehat{f'}(k) = (ik)\widehat{f}(k) \tag{5.3.20}$$

*για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, και $\lim_{|k|\to\infty}[k\widehat{f}(k)] = 0$.*

*Απόδειξη.* Παρατηρούμε ότι

$$f(x) = f(-\pi) + \int_{-\pi}^{x} f'(t)\,d\lambda(t) \tag{5.3.21}$$

διότι η $f$ είναι απολύτως συνεχής. Κατόπιν, εφαρμόζουμε την Πρόταση 5.3.2.

Για τον τελευταίο ισχυρισμό χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι $\widehat{f'}(k) \to 0$ όταν $|k| \to \infty$, το οποίο έπεται από το λήμμα Riemann-Lebesgue αφού $f' \in L_1(\mathbb{T})$. □

Η επόμενη πρόταση δείχνει ότι αν τα μερικά αθροίσματα $s_n$ της τριγωνομετρικής σειράς

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \tag{5.3.22}$$

συγκλίνουν σε μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f$ ως προς την $\|\cdot\|_1$, τότε $c_k = \widehat{f}(k)$ για κάθε $k$.

**Πρόταση 5.3.6.** *Έστω $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}$ μια τριγωνομετρική σειρά και έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Αν $\|s_n - f\|_1 \to 0$ καθώς το $n \to \infty$, τότε*

$$c_k = \widehat{f}(k) \quad \text{για κάθε } k \in \mathbb{Z}. \tag{5.3.23}$$

*Απόδειξη.* Σταθεροποιούμε $k \in \mathbb{Z}$ και γράφουμε

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} (f(x) - s_n(x))e^{-ikx} d\lambda(x) + \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} s_n(x)e^{-ikx} d\lambda(x). \tag{5.3.24}$$

Παρατηρούμε ότι, αν $n \geqslant |k|$ τότε

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} s_n(x)e^{-ikx} d\lambda(x) = c_k. \tag{5.3.25}$$

Άρα, για κάθε $n \geqslant |k|$ έχουμε

$$\begin{aligned} |\widehat{f}(k) - c_k| &= \left| \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} (f(x) - s_n(x))e^{-ikx} d\lambda(x) \right| \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(x) - s_n(x)|\,d\lambda(x) = \|f - s_n\|_1 \to 0 \end{aligned}$$

καθώς το $n \to \infty$. Έπεται ότι $c_k = \widehat{f}(k)$. □

Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 5.3.6 και το θώρημα μοναδικότητας (Πόρισμα 5.2.11) μπορούμε να δώσουμε καταφατική απάντηση στο ερώτημα της σημειακής σύγκλισης της $s_n(f)$ στην $f$ αν η $f$ είναι συεχής και η σειρά των συντελεστών Fourier της $f$ συγκλίνει απολύτως.

**Θεώρημα 5.3.7.** *Έστω $f:\mathbb{T}\to\mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\widehat{f}(k)|<+\infty. \tag{5.3.26}$$

*Τότε, η σειρά Fourier της $f$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $f$. Δηλαδή,*

$$s_n(f)\overset{\text{ομ}}{\longrightarrow} f. \tag{5.3.27}$$

*Απόδειξη.* Από την υπόθεση ότι $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}|\widehat{f}(k)|<+\infty$ βλέπουμε ότι η ακολουθία συναρτήσεων

$$s_n(f,x)=\sum_{k=-n}^{n}\widehat{f}(k)e^{ikx} \tag{5.3.28}$$

είναι ομοιόμορφα βασική: πράγματι, για κάθε $m>n$ έχουμε

$$\|s_m(f)-s_n(f)\|_\infty=\max_{x\in\mathbb{T}}|s_m(f)(x)-s_n(f,x)|\leqslant\sum_{n<|k|\leqslant m}|\widehat{f}(k)|\to 0 \tag{5.3.29}$$

όταν $m,n\to\infty$. Συνεπώς, η $\{s_n(f)\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνεχή συνάρτηση $g:\mathbb{T}\to\mathbb{C}$. Ειδικότερα,

$$\|s_n(f)-g\|_1\leqslant\|s_n(f)-g\|_\infty\to 0, \tag{5.3.30}$$

οπότε η Πρόταση 5.3.6 μας εξασφαλίζει ότι

$$\widehat{f}(k)=\widehat{g}(k) \tag{5.3.31}$$

για κάθε $k\in\mathbb{Z}$. Αφού οι συνεχείς συναρτήσεις $f$ και $g$ έχουν τους ίδιους συντελεστές Fourier, από το Πόρισμα 5.2.11 συμπεραίνουμε ότι $g\equiv f$. Συνεπώς, $s_n(f)\overset{\text{ομ}}{\longrightarrow} f$. □

Η υπόθεση $\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\widehat{f}(k)|<\infty$ εξασφαλίζεται, για παράδειγμα, αν η $f$ έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο. Αυτό προκύπτει από την Πρόταση 5.3.4, αφού υπάρχει $C>0$ ώστε, για κάθε $k\neq 0$,

$$|\widehat{f}(k)|\leqslant\frac{C}{|k|^2}. \tag{5.3.32}$$

Συνεπώς, έχουμε το εξής:

**Πρόταση 5.3.8.** *Έστω $f:\mathbb{T}\to\mathbb{C}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση και έστω ότι η $f''$ είναι συνεχής. Τότε, η σειρά Fourier της $f$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $f$.* □

**Παρατήρηση 5.3.9.** Έστω $f\in L_1(\mathbb{T})$. Ένα φυσιολογικό ερώτημα που προκύπτει από το Θεώρημα 5.3.7 είναι να δοθούν ικανές συνθήκες ώστε η σειρά $\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\widehat{f}(k)|$ να συγκλίνει: αυτό εξασφαλίζει, όπως είδαμε, την ομοιόμορφη σύγκλιση της $S(f)$ στην $f$. Είδαμε ότι αρκεί η συνέχεια της $f''$. Όπως θα δούμε αργότερα, η σύγκλιση της σειράς $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}|\widehat{f}(k)|$ εξασφαλίζεται και με ασθενέστερες υποθέσεις για την $f$. Αρκεί να υποθέσουμε ότι η $f$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη. Ακόμα ασθενέστερη συνθήκη για την $f$ είναι να ικανοποιεί *συνθήκη Hölder τάξης $\alpha>1/2$*: δηλαδή, να υπάρχει $M>0$ ώστε

$$|f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y|^\alpha \tag{5.3.33}$$

για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.

Κλείνουμε αυτήν την παράγραφο με κάποιες παρατηρήσεις για τους συντελεστές Fourier της συνέλιξης δύο ολοκληρώσιμων συναρτήσεων.

**Θεώρημα 5.3.10.** *Έστω $f, g \in L_1(\mathbb{T})$. Αν $f * g$ είναι η συνέλιξη των $f$ και $g$, η οποία ορίζεται μέσω της*

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x-t) g(t)\, d\lambda(t), \tag{5.3.34}$$

*τότε*

$$\widehat{f * g}(k) = \widehat{f}(k)\widehat{g}(k) \tag{5.3.35}$$

*για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.*

*Απόδειξη.* Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε ότι η $f * g$ ορίζεται καλά σχεδόν παντού στο $\mathbb{T}$, είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση, και $\|f * g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \|g\|_1$. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Fubini γράφουμε

$$\begin{aligned}
\widehat{f * g}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x-t) g(t)\, d\lambda(t) \right) e^{-ikx} d\lambda(x) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} g(t) e^{-ikt} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x-t) e^{-k(x-t)} d\lambda(x) \right) d\lambda(t) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} g(t) e^{-ikt} \widehat{f}(k)\, d\lambda(t) \\
&= \widehat{f}(k)\widehat{g}(k).
\end{aligned}$$

□

**Πόρισμα 5.3.11.** *Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Αν $p(x) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx}$ είναι ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού $N$ τότε η συνέλιξη $f * p$ είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού μικρότερου ή ίσου από $N$, το οποίο δίνεται από την*

$$(f * p)(x) = \sum_{k=-N}^{N} c_k \widehat{f}(k) e^{ikx}. \tag{5.3.36}$$

*Απόδειξη.* Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
(f * p)(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) p(x-t)\, d\lambda(t) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ik(x-t)}\, d\lambda(t) \\
&= \sum_{k=-N}^{N} c_k \left( \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{-ikt}\, d\lambda(t) \right) e^{ikx} \\
&= \sum_{k=-N}^{N} c_k \widehat{f}(k) e^{ikx},
\end{aligned}$$

άρα η $f * g$ είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού μικρότερου ή ίσου από $N$. □

### 5.3.1 Μοναδικότητα σειρών Fourier

Είδαμε ότι αν μια συνεχής $2\pi$-περιοδική συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ έχει όλους τους συντελεστές Fourier $\widehat{f}(k)$ ίσους με μηδέν, τότε $f\equiv 0$. Κλείνουμε αυτήν την παράγραφο με το ακόλουθο ισχυρότερο θεώρημα μοναδικότητας.

**Θεώρημα 5.3.12.** *Εστω $f\in L_1(\mathbb{T})$ με $\widehat{f}(k)=0$ για κάθε $k\in\mathbb{Z}$. Αν η $f$ είναι συνεχής στο σημείο $x_0\in\mathbb{T}$ τότε $f(x_0)=0$.*

*Απόδειξη.* Υποθέτουμε πρώτα ότι η $f$ παίρνει πραγματικές τιμές. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η $f$ ορίζεται στο $[-\pi,\pi]$ και ότι $x_0=0$. [Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση: αν η $f$ είναι συνεχής στο $x_0$, τότε η $g(x)=f(x+x_0)$ είναι συνεχής στο $0$ – υπολογίστε τους συντελεστές Fourier της $g$.]

Θα υποθέσουμε ότι $f(0)>0$ και θα καταλήξουμε σε άτοπο (τελείως ανάλογα αποκλείουμε την περίπτωση $f(0)<0$). Η ιδέα είναι να ορίσουμε κατάλληλη ακολουθία $\{p_m\}$ τριγωνομετρικών πολυωνύμων τα οποία παρουσιάζουν «κορυφή» στο σημείο $0$ και από αυτή τους την ιδιότητα να συμπεράνουμε ότι

$$\lim_{k\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}p_m(\vartheta)f(\vartheta)\,d\vartheta=+\infty. \tag{5.3.37}$$

Αυτό είναι προφανώς άτοπο, αφού η υπόθεση ότι $\widehat{f}(k)=0$ για κάθε $k\in\mathbb{Z}$ δείχνει ότι όλα τα παραπάνω ολοκληρώματα είναι ίσα με $0$.

Αρχικά, εφαρμόζοντας τον ορισμό της συνέχειας για την $f$ στο σημείο $0$, βρίσκουμε $0<\delta<\pi/2$ ώστε $f(x)>f(0)/2$ για κάθε $x\in(-\delta,\delta)$.

Παρατηρούμε ότι $\cos x\leqslant\cos\delta<1$ αν $\delta\leqslant|x|\leqslant\pi$. Συνεπώς, υπάρχει $\varepsilon>0$ ώστε

$$|\varepsilon+\cos x|<1-\varepsilon/2 \tag{5.3.38}$$

για κάθε $\delta\leqslant|x|\leqslant\pi$. Αρκεί να επιλέξουμε $0<\varepsilon<\frac{2(1-\cos\delta)}{3}$. Τότε, αν $\varepsilon+\cos x\geqslant 0$ έχουμε $|\varepsilon+\cos x|=\varepsilon+\cos x\leqslant\varepsilon+\cos\delta<1-\varepsilon/2$ από την επιλογή του $\varepsilon$, ενώ αν $\varepsilon+\cos x<0$ έχουμε $|\varepsilon+\cos x|=-\cos x-\varepsilon\leqslant 1-\varepsilon<1-\varepsilon/2$.

Ορίζουμε

$$p(x)=\varepsilon+\cos x,\qquad x\in[-\pi,\pi]. \tag{5.3.39}$$

Τότε, $p(0)=1+\varepsilon$, συνεπώς υπάρχει $0<\eta<\delta$ ώστε

$$p(x)\geqslant 1+\varepsilon/2,\qquad x\in(-\eta,\eta). \tag{5.3.40}$$

Τώρα, για κάθε $m=1,2,\ldots$, ορίζουμε

$$p_m(x)=[p(x)]^m=(\varepsilon+\cos x)^m. \tag{5.3.41}$$

Παρατηρήστε ότι κάθε $p_m$ είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο (εξηγήστε γιατί). Αφού $\widehat{f}(k)=0$ για κάθε $k\in\mathbb{Z}$, συμπεραίνουμε ότι

$$\int_{-\pi}^{\pi}p_m(x)f(x)\,d\lambda(x)=0,\qquad k=1,2,\ldots. \tag{5.3.42}$$

Γράφουμε

$$\int_{-\pi}^{\pi} p_m(x)f(x)\,d\lambda(x) = \int_{\delta\leqslant|x|\leqslant\pi} p_m(x)f(x)\,d\lambda(x) + \int_{\eta\leqslant|x|<\delta} p_m(x)f(x)\,d\lambda(x) + \int_{|x|<\eta} p_m(x)f(x)\,d\lambda(x), \tag{5.3.43}$$

και παρατηρούμε ότι:

(i) Για το πρώτο ολοκλήρωμα έχουμε $|p_m(x)f(x)| \leqslant (1-\varepsilon/2)^m|f(x)| \leqslant |f(x)|$ και η $f$ είναι ολοκληρώσιμη στο $K_\delta := \{x : \delta \leqslant |x| \leqslant \pi\}$. Αφού $|p_m(x)f(x)| \leqslant (1-\varepsilon/2)^m|f(x)| \to 0$ σε κάθε $x \in K_\delta$ για το οποίο $|f(x)| < \infty$, έχουμε $p_m(x)f(x) \to 0$ σχεδόν παντού στο $K_\delta$, και εφαρμόζοντας το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης παίρνουμε

$$\int_{\delta\leqslant|x|\leqslant\pi} p_m(x)f(x)\,d\lambda(x) \to 0 \tag{5.3.44}$$

όταν $m \to \infty$.

(ii) Για το δεύτερο ολοκλήρωμα έχουμε

$$\int_{\eta\leqslant|x|<\delta} p_m(x)f(x)\,d\lambda(x) \geqslant 0 \tag{5.3.45}$$

διότι $p(x) \geqslant 0$ και $f(x) \geqslant 0$ στο $\{x : \eta \leqslant |x| < \delta\}$.

(iii) Για το τρίτο ολοκλήρωμα ισχύει το κάτω φράγμα

$$\int_{|x|<\eta} p_m(x)f(x)\,d\lambda(x) \geqslant 2\eta\frac{f(0)}{2}(1+\varepsilon/2)^m. \tag{5.3.46}$$

Αφού

$$\lim_{m\to\infty}(1+\varepsilon/2)^m = +\infty, \tag{5.3.47}$$

συνδυάζοντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι

$$\lim_{m\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} p_m(x)f(x)\,d\lambda(x) = +\infty. \tag{5.3.48}$$

Έτσι, οδηγούμαστε σε άτοπο στην περίπτωση που η $f$ παίρνει πραγματικές τιμές.

Στη γενική περίπτωση που η $f$ παίρνει τιμές στο $\mathbb{C}$, γράφουμε $f(x) = u(x) + iv(x)$, όπου οι $u$ και $v$ είναι ολοκληρώσιμες πραγματικές συναρτήσεις. Αν θέσουμε $g(x) = \overline{f(x)}$, έχουμε

$$u(x) = \frac{f(x)+g(x)}{2} \quad \text{και} \quad v(x) = \frac{f(x)-g(x)}{2i}. \tag{5.3.49}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\widehat{g}(k) = \overline{\widehat{f}(k)} = 0, \qquad k \in \mathbb{Z}. \tag{5.3.50}$$

Έπεται ότι

$$\widehat{u}(k) = \frac{\widehat{f}(k) + \widehat{g}(k)}{2} = 0 \qquad \text{και} \qquad \widehat{v}(k) = \frac{\widehat{f}(k) - \widehat{g}(k)}{2i} = 0 \tag{5.3.51}$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Έστω ότι η $f$ είναι συνεχής στο $x_0$. Από τη συνέχεια των $u$ και $v$ στο $x_0$, από το γεγονός ότι οι συντελεστές Fourier των $u$ και $v$ μηδενίζονται και από το αποτέλεσμα στην πραγματική περίπτωση, συμπεραίνουμε ότι $u(x_0) = v(x_0) = 0$. Άρα, $f(x_0) = u(x_0) + iv(x_0) = 0$. □

## 5.4 Ο πυρήνας του Dirichlet

Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Ξεκινώντας από την παρατήρηση ότι

$$\begin{aligned} s_n(f,x) &= \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{ikx} = \sum_{k=-n}^{n} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)e^{-ikt}d\lambda(t)\right) e^{ikx} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)\left(\sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-t)}\right) d\lambda(t), \end{aligned}$$

δίνουμε τον παρακάτω ορισμό.

**Ορισμός 5.4.1.** Ο $n$-οστός πυρήνας του Dirichlet είναι η συνάρτηση

$$D_n(y) = \sum_{k=-n}^{n} e^{iky}, \quad n \geqslant 0. \tag{5.4.1}$$

Σύμφωνα με αυτόν τον ορισμό, ο προηγούμενος υπολογισμός μας δίνει το εξής.

**Λήμμα 5.4.2.** *Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Για κάθε $n \geqslant 0$ ισχύει*

$$s_n(f,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)D_n(x-t)\,d\lambda(t). \tag{5.4.2}$$

**Παρατήρηση 5.4.3.** Θα χρησιμοποιούμε συχνά τις παρακάτω βασικές ιδιότητες του πυρήνα $D_n$.

(i) Από τον Ορισμό 5.4.1 παίρνουμε: αν $0 < |y| \leqslant \pi$ τότε

$$\begin{aligned} D_n(y) &= e^{-iny}\sum_{k=-n}^{n} e^{i(k+n)y} = e^{-iny}\sum_{k=0}^{2n} e^{iky} \\ &= e^{-iny}\frac{e^{i(2n+1)y}-1}{e^{iy}-1} = \frac{e^{i(n+1)y}-e^{-iny}}{e^{iy}-1} \\ &= \frac{e^{iy/2}\left(e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)y} - e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)y}\right)}{e^{iy/2}(e^{iy/2}-e^{-iy/2})} \\ &= \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)y}{\sin\frac{y}{2}}. \end{aligned}$$

(ii) Πάλι από τον ορισμό της $D_n$, και από την γραμμικότητα του ολοκληρώματος, έχουμε

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} D_n(y)\,d\lambda(y) = 1, \tag{5.4.3}$$

για κάθε $n$. Παρατηρήστε ότι η $D_n$ είναι άρτια συνάρτηση. Άρα, μπορούμε επίσης να γράψουμε την προηγούμενη ισότητα στη μορφή

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} D_n(y)\,d\lambda(y) = 1. \tag{5.4.4}$$

(iii) Τα δύο βασικά άνω φράγματα για την $|D_n(y)|$ είναι:

$$|D_n(y)| \leqslant \sum_{k=-n}^{n} |e^{iky}| = 2n+1 \tag{5.4.5}$$

με ισότητα όταν $y=0$, και

$$|D_n(y)| = \left|\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)y}{\sin\frac{y}{2}}\right| \leqslant \frac{1}{\sin\frac{y}{2}} \leqslant \frac{\pi}{y}, \qquad 0<y<\pi, \tag{5.4.6}$$

η οποία προκύπτει από το γεγονός ότι $\sin t \geqslant \frac{2t}{\pi}$ για κάθε $t \in (0,\pi/2)$. Αφού η $D_n$ είναι άρτια, συμπεραίνουμε ότι

$$|D_n(y)| \leqslant \frac{\pi}{|y|}, \qquad 0<|y|<\pi. \tag{5.4.7}$$

**Ορισμός 5.4.4.** Για κάθε $n \geqslant 1$ ορίζουμε

$$D_n^*(y) = \frac{D_{n-1}(y)+D_n(y)}{2}, \qquad y \in \mathbb{T}. \tag{5.4.8}$$

Πρατηρήστε ότι

$$D_n^*(y) = \frac{1}{\sin\frac{y}{2}}\Big(\sin\big(n-\frac{1}{2}\big)y + \sin\big(n+\frac{1}{2}\big)y\Big) = \frac{\sin(ny)}{\tan\frac{y}{2}}. \tag{5.4.9}$$

Αν $f \in L_1(\mathbb{T})$, για κάθε $n \geqslant 1$ και για κάθε $t \in \mathbb{T}$ θέτουμε

$$s_n^*(f,x) := \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)D_n^*(x-t)\,d\lambda(t). \tag{5.4.10}$$

Δεδομένου ότι

$$D_n(y) - D_n^*(y) = \frac{D_n(y)-D_{n-1}(y)}{2} = \frac{e^{iny}+e^{-iny}}{2} = \cos(ny), \tag{5.4.11}$$

συμπεραίνουμε ότι

$$s_n(f,x) = s_n^*(f,x) + \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)\cos n(x-t)\,d\lambda(t). \tag{5.4.12}$$

**Λήμμα 5.4.5.** *Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Για κάθε $x \in \mathbb{T}$ ισχύει*

$$s_n(f,x) - s_n^*(f,x) \to 0 \ \ \text{καθώς το } n \to \infty. \tag{5.4.13}$$

*Απόδειξη.* Λόγω της (5.4.12) αρκεί να ελέγξουμε ότι

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)\cos n(x-t)\,d\lambda(t) &= \cos(nx)\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)\cos(nt)\,d\lambda(t)\\ &\quad + \sin(nx)\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)\sin(nt)\,d\lambda(t) \to 0,\end{aligned} \tag{5.4.14}$$

το οποίο ισχύει από το λήμμα Riemann-Lebesgue. □

**Παρατήρηση 5.4.6.** Θεωρούμε την συνάρτηση

$$\varphi(y) = \frac{1}{\tan\frac{y}{2}} - \frac{2}{y}. \tag{5.4.15}$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι το $\lim_{y\to 0}\varphi(y)$ υπάρχει, άρα $\varphi \in L_\infty(\mathbb{T})$. Αν λοιπόν $f \in L_1(\mathbb{T})$ τότε $f\varphi \in L_1(\mathbb{T})$, και από το λήμμα Riemann-Lebesgue έχουμε

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)\varphi(x-t)\sin n(x-t)\,d\lambda(t) \to 0. \tag{5.4.16}$$

Έπεται ότι

$$s_n^*(f,x) - \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)\frac{\sin n(x-t)}{x-t}\,d\lambda(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)\varphi(x-t)\sin n(x-t)\,d\lambda(t) \to 0. \tag{5.4.17}$$

Από το Λήμμα 5.4.5 καταλήγουμε στην

$$s_n(f,x) - \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)\frac{\sin n(x-t)}{x-t}\,d\lambda(t) \to 0. \tag{5.4.18}$$

**Παρατήρηση 5.4.7.** Αφού $D_n^* = \frac{1}{2}(D_{n-1}+D_n)$, οι βασικές ιδιότητες της $D_n^*$ προκύπτουν άμεσα από αυτές της $D_n$. Έχουμε ότι η $D_n^*$ είναι άρτια συνάρτηση, και

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} D_n^*(y)\,d\lambda(y) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} D_n^*(y)\,d\lambda(y) = 1 \tag{5.4.19}$$

για κάθε $n \geqslant 1$. Τα δύο βασικά άνω φράγματα για την $|D_n^*(y)|$ είναι:

$$|D_n^*(y)| \leqslant \frac{1}{2}(|D_{n-1}(y)| + |D_n(y)|) \leqslant \frac{1}{2}\left((2n-1)+(2n+1)\right) = 2n \tag{5.4.20}$$

με ισότητα όταν $y=0$, και

$$|D_n^*(y)| \leqslant \frac{\pi}{|y|}, \qquad 0 < |y| < \pi. \tag{5.4.21}$$

## 5.5 Σειρές Fourier συνεχών συναρτήσεων

Σκοπός μας σε αυτήν την παράγραφο είναι να δείξουμε ότι υπάρχουν συνεχείς $2\pi$-περιοδικές συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ που η σειρά Fourier τους αποκλίνει σε κάποιο σημείο. Θα δώσουμε δύο αποδείξεις. Η πρώτη είναι έμμεση και χρησιμοποιεί την αρχή ομοιόμορφου φράγματος (θεώρημα Banach-Steinhaus) ενώ η δεύτερη είναι κατασκευαστική.

**Ορισμός 5.5.1** (σταθερές Lebesgue)**.** Για κάθε $n \geqslant 0$, η $n$-οστή σταθερά Lebesgue $L_n$ ορίζεται ως εξής:

$$L_n = \|D_n\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |D_n(y)|\, d\lambda(y). \tag{5.5.1}$$

Στην επόμενη πρόταση υπολογίζουμε την τάξη μεγέθους της σταθεράς $L_n$ για μεγάλες τιμές του $n$.

**Πρόταση 5.5.2.** *Ισχύει*

$$L_n \sim \frac{4\ln n}{\pi^2} \tag{5.5.2}$$

*καθώς το $n \to \infty$.*

*Σημείωση.* Ο συμβολισμός $a_n \sim b_n$ σημαίνει ότι η ακολουθία $\{a_n - b_n\}$ είναι φραγμένη: υπάρχει σταθερά $A > 0$ ώστε $|a_n - b_n| \leqslant A$ για κάθε $n$. Ένας άλλος τρόπος για να περιγράψουμε την ίδια ιδιότητα είναι να γράψουμε $a_n - b_n = O(1)$. Γράφοντας $a_n = b_n + o(1)$ εννοούμε ότι $a_n - b_n \to 0$ καθώς το $n \to \infty$.

*Απόδειξη.* Αφού η $D_n$ είναι άρτια και $\sin\frac{t}{2} > 0$ στο $(0,\pi)$, έχουμε

$$\begin{aligned} L_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} |\sin((n+1/2)t)| \left(\frac{1}{\sin\frac{t}{2}} - \frac{2}{t}\right) d\lambda(t) \\ &\quad + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |\sin((n+1/2)t)|\, \frac{1}{t}\, d\lambda(t) = A_n + B_n. \end{aligned}$$

Ο πρώτος όρος είναι φραγμένος: αφού η $\varphi(t) = \left(\frac{1}{\sin\frac{t}{2}} - \frac{2}{t}\right)$ είναι φραγμένη, έχουμε $A_n = O(1)$. Για τον δεύτερο όρο, κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $s = \left(n + \frac{1}{2}\right)t$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{n\pi+\pi/2} |\sin s|\, \frac{d\lambda(s)}{s} = \frac{2}{\pi}\int_{\pi}^{n\pi} |\sin s|\, \frac{d\lambda(s)}{s} + O(1) \\ &= C_n + O(1), \end{aligned}$$

αφού, λόγω της $\lim_{s\to 0^+}\frac{\sin s}{s} = 1$, έχουμε

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin s}{s}\, d\lambda(s) = O(1) \quad \text{και} \quad \int_{n\pi}^{n\pi+\pi/2} \frac{|\sin s|}{s}\, d\lambda(s) \leqslant \frac{\pi}{2}\frac{1}{n\pi} \leqslant \frac{1}{2}. \tag{5.5.3}$$

Μένει λοιπόν να δείξουμε ότι

$$C_n := \frac{2}{\pi}\int_{\pi}^{n\pi} |\sin s|\, \frac{d\lambda(s)}{s} = \frac{4}{\pi^2}\ln n + O(1). \tag{5.5.4}$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin s|}{s}\,d\lambda(s) \\ &= \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\int_0^{\pi}\frac{|\sin(k\pi+t)|}{k\pi+t}\,d\lambda(t) \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\sin t)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k\pi+t}\,d\lambda(t). \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι, για κάθε $t\in(0,\pi)$,

$$\frac{1}{(k+1)\pi}\leqslant\frac{1}{k\pi+t}\leqslant\frac{1}{k\pi}, \tag{5.5.5}$$

άρα

$$\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}\leqslant\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k\pi+t}\leqslant\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}. \tag{5.5.6}$$

Τα δύο αθροίσματα $\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}$ και $\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$ είναι $\ln n+O(1)$. Αφού $\int_0^{\pi}\sin t\,d\lambda(t)=2$, καταλήγουμε στην

$$C_n=\frac{4}{\pi^2}\ln n+O(1) \tag{5.5.7}$$

και η απόδειξη είναι πλήρης. □

**Πόρισμα 5.5.3.** *Για κάθε $f\in L_\infty(\mathbb{T})$ και για κάθε $x\in\mathbb{T}$ και $n\geqslant 2$ ισχύει*

$$|s_n(f,x)|\leqslant C(\ln n)\,\|f\|_\infty, \tag{5.5.8}$$

*όπου $C>0$ απόλυτη σταθερά.*

*Απόδειξη.* Έχουμε

$$\begin{aligned} |s_n(f,x)| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}|f(x-t)|\,|D_n(t)|\,d\lambda(t)\right|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}\|f\|_\infty|D_n(t)|\,d\lambda(t) \\ &= \|D_n\|_1\|f\|_\infty\leqslant C\cdot\ln n\,\|f\|_\infty \end{aligned}$$

διότι $\|D_n\|_1=L_n\leqslant C\cdot\ln n$ από την Πρόταση 5.5.2. □

Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι υπάρχει $f\in C(\mathbb{T})$ για την οποία η ακολουθία $s_n(f,0)$ δεν είναι φραγμένη (άρα, δεν συγκλίνει). Η επόμενη πρόταση συνδέει το πρόβλημα με την συμπεριφορά της ακολουθίας $(L_n)$.

**Πρόταση 5.5.4.** *Για κάθε $n\in\mathbb{N}$*

$$\sup_{f\in C(\mathbb{T}),\|f\|_\infty\leqslant 1}|s_n(f,0)|=L_n. \tag{5.5.9}$$

*Απόδειξη.* Θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι αν $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ είναι μια Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση, τότε για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ ώστε $|f(x)| \leqslant \|g\|_\infty$ για κάθε $x \in \mathbb{T}$ και

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(x) - g(x)|\, d\lambda(x) < \delta. \tag{5.5.10}$$

Η συνάρτηση $g(x) = \mathrm{sign}\, D_n(x)$, όπου $\mathrm{sign}\, u$ είναι το πρόσημο του $u$ και $\mathrm{sign}\, 0 = 0$, είναι Riemann ολοκληρώσιμη (έχει πεπερασμένα το πλήθος σημεία ασυνέχειας, όσα είναι τα σημεία στα οποία αλλάζει πρόσημο η $D_n$) και $\|g\|_\infty = 1$. Μπορούμε λοιπόν να βρούμε συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ ώστε $\|f\|_\infty \leqslant 1$ και

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \mathrm{sign}\, D_n(x)|\, d\lambda(x) < \frac{\varepsilon}{2n+1}. \tag{5.5.11}$$

Τότε,

$$\begin{aligned}
|s_n(f,0)| &= \left| \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(y) D_n(-y)\, d\lambda(y) \right| \\
&\geqslant \left| \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \mathrm{sign}\, D_n(y) D_n(-y)\, d\lambda(y) \right| - \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(y) - g(y)| |D_n(-y)|\, d\lambda(y) \\
&\geqslant \left| \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \mathrm{sign}\, D_n(y) D_n(y)\, d\lambda(y) \right| - \frac{\varepsilon \|D_n\|_\infty}{2n+1} \\
&\geqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |D_n(y)|\, d\lambda(y) - \varepsilon,
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η $D_n$, άρα και η $\mathrm{sign}\, D_n$, είναι άρτια, καθώς και την $\|D_n\|_\infty = 2n+1$. Από τα παραπάνω βλέπουμε ότι $|s_n(f,0)| \geqslant L_n - \varepsilon$.

Από την άλλη πλευρά, για κάθε $f \in C(\mathbb{T})$ με $\|f\|_\infty \leqslant 1$ έχουμε

$$|s_n(f,0)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(y)|\, |D_n(y)|\, dy \leqslant \|D_n\|_1 \|f\|_\infty \leqslant L_n, \tag{5.5.12}$$

και η απόδειξη είναι πλήρης. □

Από την Πρόταση 5.5.4 και την Πρόταση 5.5.2, για κάθε $n$ υπάρχει $f_n \in C(\mathbb{T})$ ώστε

$$|s_n(f_n, 0)| \sim L_n \sim \frac{4}{\pi^2} \ln n. \tag{5.5.13}$$

Θα δείξουμε ότι υπάρχει *μία* $f \in C(\mathbb{T})$ ώστε

$$\sup_n |s_n(f,0)| = +\infty. \tag{5.5.14}$$

Ειδικότερα, η $f$ έχει σειρά Fourier η οποία αποκλίνει στο σημείο 0. Για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Banach-Steinhaus. Για λόγους πληρότητας δίνουμε την (σχετικά απλή) απόδειξή του, η οποία βασίζεται στο θεώρημα Baire.

**Πρόταση 5.5.5.** *Έστω $X$ πλήρης μετρικός χώρος και έστω $\{f_n\}$ ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $f_n : X \to \mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x \in X$ ισχύει*

$$\sup_n |f_n(x)| < \infty.$$

*Τότε, υπάρχουν $x_0 \in X$ και $r, M > 0$ ώστε $|f_n(x)| \leqslant M$ για κάθε $x \in B(x_0, r)$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*

*Απόδειξη.* Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$A_m = \{x \in X : \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N},\ |f_n(x)| \leqslant m\}. \tag{5.5.15}$$

Κάθε $A_m$ είναι κλειστό υποσύνολο του $X$: αυτό φαίνεται αμέσως αν γράψουμε

$$A_m = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X : |f_n(x)| \leqslant m\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}([-m, m])$$

και θυμηθούμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η αντίστροφη εικόνα του $[-m, m]$ μέσω της $f_n$ είναι κλειστό υποσύνολο του $X$ και ότι η τομή κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύολο.

Παρατηρήστε ότι $X = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$: Έστω $x \in X$. Από την υπόθεση, η ακολουθία $\{f_n(x)\}$ είναι φραγμένη, δηλαδή υπάρχει $M_x > 0$ ώστε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leqslant M_x$. Υπάρχει $m = m(x) \in \mathbb{N}$ με $m \geqslant M_x$. Τότε, $x \in A_m$.

Ο $X$ είναι πλήρης μετρικός χώρος, οπότε το θεώρημα Baire μας εξασφαλίζει ότι κάποιο $A_{m_0}$ έχει μη κενό εσωτερικό, δηλαδή υπάρχουν $x_0 \in X$ και $r > 0$ ώστε $B(x_0, r) \subseteq A_{m_0}$. Όμως τότε, η $\{f_n\}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη στην $B(x_0, r)$: για κάθε $x \in B(x_0, r)$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $|f_n(x)| \leqslant m_0$. □

**Ορισμός 5.5.6.** Έστω $X, Y$ δύο χώροι με νόρμα και έστω $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής (γραμμική απεικόνιση). Λέμε ότι ο $T$ είναι φραγμένος αν υπάρχει σταθερά $M > 0$ τέτοια ώστε

$$\|Tx\|_Y \leqslant M\, \|x\|_X$$

για κάθε $x \in X$.

Η αρχή του ομοιόμορφου φράγματος διατυπώνεται για μια ακολουθία $\{T_n\}$ φραγμένων γραμμικών τελεστών $T_n : X \to Y$ για τους οποίους ισχύει

$$\sup_n \|T_n(x)\|_Y < \infty$$

για κάθε $x \in X$. Αν ο $X$ είναι πλήρης, η γραμμικότητα των $T_n$ και η απλή ιδέα της απόδειξης της Πρότασης 5.5.5 μας δίνουν ότι $T_n$ είναι ομοιόμορφα φραγμένοι. Η ακριβής διατύπωση είναι η εξής:

**Θεώρημα 5.5.7** (αρχή ομοιόμορφου φράγματος, Banach-Steinhaus)**.** *Έστω $X$ χώρος Banach, $Y$ χώρος με νόρμα, και έστω $\{T_n\}$ μια ακολουθία από φραγμένους γραμμικούς τελεστές $T : X \to Y$ με την ιδιότητα: για κάθε $x \in X$,*

$$\sup_n \|Tx\|_Y < +\infty. \tag{5.5.16}$$

*Τότε, υπάρχει $M > 0$ ώστε: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in X$,*

$$\|Tx\|_Y \leqslant M\, \|x\|_X. \tag{5.5.17}$$

*Απόδειξη.* Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $f_n : X \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \|T(x)\|_Y$. Κάθε $f_n$ είναι Lipschitz συνεχής συνάρτηση. Γνωρίζουμε ότι ο $T_n$ είναι φραγμένος, άρα υπάρχει $M_n > 0$ τέτοιος ώστε $\|T_n(x)\|_Y \leqslant M_n\|x\|_X$ για κάθε $x \in X$. Αν $x, y \in X$, τότε

(5.5.18)

$$|f_n(x) - f_n(y)| = |\,\|T_n(x)\|_Y - \|T_n(y)\|_Y\,| \leqslant \|T_n(x) - T_n(y)\|_Y = \|T_n(x-y)\|_Y \leqslant M_n\|x-y\|_X.$$

Από την υπόθεσή μας, για κάθε $x \in X$ ισχύει

$$\sup_n |f_n(x)| = \sup_n \|T_n(x)\|_Y < +\infty. \tag{5.5.19}$$

Από την Πρόταση 5.5.5 υπάρχουν $x_0 \in X$ και $r, M_1 > 0$ ώστε για κάθε $x \in B(x_0, r)$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$|f_n(x)| = \|T_n(x)\|_Y \leqslant M_1. \tag{5.5.20}$$

Έστω $x \in X$ με $\|x\|_X \leqslant 1$. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $\|T(x_0 + (r/2)x)\|_Y \leqslant M_1$ και $\|T(x_0)\|_Y \leqslant M_1$ (γιατί $x_0, x_0 + (r/2)x \in B(x_0, r)$). Άρα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\|T_n(x)\|_Y &= \frac{2}{r}\|T_n((r/2)x)\|_Y = \frac{2}{r}\|T_n(x_0 + (r/2)x) - T_n(x_0)\|_Y \\ &\leqslant \frac{2}{r}\left(\|T_n(x_0 + (r/2)x)\|_Y + \|T_n(x_0)\|_Y\right) \leqslant \frac{4M_1}{r}.\end{aligned}$$

Τώρα, για κάθε $x \neq 0$ θέτουμε $x_1 = x/\|x\|_X$ και παρατηρούμε ότι $\|x_1\|_X = 1$, άρα

$$\|T_n(x)\|_Y = \|T_n(\|x\|_X x_1)\|_X = \|x\|_X\|T_n(x_1)\|_Y \leqslant \frac{4M_1}{r}\|x\|_X \tag{5.5.21}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε το ζητούμενο έπεται με $M = 4M_1/r$. □

Εφαρμόζουμε το θεώρημα Banach-Steinhaus για τους γραμμικούς τελεστές $f \mapsto s_n(f, 0)$, $f \in C(\mathbb{T})$.

**Θεώρημα 5.5.8.** *Υπάρχει $f \in C(\mathbb{T})$ ώστε*

$$\sup_n |s_n(f, 0)| = +\infty. \tag{5.5.22}$$

*Απόδειξη.* Για κάθε $n$ θεωρούμε τον τελεστή $T_n : (C(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{C}$ με

$$T_n(f) = s_n(f, 0). \tag{5.5.23}$$

Κάθε $T_n$ είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές: η γραμμικότητα ελέγχεται εύκολα, και

$$\|T_n\| = \sup\{|s_n(f, 0)| : f \in C(\mathbb{T}), \|f\|_\infty \leqslant 1\} = L_n. \tag{5.5.24}$$

Ας υποθέσουμε ότι, για κάθε $f \in C(\mathbb{T})$ ισχύει

$$\sup_n |T_n(f)| = \sup_n |s_n(f, 0)| < \infty. \tag{5.5.25}$$

Από το θεώρημα Banach-Steinhaus υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$|s_n(f,0)| = |T_n(f)| \leqslant M$$

για κάθε $f \in C(\mathbb{T})$ με $\|f\|_\infty \leqslant 1$. Από την Πρόταση 5.5.4 παίρνουμε

$$L_n = \sup_{f \in C(\mathbb{T}), \|f\|_\infty \leqslant 1} |s_n(f,0)| \leqslant M \tag{5.5.26}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα η $(L_n)$ είναι φραγμένη, το οποίο είναι άτοπο από την Πρόταση 5.5.2.

Συνεπώς, υπάρχει $f \in C(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $\limsup_n |s_n(f,0)| = +\infty$. Ειδικότερα, η σειρά Fourier της $f$ αποκλίνει στο σημείο 0. □

### 5.5.1 Μια κατασκευή του Lebesgue

Κλείνουμε αυτήν την παράγραφο με μια κατασκευαστική απόδειξη της ύπαρξης συνεχούς $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ για την οποία

$$\limsup_{n \to \infty} |s_n(f,0)| = \infty. \tag{5.5.27}$$

Το επιχείρημα οφείλεται στον Lebesgue. Στην Παρατήρηση 5.4.6 είδαμε ότι, για κάθε $f \in L_1(\mathbb{T})$ και για κάθε $t \in \mathbb{T}$,

$$s_n(f,x) - \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) \frac{\sin n(x-t)}{x-t} \, d\lambda(t) \to 0. \tag{5.5.28}$$

Θα ορίσουμε μια άρτια συνάρτηση $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, θέτοντας

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(n_k t) \chi_{I_k}(t), \qquad 0 < t < \pi, \tag{5.5.29}$$

όπου $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ είναι μια γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών που θα επιλεγεί κατάλληλα, $\chi_{I_k}$ είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του διαστήματος $I_k = \left(\frac{\pi}{n_k}, \frac{\pi}{n_{k-1}}\right]$, και $\{c_k\}$ είναι μια φθίνουσα μηδενική ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών που θα επιλεγεί κατάλληλα. Παρατηρήστε ότι αν ο $n_k$ είναι πολλαπλάσιο του $n_{k-1}$ τότε η $f$ θα είναι συνεχής (και ίση με 0) σε όλα τα σημεία $\pi/n_k$ και ότι η υπόθεση $c_k \to 0$ εξασφαλίζει ότι η $f$ είναι συνεχής στο 0 αν θέσουμε $f(0) = 0$. Κατόπιν, επεκτείνουμε την $f$ στο $[-\pi, 0)$ ώστε να γίνει άρτια συνάρτηση, και τέλος, την επεκτείνουμε $2\pi$-περιοδικά στο $\mathbb{R}$. Επειδή τα διαστήματα $I_k$ έχουν ξένους φορείς, αυτό που περιμένουμε από την (5.5.28) είναι ότι, αν επιλέξουμε κατάλληλα τις παραμέτρους, ο βασικός όρος στο μερικό άθροισμα $s_{n_k}(f,0)$ θα είναι ο $k$-οστός, δηλαδή ο $c_k \sin(n_k t)\chi_{I_k}(t)$.

Αρχικά ορίζουμε $c_1 = 1$, $n_1 = 2$ και $I_1 = (\pi/2, \pi]$. Στο $I_1$ έχουμε

$$f(t) = c_1 \sin(n_1 t). \tag{5.5.30}$$

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ορίσει $n_1 < n_2 < \cdots < n_{k-1}$, τους $c_1, \ldots, c_{k-1}$, και τα διαστήματα $I_j$, $j = 1, \ldots, k-1$. Ορίζουμε

$$\varphi(t) = \sum_{j=1}^{k-1} c_j \sin(n_j t) \chi_{I_j}(t) \quad \text{αν } t \in (\pi/n_{k-1}, \pi] \tag{5.5.31}$$

και $\varphi(t) = 0$ αλλιώς. Παρατηρούμε ότι η $t \mapsto \varphi(t)/t$ είναι φραγμένη: πράγματι, η $\varphi$ μηδενίζεται στο $[0, \pi/n_{k-1}]$, άρα

$$|\varphi(t)| \leqslant c_1 \leqslant \frac{c_1 n_{k-1}}{\pi} t. \tag{5.5.32}$$

Από το λήμμα Riemann-Lebesgue έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi \frac{\varphi(t)}{t} \sin(nt)\, d\lambda(t) = 0. \tag{5.5.33}$$

Ορίζουμε $n_k = n_{k-1}N_k$, όπου ο $N_k \geqslant 2^k$ είναι αρκετά μεγάλος ώστε να ισχύει

$$\left| \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\varphi(t)}{t} \sin(n_k t)\, d\lambda(t) \right| < 1. \tag{5.5.34}$$

Στη συνέχεια, θέτουμε $I_k = (\pi/n_k, \pi/n_{k-1}]$ και ορίζουμε $f(t) = c_k \sin(n_k t)$ στο $I_k$, όπου $0 < c_k < c_{k-1} < 1$ τον οποίο θα επιλέξουμε. Για να εκτιμήσουμε το μερικό άθροισμα $s_{n_k}(f, 0)$ αρκεί, από την (5.5.28), να εκτιμήσουμε το

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \sin(n_k t) \frac{d\lambda(t)}{t} &= \frac{2}{\pi} \left( \int_{(0,\pi/n_k]} + \int_{(\pi/n_k, \pi/n_{k-1}]} + \int_{(\pi/n_{k-1}, \pi]} \right) \\ &=: A_k + B_k + C_k. \end{aligned}$$

Από την (5.5.34) βλέπουμε ότι $C_k = O(1)$: στο $(\pi/n_{k-1}, \pi]$ έχουμε $f(t) = \varphi(t)$, άρα

$$\left| \int_0^\pi f(t) \sin(n_k t) \frac{d\lambda(t)}{t} \right| = \left| \int_0^\pi \frac{\varphi(t)}{t} \sin(n_k t)\, d\lambda(t) \right| < \frac{\pi}{2}. \tag{5.5.35}$$

Επίσης, ανεξάρτητα από τον τρόπο επιλογής των $c_k$, από την $\sin y \leqslant y$ στο $(0, \pi)$ και την $0 < c_k \leqslant 1$ έχουμε

$$|A_k| \leqslant \int_{(0,\pi/n_k]} |\sin(n_k t)| \frac{d\lambda(t)}{t} \leqslant n_k \frac{\pi}{n_k} = \pi. \tag{5.5.36}$$

Τέλος,

$$\begin{aligned} B_k &= c_k \int_{I_k} (\sin n_k t)^2 \frac{d\lambda(t)}{t} = c_k \int_{I_k} \frac{1 - \cos(2n_k t)}{2t}\, d\lambda(t) \\ &= \frac{c_k}{2} \int_{I_k} \frac{d\lambda(t)}{t} - \frac{c_k}{2} \int_{I_k} \cos(2n_k t) \frac{d\lambda(t)}{t} \\ &=: B_k' - B_k''. \end{aligned}$$

Για τον $B_k'$ έχουμε

$$B_k' = \frac{c_k}{2} \int_{I_k} \frac{d\lambda(t)}{t} = \frac{c_k}{2} \ln\left( \frac{n_k}{n_{k-1}} \right) = \frac{c_k}{2} (\ln N_k). \tag{5.5.37}$$

Επιλέγοντας $c_k = (\ln N_k)^{-\epsilon}$, όπου $0 < \epsilon < 1$, έχουμε $c_k \to 0$ και

$$B_k' = \frac{1}{2} (\ln N_k)^{1-\epsilon} \to \infty \tag{5.5.38}$$

καθώς το $k \to \infty$. Το ολοκλήρωμα στον όρο $B_k''$ ισούται με

$$\int_{I_k} \cos(2n_k t)\frac{d\lambda(t)}{t} = \frac{\sin(2n_k t)}{2n_k t}\Big|_{\pi/n_k}^{\pi/n_{k-1}} + \int_{I_k} \frac{\sin(2n_k t)}{2n_k}\frac{d\lambda(t)}{t^2}. \tag{5.5.39}$$

Από την επιλογή των $n_k$ έχουμε ότι

$$\frac{\sin(2n_k t)}{2n_k t}\Big|_{\pi/n_k}^{\pi/n_{k-1}} = \frac{\sin(2\pi)}{2\pi} - \frac{\sin(2\pi N_k)}{2\pi N_k} = 0. \tag{5.5.40}$$

Επίσης,

$$\left|\int_{I_k} \frac{\sin(2n_k t)}{2n_k}\frac{d\lambda(t)}{t^2}\right| \leqslant \frac{1}{2n_k}\int_{\pi/n_k}^{\infty}\frac{d\lambda(t)}{t^2} = \frac{1}{2n_k}\frac{n_k}{\pi} = \frac{1}{2\pi} = O(1). \tag{5.5.41}$$

Συγκεντρώνοντας όλες τις εκτιμήσεις μας, βλέπουμε ότι

$$s_{n_k}(f,0) = \frac{1}{2}(\ln N_k)^{1-\epsilon} + O(1), \tag{5.5.42}$$

απ' όπου έπεται ότι $s_{n_k}(f,0) \to \infty$.

## 5.6 Θεώρημα Dini και θεώρημα Marcinkiewicz

Το θεώρημα Dini μας δίνει μια ικανή συνθήκη για την σύγκλιση της σειράς Fourier μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης σε δεδομένο σημείο.

**Θεώρημα 5.6.1** (Dini). *Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$ και έστω $x \in \mathbb{T}$ με την εξής ιδιότητα: υπάρχει $\alpha \in \mathbb{C}$ ώστε*

$$\int_0^{\pi} \left|\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - \alpha\right| \frac{d\lambda(t)}{t} < \infty. \tag{5.6.1}$$

*Τότε,*

$$\lim_{n\to\infty} s_n(f,x) = \alpha. \tag{5.6.2}$$

*Απόδειξη.* Λόγω του Λήμματος 5.4.5 αρκεί να δείξουμε ότι

$$s_n^*(f,x) - \alpha \to 0. \tag{5.6.3}$$

Αφού

$$\begin{aligned} s_n^*(f,x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x-t)\frac{\sin(nt)}{\tan\frac{t}{2}}\,d\lambda(t) \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}\,\frac{\sin(nt)}{\tan\frac{t}{2}}\,d\lambda(t) \end{aligned} \tag{5.6.4}$$

και

$$\alpha = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \alpha D_n^*(t)\,d\lambda(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \alpha\frac{\sin(nt)}{\tan\frac{t}{2}}\,d\lambda(t), \tag{5.6.5}$$

έχουμε

$$s_n^*(f,x) - \alpha = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left(\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - \alpha\right)\frac{\sin(nt)}{\tan\frac{t}{2}}\,d\lambda(t). \tag{5.6.6}$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση

$$F_x(t) := \left(\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - \alpha\right)\frac{1}{\tan\frac{t}{2}} \tag{5.6.7}$$

γράφεται στη μορφή

$$\begin{aligned} F_t(x) = A_t(x) + B_t(x) := &\left(\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - \alpha\right)\frac{1}{t} \\ &+ \left(\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - \alpha\right)\varphi(t), \end{aligned} \tag{5.6.8}$$

όπου $\varphi(t) = \frac{1}{\tan\frac{t}{2}} - \frac{1}{t}$. Έχουμε δει ότι $\varphi \in L_\infty$, άρα η $B_x$ είναι ολοκληρώσιμη (εξηγήστε γιατί). Από την υπόθεση, η $A_x$ είναι επίσης ολοκληρώσιμη. Συνεπώς, $F_x \in L_1$ και έπεται ότι

$$s_n^*(f,x) - \alpha = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi F_x(t)\sin(nt)\,d\lambda(t) \to 0 \tag{5.6.9}$$

από το λήμμα Riemann-Lebesgue. □

**Παρατηρήσεις 5.6.2.** (α) Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν τα πλευρικά όρια

$$f(x+0) = \lim_{t\to x^+} f(t) \quad \text{και} \quad f(x-0) = \lim_{t\to x^-} f(t). \tag{5.6.10}$$

Αν η (5.6.1) ικανοποιείται για κάποιον $\alpha$, τότε έχουμε αναγκαστικά

$$\alpha = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}. \tag{5.6.11}$$

Πράγματι, αν είχαμε $\left|\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} - \alpha\right| = r > 0$, τότε θα υπήρχε $\delta \in (0,\pi)$ ώστε: αν $0 < t < \delta$ τότε

$$\left|\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - \alpha\right| \geqslant \frac{r}{2}. \tag{5.6.12}$$

Όμως τότε θα είχαμε

$$\int_0^\delta \left|\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - \alpha\right|\frac{d\lambda(t)}{t} \geqslant \int_0^\delta \frac{r}{2t}\,d\lambda(t) = \infty, \tag{5.6.13}$$

το οποίο είναι άτοπο.

Ειδικότερα, αν η $f$ είναι συνεχής στο $x$ και αν ικανοποιείται η (5.6.1) τότε έχουμε αναγκαστικά $\alpha = f(x)$.

(β) Ας υποθέσουμε ότι η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $x$. Τότε, η συνάρτηση

$$t \mapsto \frac{f(x+t)-f(x)}{t} \tag{5.6.14}$$

είναι φραγμένη σε μια περιοχή του 0. Άρα, υπάρχουν $\delta \in (0,\pi)$ και $M > 0$ ώστε: αν $0 < |t| < \delta$ τότε $|f(x+t) - f(x)| \leqslant M|t|$. Δηλαδή, για κάθε $0 < t < \delta$,

$$\left|\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - f(x)\right| \leqslant \frac{1}{2}\Big[|f(x+t)-f(x)| + |f(x-t)-f(x)|\Big] \leqslant Mt. \tag{5.6.15}$$

Συνεπώς,

$$\int_0^\delta \left|\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - f(x)\right| \frac{d\lambda(t)}{t} \leqslant \int_0^\delta Mt\,\frac{d\lambda(t)}{t} = M\delta < \infty, \tag{5.6.16}$$

και

$$\begin{aligned}\int_\delta^\pi \left|\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - f(x)\right| \frac{d\lambda(t)}{t} \\ \leqslant \frac{1}{\delta}\int_0^\pi \left|\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - f(x)\right| d\lambda(t) < \infty\end{aligned} \tag{5.6.17}$$

(εξηγήστε γιατί), άρα η (5.6.1) ικανοποιείται με $\alpha = f(x)$. Έτσι έχουμε το εξής:

**Θεώρημα 5.6.3.** *Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$ και έστω $x \in \mathbb{T}$ στο οποίο η $f$ είναι παραγωγίσιμη. Τότε,*

$$\lim_{n\to\infty} s_n(f,x) = f(x). \tag{5.6.18}$$

Μια σημαντική συνέπεια του Θεωρήματος 5.6.3 είναι η *αρχή τοπικότητας του Riemann*: η σύγκλιση ή μη της ακολουθίας $s_n(f,x)$ εξαρτάται μόνο από τη συμπεριφορά της $f$ *σε μια περιοχή του* $x$. Αυτό δεν είναι καθόλου προφανές αν σκεφτούμε ότι τα μερικά αθροίσματα $s_n(f,x)$ ορίζονται μέσω των συντελεστών Fourier $\widehat{f}(k)$, $|k| \leqslant n$, της $f$ και οι συντελεστές Fourier προκύπτουν με ολοκλήρωση στο $[-\pi,\pi]$, δηλαδή παίρνουν υπόψη τις τιμές της $f$ σε *ολόκληρο το* $[-\pi,\pi]$.

**Θεώρημα 5.6.4.** *Έστω $f,g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ δύο ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι, για κάποιο $x \in \mathbb{T}$ και για κάποιο ανοικτό διάστημα $I \subset \mathbb{T}$ ώστε $x \in I$, ισχύει*

$$f(t) = g(t) \qquad \text{για κάθε } t \in I. \tag{5.6.19}$$

*Τότε,*

$$s_n(f,x) - s_n(g,x) \to 0. \tag{5.6.20}$$

*Ειδικότερα, η $\{s_n(f,x)\}$ συγκλίνει αν και μόνο αν η $\{s_n(g,x)\}$ συγκλίνει.*

*Απόδειξη.* Θεωρούμε την συνάρτηση $h = f - g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$. Η $h$ είναι ολοκληρώσιμη και $h(t) = 0$ για κάθε $t \in I$. Αφού το $x$ είναι εσωτερικό σημείο του $I$, η $h$ είναι παραγωγίσιμη στο $x$, με $h'(x) = 0$.

Από το Θεώρημα 5.6.3 βλέπουμε ότι

$$s_n(h,x) \to h(x) = 0. \tag{5.6.21}$$

Όμως,

$$s_n(h,x) = s_n(f-g,x) = s_n(f,x) - s_n(g,x). \tag{5.6.22}$$

Έπεται το ζητούμενο. □

Το επόμενο θεώρημα μας δίνει ένα απλό κριτήριο που εξασφαλίζει ότι $s_n(f,x) \to f(x)$ σχεδόν παντού.

**Θεώρημα 5.6.5** (Marcinkiewicz). *Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Για καθε $t \in \mathbb{T}$ ορίζουμε*

$$w_1(f,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(x+t) - f(x)|\, d\lambda(x). \tag{5.6.23}$$

*Αν*

$$\int_0^\pi w_1(f,t)\frac{d\lambda(t)}{t} < \infty, \tag{5.6.24}$$

*τότε $s_n(f,x) \to f(x)$ σχεδόν παντου στο $\mathbb{T}$.*

*Απόδειξη.* Από το θεώρημα Fubini έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}\left(\int_0^\pi |f(x+t)-f(x)|\,\frac{d\lambda(t)}{t}\right) d\lambda(x) &= \int_0^\pi \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(x+t)-f(x)|\, d\lambda(x)\right)\frac{d\lambda(t)}{t}\\ &= \int_0^\pi w_1(f,t)\,\frac{d\lambda(t)}{t} < \infty.\end{aligned}$$

Άρα,

$$\int_0^\pi |f(x+t)-f(x)|\,\frac{d\lambda(t)}{t} < \infty \tag{5.6.25}$$

σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{T}$. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}w_1(f,-t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(x-t)-f(x)|\, d\lambda(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}-t} |f(s)-f(s+x)|\, d\lambda(s)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}-t} |f(s+t)-f(s)|\, d\lambda(s) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(s+t)-f(s)|\, d\lambda(s)\\ &= w_1(f,t).\end{aligned}$$

Επαναλαμβάνοντας τον αρχικό υπολογισμό βλέπουμε τώρα ότι

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}\left(\int_0^\pi |f(x-t)-f(x)|\,\frac{d\lambda(t)}{t}\right) d\lambda(x) = \int_0^\pi w_1(f,-t)\,\frac{d\lambda(t)}{t} < \infty, \tag{5.6.26}$$

άρα

$$\int_0^\pi |f(x-t)-f(x)|\,\frac{d\lambda(t)}{t} < \infty \tag{5.6.27}$$

σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{T}$. Τώρα,

$$\int_0^\pi \left|\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - f(x)\right|\,\frac{d\lambda(t)}{t} < \infty \tag{5.6.28}$$

σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{T}$, και από το θεώρημα Dini έπεται ότι $s_n(f,x) \to f(x)$ σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{T}$. $\square$

## 5.7 Ασκήσεις

**Ομάδα Α΄**

**1.** Έστω $T(x) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{n}(\lambda_k \cos kx + \mu_k \sin kx)$ τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Δείξτε ότι:

(α) Αν το $T$ είναι περιττή συνάρτηση, τότε $\lambda_k = 0$ για κάθε $k = 0, 1, \dots, n$.

(β) Αν το $T$ είναι άρτια συνάρτηση, τότε $\mu_k = 0$ για κάθε $k = 1, \dots, n$.

**2.** Δείξτε ότι: για κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει πολυώνυμο $p(t)$ βαθμού $2k$ ώστε $\sin^{2k} x = p(\cos x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

**3.** (α) Δείξτε ότι το σύνολο $\{e^{ikx} : k \in \mathbb{Z}\}$ είναι $\mathbb{C}$-γραμμικώς ανεξάρτητο.

(β) Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $0 < \mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_n$. Δείξτε ότι οι συναρτήσεις

$$e^{i\mu_1 x}, e^{i\mu_2 x}, \dots, e^{i\mu_n x}$$

είναι $\mathbb{C}$-γραμμικώς ανεξάρτητες. Χρειάζεται η υπόθεση ότι όλοι οι $\mu_j$ είναι θετικοί;

**4.** Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Δείξτε ότι: για κάθε $a < b$ στο $\mathbb{R}$,

$$\int_a^b f(x)\, d\lambda(x) = \int_{a+2\pi}^{b+2\pi} f(x)\, d\lambda(x) = \int_{a-2\pi}^{b-2\pi} f(x)\, d\lambda(x),$$

και

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x+a)\, d\lambda(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, d\lambda(x) = \int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(x)\, d\lambda(x).$$

**5.** Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Δείξτε ότι

$$\lim_{t\to 0} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)|^2 d\lambda(x) = 0.$$

**6.** Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Δείξτε ότι:

(α) Αν η $f$ είναι άρτια, τότε $\widehat{f}(-k) = \widehat{f}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ και η $S(f)$ είναι σειρά συνημιτόνων.

(β) Αν η $f$ είναι περιττή, τότε $\widehat{f}(-k) = -\widehat{f}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ και η $S(f)$ είναι σειρά ημιτόνων.

(γ) Αν $f(x+\pi) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε $\widehat{f}(k) = 0$ για κάθε περιττό ακέραιο $k$.

(δ) Αν η $f$ παίρνει πραγματικές τιμές τότε $\overline{\hat{f}(k)} = \hat{f}(-k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Αν, επιπλέον, υποθέσουμε ότι η $f$ είναι συνεχής, τότε ισχύει και το αντίστροφο.

**7.** Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ ορίζουμε

$$\tau_a(x) = f(x-a).$$

Περιγράψτε το γράφημα της $\tau_a$ σε σχέση με αυτό της $f$. Είναι η $\tau_a$ περιοδική; Εκφράστε τους συντελεστές Fourier της $\tau_a$ συναρτήσει των συντελεστών Fourier της $f$.

**8.** Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$g_m(x) = f(mx).$$

Περιγράψτε το γράφημα της $g_m$ σε σχέση με αυτό της $f$. Είναι η $g_m$ περιοδική; Εκφράστε τους συντελεστές Fourier της $g_m$ συναρτήσει των συντελεστών Fourier της $f$.

**9.** Έστω $f, f_n \in L_1(\mathbb{T})$ $(n \in \mathbb{N})$ συναρτήσεις οι οποίες ικανοποιούν την

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f_n(x)|\, d\lambda(x) = 0.$$

Δείξτε ότι

$$\widehat{f_n}(k) \to \widehat{f}(k) \quad \text{όταν } n \to \infty,$$

ομοιόμορφα ως προς $k$. Δηλαδή, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geqslant n_0$ και για κάθε $k \in \mathbb{Z}$,

$$|\widehat{f_n}(k) - \widehat{f}(k)| < \varepsilon.$$

**10.** Ορίζουμε $f(x) = \pi - x$ αν $0 < x < 2\pi$, $f(0) = f(2\pi) = 0$, και επεκτείνουμε την $f$ σε μια $2\pi$-περιοδική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι η σειρά Fourier της $f$ είναι η

$$S(f, x) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}.$$

**11.** Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = (\pi - x)^2$ στο $[0, 2\pi]$ και την επεκτείνουμε σε μια $2\pi$-περιοδική συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι

$$S(f, x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2}.$$

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω, δείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

**12.** Έστω $0 < \alpha \leqslant 1$ και έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $2\pi$-περιοδική συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|^{\alpha}$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι: υπάρχει σταθερά $C > 0$ ώστε, για κάθε $k$,

$$|a_k(f)| \leqslant \frac{C}{k^{\alpha}} \qquad \text{και} \qquad |b_k(f)| \leqslant \frac{C}{k^{\alpha}}.$$

**13.** Θεωρούμε την περιττή $2\pi$-περιοδική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που στο $[0, \pi]$ ορίζεται από την

$$f(x) = x(\pi - x).$$

Σχεδιάστε την γραφική παράσταση της $f$, υπολογίστε τους συντελεστές Fourier της $f$ και δείξτε ότι

$$f(x) = \frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin[(2k+1)x]}{(2k+1)^3}.$$

**14.** Έστω $0 < \delta < \pi$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{\delta} & \text{αν } |x| \leqslant \delta \\ 0 & \text{αν } \delta \leqslant |x| \leqslant \pi \end{cases}$$

Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της $f$ και δείξτε ότι

$$f(x) = \frac{\delta}{2\pi} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \cos k\delta}{k^2\pi\delta} \cos kx.$$

**15.** Θεωρούμε την $2\pi$-περιοδική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που στο $[-\pi, \pi]$ ορίζεται από την

$$f(x) = |x|.$$

Σχεδιάστε την γραφική παράσταση της $f$, υπολογίστε τους συντελεστές Fourier της $f$ και δείξτε ότι $\widehat{f}(0) = \pi/2$ και

$$\widehat{f}(k) = \frac{-1 + (-1)^k}{\pi k^2}, \qquad k \neq 0.$$

Γράψτε τη σειρά Fourier $S(f)$ της $f$ σαν σειρά συνημιτόνων και ημιτόνων. Θέτοντας $x = 0$ δείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \qquad \text{και} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

**16.** Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια $2\pi$-περιοδική συνάρτηση, ολοκληρώσιμη στο $[0, 2\pi]$.

(α) Δείξτε ότι

$$\lim_{t \to 0} \int_0^{2\pi} |f(x+t) - f(x)| \, d\lambda(x) = 0.$$

[*Υπόδειξη*: εξετάστε πρώτα την περίπτωση που η $f$ είναι συνεχής.]

(β) (Λήμμα Riemann-Lebesgue). Δείξτε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, d\lambda(x) = -\int_0^{2\pi} f\big(x + \frac{\pi}{n}\big) \sin nx \, d\lambda(x).$$

και συμπεράνατε ότι

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, d\lambda(x) = 0.$$

**17.** (α) Θεωρώντας την περιττή επέκταση της $\cos x$ από το $(0, \pi)$ στο $(-\pi, \pi) \setminus \{0\}$ δείξτε ότι

$$\cos x = \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \sin(2kx)}{4k^2 - 1}$$

για κάθε $0 < x < \pi$.

(β) Θεωρώντας την άρτια επέκταση της $\sin x$ από το $(0, \pi)$ στο $(-\pi, \pi)$ δείξτε ότι

$$\sin x = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2kx)}{4k^2 - 1}$$

για κάθε $0 < x < \pi$.

**Ομάδα Β′**

**18.** (α) Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ θέτουμε

$$A_k(x) = \sum_{j=1}^{k} \sin jx.$$

Δείξτε ότι: αν $k > m$ τότε

$$|A_k(x) - A_m(x)| \leqslant \frac{1}{|\sin(x/2)|}$$

για κάθε $0 < x < \pi$.

(β) Αν $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n \geqslant 0$, δείξτε ότι

$$\left| \sum_{j=m+1}^{k} \lambda_j \sin jx \right| \leqslant \frac{\lambda_{m+1}}{|\sin(x/2)|}$$

για κάθε $n \geqslant k > m \geqslant 1$ και για κάθε $0 < x < \pi$.

**19.** Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $M > 0$. Αν $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n \geqslant 0$ και $k\lambda_k \leqslant M$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$, δείξτε ότι

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \sin kx \right| \leqslant (\pi + 1)M$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. [*Υπόδειξη:* Μπορείτε να υποθέσετε ότι $0 < x < \pi$. Γράψτε, αν θέλετε,

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \sin kx = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \sin kx + \sum_{k=m+1}^{n} \lambda_k \sin kx,$$

όπου $m = \min\{N, \lfloor \pi/x \rfloor\}$.]

**20.** (Λήμμα του Stečkin). Έστω $T(x) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k \cos kx + \mu_k \sin kx)$ τριγωνομετρικό πολυώνυμο και έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ με την ιδιότητα

$$f(x_0) = \|f\|_\infty = \max\{|f(x)| : x \in \mathbb{R}\}.$$

Δείξτε ότι: αν $|t| \leqslant \frac{\pi}{n}$ τότε

$$f(x_0 + t) \geqslant \|f\|_\infty \cos(nt).$$

**21.** (Ανισότητα του Bernstein). Έστω $T(x) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k \cos kx + \mu_k \sin kx)$ τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Δείξτε ότι

$$\|f'\|_\infty \leqslant n \|f\|_\infty.$$

**22.** Έστω $[a, b]$ κλειστό διάστημα που περιέχεται στο εσωτερικό του $[-\pi, \pi]$. Θεωρούμε την $f(x) = \chi_{[a,b]}(x)$ που ορίζεται στο $[-\pi, \pi]$ από τις $f(x) = 1$ αν $x \in [a, b]$ και $f(x) = 0$ αλλιώς, και την επεκτείνουμε $2\pi$-περιοδικά στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι η σειρά Fourier της $f$ είναι η

$$S(f, x) = \frac{b-a}{2\pi} + \sum_{k \neq 0} \frac{e^{-ika} - e^{-ikb}}{2\pi i k} \, e^{ikx}.$$

Δείξτε ότι η $S(f)$ δεν συγκλίνει απολύτως για κανένα $x \in \mathbb{R}$. Βρείτε τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η $S(f, x)$ συγκλίνει.

**23.** Έστω $T(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$ τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Υποθέτουμε ότι το $T$ παίρνει θετικές πραγματικές τιμές. Δείξτε ότι υπάρχει τριγωνομετρικό πολυώνυμο $Q$ ώστε

$$T(x) = |Q(x)|^2$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

**24.** (α) Έστω $0 < \delta < \pi$. Δείξτε ότι, για κάθε $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$,

$$\left|\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx\right| \leqslant \frac{1}{2\sin\frac{\delta}{2}} \qquad \text{και} \qquad \left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| \leqslant \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}.$$

(β) Έστω $(t_k)$ φθίνουσα ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών με $t_k \to 0$. Δείξτε ότι οι σειρές $\sum_{k=1}^{\infty} t_k \cos kx$ και $\sum_{k=1}^{\infty} t_k \sin kx$ συγκλίνουν κατά σημείο στο $(0, 2\pi)$ και ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα $[\delta, 2\pi - \delta]$, όπου $0 < \delta < \pi$. Συμπεράνατε ότι ορίζουν συνεχείς συναρτήσεις στο $(0, 2\pi)$.

**25.** Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$ και $g \in L_\infty(\mathbb{T})$. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x) g(nx)\, d\lambda(x) = \widehat{f}(0)\widehat{g}(0).$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

# Προσεγγίσεις της μονάδας και Αθροισιμότητα

## 6.1 Οικογένειες καλών πυρήνων και προσεγγίσεων της μονάδας

Σε αυτήν την παράγραφο θα ασχοληθούμε με μέσες τιμές μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης $f$ οι οποίες προκύπτουν από την συνέλιξη της $f$

$$(f * K_\delta)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)K_\delta(y)\,d\lambda(y) \tag{6.1.1}$$

με μια οικογένεια $(K_\delta)$ συναρτήσεων οι οποίες ικανοποιούν κατάλληλες συνθήκες.

**Ορισμός 6.1.1** (οικογένεια καλών πυρήνων)**.** Μια οικογένεια $(K_\delta)_{\delta>0}$ συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$ λέγεται **οικογένεια καλών πυρήνων**, ή πιο απλά **πυρήνας**, αν ικανοποιεί τα εξής:

(i) Για κάθε $\delta > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}} K_\delta(y)\,d\lambda(y) = 1. \tag{6.1.2}$$

(ii) Υπάρχει σταθερά $M > 0$ ώστε, για κάθε $\delta > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}} |K_\delta(y)|\,d\lambda(y) \leqslant M. \tag{6.1.3}$$

(iii) Για κάθε $\eta > 0$,

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{|y|\geqslant\eta} |K_\delta(y)|\,d\lambda(y) = 0. \tag{6.1.4}$$

Η συνέλιξη $f * K_\delta$ μιας φραγμένης μετρήσιμης συνάρτησης $f$ με μια οικογένεια καλών πυρήνων $(K_\delta)_{\delta>0}$ συγκλίνει στην $f$ σε κάθε σημείο στο οποίο η $f$ είναι συνεχής:

**Θεώρημα 6.1.2.** *Έστω $\{K_\delta\}_{\delta>0}$ μια οικογένεια καλών πυρήνων και έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ στο οποίο η $f$ είναι συνεχής, έχουμε*

$$\lim_{\delta\to 0}(f*K_\delta)(x)=f(x). \tag{6.1.5}$$

*Απόδειξη.* Υποθέτουμε ότι η $f$ είναι συνεχής στο $x$ και θεωρούμε τυχόν $\varepsilon>0$. Από τη συνέχεια της $f$ στο $x$, υπάρχει $\delta>0$ ώστε: αν $|y|<\eta$ τότε $|f(x-y)-f(x)|<\varepsilon$. Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα (i) της $(K_\delta)$, γράφουμε

$$(f*K_\delta)(x)-f(x)=\int K_\delta(y)f(x-y)\,d\lambda(y)-f(x)=\int K_\delta(y)[f(x-y)-f(x)]\,d\lambda(y).$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}|(f*K_\delta)(x)-f(x)|&=\left|\int K_\delta(y)[f(x-y)-f(x)]\,d\lambda(y)\right|\\&\leqslant\int_{|y|<\eta}|K_\delta(y)|\,|f(x-y)-f(x)|\,d\lambda(y)\\&\qquad+\int_{|y|\geqslant\eta}|K_\delta(y)|\,|f(x-y)-f(x)|\,d\lambda(y).\end{aligned}$$

Για το πρώτο ολοκλήρωμα παρατηρούμε ότι: αν $|y|<\eta$ τότε $|f(x-y)-f(x)|<\varepsilon$. Χρησιμοποιώντας και την ιδιότητα (ii) της $(K_\delta)$, παίρνουμε

$$\int_{|y|<\eta}|K_\delta(y)|\,|f(x-y)-f(x)|\,d\lambda(y)\leqslant\varepsilon\int_{\mathbb{R}}|K_\delta(y)|\,d\lambda(y)\leqslant M\varepsilon.$$

Για το δεύτερο ολοκλήρωμα χρησιμοποιούμε την υπόθεση ότι η $f$ είναι φραγμένη και την ιδιότητα (iii) της $(K_\delta)$ για το συγκεκριμένο $\eta$: έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{|y|\geqslant\eta}|K_\delta(y)|\,|f(x-y)-f(x)|\,d\lambda(y)&\leqslant\int_{|y|\geqslant\eta}|K_\delta(y)|\,(|f(x-y)|+|f(x)|\,d\lambda(y)\\&\leqslant 2\|f\|_\infty\int_{|y|\geqslant\eta}|K_\delta(y)|\,d\lambda(y)\to 0\end{aligned}$$

καθώς το $\delta\to 0$. Συνεπώς,

$$\limsup_{\delta\to 0}|(f*K_\delta)(x)-f(x)|\leqslant M\varepsilon, \tag{6.1.6}$$

Αφού το $\varepsilon>0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $(f*K_\delta)(x)\to f(x)$ καθώς το $\delta\to 0$. □

**Ορισμός 6.1.3** (οικογένεια προσεγγίσεων της μονάδας)**.** Μια οικογένεια $(K_\delta)_{\delta>0}$ συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$ λέγεται **οικογένεια προσεγγίσεων της μονάδας**, ή πιο απλά **προσέγγιση της μονάδας**, αν ικανοποιεί τα εξής:

(i) Για κάθε $\delta>0$,

$$\int_{\mathbb{R}}K_\delta(y)\,d\lambda(y)=1. \tag{6.1.7}$$

(ii) Υπάρχει σταθερά $M > 0$ ώστε, για κάθε $\delta > 0$ και για κάθε $y \in \mathbb{R}$,

$$|K_\delta(y)| \leqslant \frac{M}{\delta} \tag{6.1.8}$$

και, για κάθε $\delta > 0$ και για κάθε $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$|K_\delta(y)| \leqslant \frac{M\delta}{y^2}. \tag{6.1.9}$$

Παρατηρήστε ότι η πρώτη ανισότητα στην (ii) είναι ισχυρότερη από την δεύτερη όταν $|y| \leqslant \delta$. Τελείως αντίστοιχα, η δεύτερη ανισότητα στην (ii) είναι ισχυρότερη από την πρώτη όταν $|y| \geqslant \delta$.

Η επόμενη πρόταση δείχνει ότι οι υποθέσεις του Ορισμού 6.1.3 είναι ισχυρότερες από αυτές του Ορισμού 6.1.1.

**Πρόταση 6.1.4.** *Κάθε οικογένεια $(K_\delta)_{\delta>0}$ προσεγγίσεων της μονάδας είναι οικογένεια καλών πυρήνων.*

*Απόδειξη.* Δείχνουμε πρώτα ότι υπάρχει $R > 0$ ώστε: για κάθε $\delta > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}} |K_\delta(y)|\, d\lambda(y) \leqslant R. \tag{6.1.10}$$

Έστω $\delta > 0$. Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα (ii) των προσεγγίσεων της μονάδας, γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |K_\delta(y)|\, d\lambda(y) &= \int_{|y|<\delta} |K_\delta(y)|\, d\lambda(y) + \int_{|y|\geqslant\delta} |K_\delta(y)|\, d\lambda(y)\\ &\leqslant \frac{M}{\delta}\int_{|y|<\delta} \mathbf{1}\, d\lambda(y) + M\delta \int_{|y|\geqslant\delta} \frac{d\lambda(y)}{y^2}\\ &= \frac{M}{\delta}\int_{|y|<\delta} \mathbf{1}\, d\lambda(y) + M\delta\cdot 2\int_{\delta}^{\infty} \frac{d\lambda(y)}{y^2}\\ &= \frac{M}{\delta}\cdot 2\delta + M\delta\cdot\frac{2}{\delta}\\ &= 4M.\end{aligned}$$

Άρα, έχουμε το ζητούμενο με $R = 4M$.

Για την τρίτη ιδιότητα της οικογένειας καλών πυρήνων, σταθεροποιούμε $\eta > 0$ και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα (iii) των προσεγγίσεων της μονάδας, γράφουμε

$$\int_{|y|\geqslant\eta} |K_\delta(y)|\, d\lambda(y) \leqslant M\delta \int_{|y|\geqslant\eta} \frac{d\lambda(y)}{|y|^2} = \frac{2M}{\eta}\delta \to 0 \tag{6.1.11}$$

καθώς το $\delta \to 0$. □

**Παραδείγματα 6.1.5.** (α) Έστω $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια μη αρνητική, φραγμένη συνάρτηση που μηδενίζεται έξω από το $[-1, 1]$ και έχει ολοκλήρωμα

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(y)\, d\lambda(y) = 1. \tag{6.1.12}$$

Για κάθε $\delta > 0$ ορίζουμε $K_\delta(y) = \delta^{-1}\varphi(\delta^{-1}y)$. Η $(K_\delta)_{\delta>0}$ είναι οικογένεια προσεγγίσεων της μονάδας.

(β) Ο πυρήνας της θερμότητας $\mathcal{H}_t$ στο $\mathbb{R}$ ορίζεται ως εξής:

$$\mathcal{H}_t(y) = \frac{1}{(4\pi t)^{1/2}} e^{-|y|^2/4t}. \tag{6.1.13}$$

Η οικογένεια $(\mathcal{H}_{\delta^2})_{\delta>0}$ είναι οικογένεια προσεγγίσεων της μονάδας.

Το επόμενο βασικό θεώρημα «επεκτείνει» το Θεώρημα 6.1.2.

**Θεώρημα 6.1.6.** *Έστω $(K_\delta)_{\delta>0}$ οικογένεια προσεγγίσεων της μονάδας. Για κάθε $f \in L^1(\mathbb{R})$ ισχύει*

$$\lim_{\delta\to 0}(f * K_\delta)(x) = f(x) \tag{6.1.14}$$

*σε κάθε σημείο Lebesgue $x$ της $f$. Συνεπώς, $f * K_\delta \to f$ σχεδόν παντού καθώς το $\delta \to 0$.*

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 6.1.6 θα χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο λήμμα.

**Λήμμα 6.1.7.** *Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$ και έστω $f \in \mathrm{Leb}(f)$. Ορίζουμε*

$$\mathcal{A}(r) = \frac{1}{r}\int_{|y|\leqslant r} |f(x-y) - f(x)|\, d\lambda(y), \qquad r > 0. \tag{6.1.15}$$

*Τότε, η συνάρτηση $\mathcal{A}$ είναι φραγμένη, συνεχής, και*

$$\lim_{r\to 0}\mathcal{A}(r) = 0. \tag{6.1.16}$$

*Απόδειξη.* Δείχνουμε πρώτα ότι η $\mathcal{A}(r)$ είναι συνεχής. Αρκεί να δείξουμε ότι η συνάρτηση $r \mapsto r\mathcal{A}(r)$ είναι συνεχής σε κάθε $r > 0$. Θα χρησιμοποιήσουμε την απόλυτη συνέχεια του ολοκληρώματος: αφού $f \in L^1(\mathbb{R})$, αν θεωρήσουμε μια ακολουθία $r_k \to r^+$ τότε

$$\begin{aligned} 0 \leqslant r_k\mathcal{A}(r_k) - r\mathcal{A}(r) &= \left| \int_{|y|\leqslant r_k} |f(x-y) - f(x)|\, d\lambda(y) - \int_{|y|\leqslant r} |f(x-y) - f(x)|\, d\lambda(y) \right| \\ &= \int_{r<|y|\leqslant r_k} |f(x-y) - f(x)|\, d\lambda(y) \to 0 \end{aligned}$$

καθώς το $k \to \infty$, διότι η $y \mapsto |f(x-y) - f(x)|$ είναι τοπικά ολοκληρώσιμη και $\lambda(\{y : r < |y| \leqslant r_k\}) \to 0$ όταν $k \to \infty$. Παρόμοιο επιχείρημα δείχνει τη συνέχεια από αριστερά.

Αφού $x \in \mathrm{Leb}(f)$ έχουμε

$$\lim_{\substack{\lambda(I)\to 0 \\ x\in I}} \frac{1}{\ell(I)}\int_I |f(z) - f(x)|\, dz = 0. \tag{6.1.17}$$

Όμως,

$$\mathcal{A}(r) = \frac{2}{\ell(x-r, x+r)}\int_{x-r}^{x+r} |f(z) - f(x)|\, dz, \tag{6.1.18}$$

άρα είναι φανερό ότι $\mathcal{A}(r) \to 0$ καθώς το $r \to 0$.

Η $\mathcal{A}$ είναι συνεχής και $\lim_{r\to 0} \mathcal{A}(r) = 0$. Συνεπώς, υπάρχει $M_1 > 0$ ώστε $0 \leqslant \mathcal{A}(r) \leqslant M_1$ για κάθε $r \in [0,1]$. Για $r > 1$ γράφουμε

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(r) &= \frac{1}{r}\int_{|y|\leqslant r} |f(x-y) - f(x)|\, d\lambda(y)\\ &\leqslant \frac{1}{r}\int_{x-r}^{x+r} |f(z)|\, dz + \frac{1}{r}\int_{|y|\leqslant r} |f(x)|\, d\lambda(y)\\ &\leqslant \int_{x-r}^{x+r} |f(z)|\, dz + \frac{1}{r}|f(x)|\, 2r\\ &\leqslant M_2 := \|f\|_1 + 2|f(x)|.\end{aligned}$$

Έπεται ότι $0 \leqslant \mathcal{A}(r) \leqslant \max\{M_1, M_2\}$ για κάθε $r > 0$. □

**Απόδειξη του Θεωρήματος 6.1.6.** Έστω $\varepsilon > 0$. Βρίσκουμε πρώτα $N \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \varepsilon. \tag{6.1.19}$$

Στη συνέχεια, για κάθε $\delta > 0$ γράφουμε

$$\begin{aligned}|(f * K_\delta)(x) - f(x)| &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|\, |K_\delta(y)|\, d\lambda(y)\\ &\leqslant \int_{|y|\leqslant \delta} |f(x-y) - f(x)|\, |K_\delta(y)|\, d\lambda(y)\\ &\qquad + \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^k\delta < |y| \leqslant 2^{k+1}\delta} |f(x-y) - f(x)|\, |K_\delta(y)|\, d\lambda(y)\\ &\leqslant \frac{M}{\delta}\int_{|y|\leqslant \delta} |f(x-y) - f(x)|\, d\lambda(y)\\ &\qquad + \sum_{k=0}^{\infty} M\delta \int_{2^k\delta < |y| \leqslant 2^{k+1}\delta} |f(x-y) - f(x)|\, \frac{1}{|y|^2} d\lambda(y)\\ &\leqslant M\,\mathcal{A}(\delta) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M\delta}{(2^k\delta)^2} \int_{|y|\leqslant 2^{k+1}\delta} |f(x-y) - f(x)|\, d\lambda(y)\\ &= M\,\mathcal{A}(\delta) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M\delta}{(2^k\delta)^2} (2^{k+1}\delta)\mathcal{A}(2^{k+1}\delta)\\ &= M\,\mathcal{A}(\delta) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2M}{2^k}\mathcal{A}(2^{k+1}\delta)\\ &\leqslant M_1\left[\mathcal{A}(\delta) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}\mathcal{A}(2^{k+1}\delta)\right],\end{aligned}$$

όπου $M_1 = 2M$. Τώρα, χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι $\|\mathcal{A}\|_\infty < \infty$ και το γεγονός ότι $\lim_{\delta\to 0} \mathcal{A}(\delta) = 0$. Υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε για κάθε $0 < \delta < \delta_0$ να έχουμε

$$\mathcal{A}(2^k\delta) < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad k = 0, 1, \dots, N. \tag{6.1.20}$$

Τότε, για κάθε $0 < \delta < \delta_0$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}|(f * K_\delta)(x) - f(x)| &\leqslant M_1 \left[\mathcal{A}(\delta) + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2^k}\mathcal{A}(2^{k+1}\delta) + \sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{2^k}\mathcal{A}(2^{k+1}\delta)\right] \\ &\leqslant M_1 \left[\frac{\varepsilon}{3} + \left(\sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2^k}\right)\frac{\varepsilon}{3} + \|\mathcal{A}\|_\infty \sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{2^k}\right] \\ &\leqslant M_1 \left[\frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} + \|\mathcal{A}\|_\infty \varepsilon\right] \\ &= M_1(1 + \|\mathcal{A}\|_\infty)\varepsilon.\end{aligned}$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται ότι $\lim_{\delta\to 0}(f * K_\delta)(x) = f(x)$. □

Το τελευταίο θεώρημα αυτής της παραγράφου αναφέρεται στη σύγκλιση της $f * K_\delta$ στην $f$ ως προς την $\|\cdot\|_1$.

**Θεώρημα 6.1.8.** *Έστω $(K_\delta)_{\delta>0}$ οικογένεια καλών πυρήνων. Για κάθε $f \in L^1(\mathbb{R})$ και για κάθε $\delta > 0$, η συνέλιξη*

$$(f * K_\delta)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)K_\delta(y)\, d\lambda(y) \tag{6.1.21}$$

*είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$, και*

$$\|(f * K_\delta) - f\|_1 \to 0 \ \text{ καθώς το } \delta \to 0. \tag{6.1.22}$$

*Απόδειξη.* Έστω $\varepsilon > 0$. Για κάθε $\delta > 0$ γράφουμε

$$\begin{aligned}\|(f * K_\delta) - f\|_1 &= \int_{\mathbb{R}} |(f * K_\delta)(x) - f(x)|\, d\lambda(x) \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - f(x)|\, |K_\delta(y)|\, d\lambda(y)\, d\lambda(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - f(x)|\, d\lambda(x)\right) |K_\delta(y)|\, d\lambda(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \|f_{-y} - f\|_1\, |K_\delta(y)|\, d\lambda(y),\end{aligned}$$

όπου $f_{-y}(x) = f(x-y)$. Τώρα, χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι

$$\lim_{y\to 0} \|f_{-y} - f\|_1 = 0 \tag{6.1.23}$$

(βλέπε Κεφάλαιο 4). Δηλαδή, υπάρχει $\eta > 0$ ώστε

$$|y| < \eta \Longrightarrow \|f_{-y} - f\|_1 < \varepsilon. \tag{6.1.24}$$

Τότε, χρησιμοποιώντας και την $\|f_{-y} - f\|_1 \leqslant \|f_{-y}\|_1 + \|f\|_1 = 2\|f\|_1$, έχουμε

$$\begin{aligned}\|(f * K_\delta) - f\|_1 &\leqslant \int_{|y|<\eta} \|f_{-y} - f\|_1 |K_\delta(y)|\, d\lambda(y) + \int_{|y|\geqslant\eta} \|f_{-y} - f\|_1 |K_\delta(y)|\, d\lambda(y) \\ &\leqslant \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} |K_\delta(y)|\, d\lambda(y) + 2\|f\|_1 \int_{|y|\geqslant\eta} |K_\delta(y)|\, d\lambda(y) \\ &\leqslant M\varepsilon + 2\|f\|_1 \int_{|y|\geqslant\eta} |K_\delta(y)|\, d\lambda(y),\end{aligned}$$

όπου $M := \sup \|K_\delta\|_1 < \infty$ (αφού η $(K_\delta)$ είναι πυρήνας). Αφήνοντας το $\delta \to 0$ και χρησιμοποιώντας την

$$\lim_{\delta\to 0} \int_{|y|\geqslant \eta} |K_\delta(y)|\, d\lambda(y) = 0, \tag{6.1.25}$$

παίρνουμε

$$\limsup_{\delta\to 0} \|(f * K_\delta) - f\|_1 \leqslant M\varepsilon, \tag{6.1.26}$$

και αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $\|(f * K_\delta) - f\|_1 \to 0$ καθώς το $\delta \to 0$. □

## 6.2 Cesàro αθροισιμότητα

**Ορισμός 6.2.1.** Έστω $\{c_k\}$ ακολουθία μιγαδικών αριθμών. Λέμε ότι η $\{c_k\}$ συγκλίνει **κατά Cesàro** στον $\ell \in \mathbb{C}$ αν η ακολουθία

$$C_k := \frac{c_1 + \cdots + c_k}{k} \to \ell \tag{6.2.1}$$

καθώς το $k \to \infty$.

**Πρόταση 6.2.2.** *Αν $\lim_{k\to\infty} c_k = \ell$ τότε η $\{c_k\}$ συγκλίνει κατά Cesàro στον $\ell$.*

*Απόδειξη.* Κάνουμε πρώτα την επιπλέον υπόθεση ότι $c_k \to 0$ και δείχνουμε ότι $C_k \to 0$. Θεωρούμε $\varepsilon > 0$ και βρίσκουμε $k_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα: για κάθε $k \geqslant k_1$ ισχύει $|c_k| < \varepsilon/2$. Τότε, για κάθε $k > k_1$ έχουμε

$$|C_k| \leqslant \frac{|c_1 + \cdots + c_{k_1}|}{k} + \frac{k - k_1}{k}\frac{\varepsilon}{2} < \frac{|c_1 + \cdots + c_{k_1}|}{k} + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6.2.2}$$

Ο $A := |c_1 + \cdots + c_{k_1}|$ εξαρτάται από το $\varepsilon$. Επιλέγουμε $k_2(A) = k_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα: για κάθε $k \geqslant k_2$,

$$\frac{|c_1 + \cdots + c_{k_1}|}{k} = \frac{A}{k} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6.2.3}$$

Αν θέσουμε $k_0 = \max\{k_1, k_2\}$ τότε, για κάθε $k \geqslant k_0$,

$$|C_k| \leqslant \frac{A}{k} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \tag{6.2.4}$$

Άρα, $C_k \to 0$.

Για τη γενική περίπτωση εφαρμόζουμε το προηγούμενο στην ακολουθία $c'_k := c_k - \ell$. □

**Παρατήρηση 6.2.3.** Το αντίστροφο δεν ισχύει. Η ακολουθία $c_k = 1 + (-1)^k$ αποκλίνει, αλλά συγκλίνει κατά Cesàro στο 1.

**Ορισμός 6.2.4.** Έστω $\{c_k\}$ ακολουθία μιγαδικών αριθμών. Ορίζουμε

$$s_n = \sum_{k=1}^n c_k \quad \text{και} \quad \sigma_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n s_k. \tag{6.2.5}$$

Λέμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^\infty c_k$ συγκλίνει **κατά Cesàro** στον $s \in \mathbb{C}$ αν

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = s. \tag{6.2.6}$$

**Παρατήρηση 6.2.5.** Από την Πρόταση 6.2.2 έπεται ότι: αν $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ τότε $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = s$, άρα η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ συγκλίνει κατά Cesàro στον $s$.

Από την άλλη πλευρά, αν $z \neq 1$, $|z| = 1$, και αν ορίσουμε $c_k = z^k$, $k \geqslant 0$, τότε η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ αποκλίνει διότι $c_k \not\to 0$, όμως

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{s=0}^{k} z^k = \frac{1}{1-z}. \tag{6.2.7}$$

Δηλαδή, η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ συγκλίνει κατά Cesàro στον $\frac{1}{1-z}$.

## 6.3 Ο πυρήνας του Fejér

**Ορισμός 6.3.1** (Cesàro μέσοι)**.** Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Το $n$-οστό μερικό άθροισμα της σειράς Fourier της $f$ ορίστηκε ως εξής:

$$s_n(f,x) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) e^{ikx}. \tag{6.3.1}$$

Ο $n$-οστός Cesàro μέσος της σειράς Fourier της $f$ ορίζεται από την

$$\sigma_n(f,x) = \frac{s_0(f,x) + s_1(f,x) + \cdots + s_{n-1}(f,x)}{n}, \qquad n \geqslant 1. \tag{6.3.2}$$

Μπορούμε να εκφράσουμε την $\sigma_n(f,t)$ σε κλειστή μορφή, γράφοντας

$$\begin{aligned}
\sigma_n(f,x) &= \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} s_m(f,x) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k=-m}^{m} \widehat{f}(k) e^{ikx} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} \left( \sum_{m=|k|}^{n-1} \mathbf{1} \right) \widehat{f}(k) e^{ikx} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} (n - |k|) \widehat{f}(k) e^{ikx} \\
&= \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} \left( 1 - \frac{|k|}{n} \right) \widehat{f}(k) e^{ikx}.
\end{aligned}$$

Δεδομένου ότι

$$s_m(f,x) = (f * D_m)(x) \tag{6.3.3}$$

όπου $D_m$ είναι ο $m$-οστός πυρήνας του Dirichlet, μπορούμε επίσης να γράφουμε

$$\sigma_n(f,x) = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} (f * D_m)(x) = \left( f * \frac{D_0 + D_1 + \cdots + D_{n-1}}{n} \right)(x). \tag{6.3.4}$$

**Ορισμός 6.3.2** (πυρήνας Fejér)**.** Ο $n$-οστός πυρήνας του Fejér είναι το τριγωνομετρικό πολυώνυμο

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1} D_m(x). \tag{6.3.5}$$

Παρατηρήστε ότι

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{k=-m}^{m} e^{ikx} = \sum_{k=-(n-1)}^{n-1}\left(1-\frac{|k|}{n}\right)e^{ikx}. \tag{6.3.6}$$

Μπορούμε επίσης να εκφράσουμε τον $F_n$ σε κλειστή μορφή, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι

$$D_m(x) = \frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}. \tag{6.3.7}$$

Γράφουμε

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}} = \frac{1}{2n\sin^2(x/2)}\sum_{m=0}^{n-1} 2\sin\frac{x}{2}\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)x \\ &= \frac{1}{2n\sin^2(x/2)}\sum_{m=0}^{n-1}[\cos(mx)-\cos(m+1)x] = \frac{1}{2n\sin^2(x/2)}[1-\cos(nx)] \\ &= \frac{1}{2n\sin^2(x/2)}\cdot 2\sin^2(nx/2) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin^2(nx/2)}{\sin(x/2)}\right)^2. \end{aligned}$$

Συνεπώς, έχουμε το εξής:

**Λήμμα 6.3.3.** *Για κάθε $n \geqslant 1$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$,*

$$F_n(x) = \sum_{k=-(n-1)}^{n-1}\left(1-\frac{|k|}{n}\right)e^{ikx} \tag{6.3.8}$$

*και*

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}\right)^2. \tag{6.3.9}$$

**Παρατηρήσεις 6.3.4.** Από το Λήμμα 6.3.3 είναι φανερό ότι ο πυρήνας του Fejér $F_n$ είναι μη αρνητική άρτια συνάρτηση. Λόγω της $F_n(-x) = F_n(x)$, έχουμε

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} F_n(x)\,d\lambda(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} F_n(x)\,d\lambda(x) = 1. \tag{6.3.10}$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} 0 \leqslant F_n(x) &\leqslant \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}|D_m(x)| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}(2m+1) \\ &= \frac{1}{n}\cdot[n(n-1)+n] = n. \end{aligned}$$

Τέλος, για κάθε $0 < |x| < \pi$ έχουμε

$$0 \leqslant F_n(x) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}\right)^2 \leqslant \frac{1}{n}\frac{1}{(x/\pi)^2} = \frac{\pi^2}{nx^2}. \tag{6.3.11}$$

Για τους Cesàro μέσους $\sigma_n(f,x)$ θα χρησιμοποιούμε συχνά την αναπαράσταση

$$\sigma_n(f,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x-t)F_n(t)\,d\lambda(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}\left(\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}\right)F_n(t)\,d\lambda(t) \tag{6.3.12}$$

ή την

$$\sigma_n(f,x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left(f(x+t)+f(x-t)\right)F_n(t)\,d\lambda(t). \tag{6.3.13}$$

Οι σχέσεις αυτές προκύπτουν άμεσα από το γεγονός ότι η $F_n$ είναι άρτια συνάρτηση (με απλές αλλαγές μεταβλητής).

**Θεώρημα 6.3.5** (Fejér)**.** *Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$ και έστω $x \in \mathbb{T}$. Αν τα πλευρικά όρια $f(x+0)$ και $f(x-0)$ υπάρχουν, τότε*

$$\sigma_n(f,x) \to \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} \tag{6.3.14}$$

*καθώς το $n \to \infty$. Ειδικότερα, αν η $f$ είναι συνεχής σε κάθε σημείο ενός κλειστού διαστήματος $I \subset \mathbb{T}$, τότε $\sigma_n(f,x) \to f(x)$ ομοιόμορφα στο $I$.*

*Απόδειξη.* Γράφουμε

$$\begin{aligned}\sigma_n(f,x) - f(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\right)F_n(t)d\lambda(t)\\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{f(x+t)-f(x+0)}{2} + \frac{f(x-t)-f(x-0)}{2}\right)F_n(t)d\lambda(t).\end{aligned}$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $|f(x+t)-f(x+0)| < \varepsilon$ και $|f(x-t)-f(x-0)| < \varepsilon$ για κάθε $t \in (0,\delta)$. Άρα,

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\left(\frac{f(x+t)-f(x+0)}{2} + \frac{f(x-t)-f(x-0)}{2}\right)F_n(t)d\lambda(t)\right|\\ &\qquad\leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\left(\frac{|f(x+t)-f(x+0)|}{2} + \frac{|f(x-t)-f(x-0)|}{2}\right)F_n(t)d\lambda(t)\\ &\qquad\leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\varepsilon\, F_n(t)\,d\lambda(t) \leqslant \varepsilon.\end{aligned}$$

Στο $(\delta,\pi)$ έχουμε

$$F_n(t) \leqslant \frac{\pi^2}{n\delta^2}. \tag{6.3.15}$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{\pi}\int_\delta^\pi\left(\frac{f(x+t)-f(x+0)}{2}+\frac{f(x-t)-f(x-0)}{2}\right)F_n(t)d\lambda(t)\right|\\&\qquad\leqslant\frac{\pi^2}{n\delta^2}\frac{1}{\pi}\int_\delta^\pi\left(\frac{|f(x+t)-f(x+0)|}{2}+\frac{|f(x-t)-f(x-0)|}{2}\right)d\lambda(t)\\&\qquad\leqslant\frac{M(f)}{n\delta^2}\to 0\end{aligned}$$

καθώς το $n\to\infty$. Άρα,

$$\limsup_{n\to\infty}|\sigma_n(f,x)-f(x)|\leqslant\varepsilon \tag{6.3.16}$$

και έπεται το ζητούμενο. Στην περίπτωση που η $f$ είναι συνεχής σε κάθε σημείο ενός κλειστού διαστήματος $I\subset\mathbb{T}$, από την ομοιόμορφη συνέχεια της $f$ στο $I$ βλέπουμε ότι η επιλογή του $\delta$ στο παραπάνω επιχείρημα είναι ανεξάρτητη από το $x\in I$ (εξαρτάται μόνο από το $\varepsilon$), άρα $\sigma_n(f,x)\to f(x)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ ομοιόμορφα στο $I$. □

Ένα πόρισμα του Θεωρήματος 6.3.5 είναι η πυκνότητα των τριγωνομετρικών πολυωνύμων στον $(C(\mathbb{T}),\|\cdot\|_\infty)$ και στον $(L^1(\mathbb{T}),\|\cdot\|_1)$ που είχε χρησιμοποιηθεί για την απόδειξη του λήμματος Riemann-Lebesgue.

**Θεώρημα 6.3.6.** *Για κάθε $g\in C(\mathbb{T})$ και για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει τριγωνομετρικό πολυώνυμο $q_\varepsilon$ ώστε*

$$\|g-q_\varepsilon\|_\infty<\varepsilon. \tag{6.3.17}$$

*Επίσης, για κάθε $1\leqslant p<\infty$, για κάθε $f\in L_p(\mathbb{T})$ και για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει τριγωνομετρικό πολυώνυμο $q_\varepsilon$ ώστε*

$$\|f-q_\varepsilon\|_p<\varepsilon. \tag{6.3.18}$$

*Απόδειξη.* Γνωρίζουμε ότι η $\sigma_n(g)=g*F_n$ είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο, ως συνέλιξη μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης με το τριγωνομετρικό πολυώνυμο $F_n$. Από το προηγούμενο θεώρημα έχουμε ότι $\sigma_n(g)\to g$ ομοιόμορφα, διότι η $g$ είναι συνεχής. Δηλαδή, $\|g-\sigma_n(g)\|_\infty\to 0$. Για το τυχόν λοιπόν $\varepsilon>0$ έχουμε

$$\|g-\sigma_n(g)\|_\infty<\varepsilon \tag{6.3.19}$$

αν το $n$ είναι αρκετά μεγάλο. Αυτό αποδεικνύει τον πρώτο ισχυρισμό.

Για τον δεύτερο, έστω $f\in L_p(\mathbb{T})$ και $\varepsilon>0$. Μπορούμε να βρούμε $g\in C(\mathbb{T})$ ώστε $\|f-g\|_p<\varepsilon/2$. Στη συνέχεια, θεωρούμε τριγωνομετρικό πολυώνυμο $q_\varepsilon$ ώστε $\|g-q_\varepsilon\|_\infty<\varepsilon/2$. Αφού

$$\|g-q_\varepsilon\|_p=\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}|g(x)-q_\varepsilon(x)|^pd\lambda(x)\right)^{1/p}\leqslant\|g-q_\varepsilon\|_\infty<\varepsilon/2, \tag{6.3.20}$$

ο ισχυρισμός έπεται από την τριγωνική ανισότητα για την $\|\cdot\|_p$. □

**Παρατήρηση 6.3.7.** Για κάθε $n$ ορίζουμε $\delta_n = \frac{1}{n}$ και $K_{\delta_n} = F_n$. Η οικογένεια $\{K_{\delta_n}\}$ είναι προσέγγιση της μονάδας (στο $\mathbb{T}$). Πράγματι, για κάθε $n$ ισχύει

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} K_{\delta_n}(t)d\lambda(t) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} F_n(t)d\lambda(t) = 1. \tag{6.3.21}$$

Επίσης,

$$|K_{\delta_n}(t)| = F_n(t) \leqslant n = \frac{1}{\delta_n} \tag{6.3.22}$$

και, για κάθε $0 < |t| < \pi$, έχουμε

$$|K_{\delta_n}(t)| = F_n(t) \leqslant \frac{\pi^2}{nt^2} = \frac{\pi^2\delta_n}{t^2}. \tag{6.3.23}$$

Από τα αποτελέσματα της Παραγράφου 6.1 (ή μια απλή παραλλαγή της απόδειξής τους) έχουμε το εξής θεώρημα που «συμπληρώνει» το Θεώρημα 6.3.5:

**Θεώρημα 6.3.8.** *Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Για κάθε $x \in \mathrm{Leb}(f)$ ισχύει $\sigma_n(f,x) \to f(x)$ καθώς το $n \to \infty$. Ειδικότερα, $\sigma_n(f,x) \to f(x)$ σχεδόν παντού στο $\mathbb{T}$.* □

Το επόμενο θεώρημα αναφέρεται στην $L_p$-σύγκλιση των Cesàro μέσων $\sigma_n(f)$ στην $f$.

**Θεώρημα 6.3.9.** *Έστω $1 \leqslant p < \infty$. Για κάθε $f \in L_(\mathbb{T})$ ισχύει*

$$\lim_{n\to\infty} \|\sigma_n(f) - f\|_p = 0. \tag{6.3.24}$$

*Απόδειξη.* Γράφουμε

$$\begin{aligned}\|\sigma_n(f) - f\|_p &= \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |\sigma_n(f,x) - f(x)|^p dx\right)^{1/p}\\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \left|\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} (f(x+t) - f(x))F_n(t)\,d\lambda(t)\right|^p dx\right)^{1/p}.\end{aligned}$$

Υπάρχει $h \in L_q(\mathbb{T})$, όπου $q$ είναι ο συζυγής εκθέτης του $p$, τέτοια ώστε $\|h\|_q = 1$ και

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \left|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} (f(x+t) - f(x))F_n(t)\,d\lambda(t)\right|^p dx\right)^{1/p}\\ &\qquad = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} h(x)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} (f(x+t) - f(x))F_n(t)\,d\lambda(t)\right)d\lambda(x)\\ &\qquad = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} h(x)(f(x+t) - f(x))\,d\lambda(x)\right)F_n(t)\,d\lambda(t)\\ &\qquad \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \|h\|_q\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(x+t) - f(x)|^p\,d\lambda(x)\right)^{1/p} F_n(t)\,d\lambda(t)\\ &\qquad = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(x+t) - f(x)|^p\,d\lambda(x)\right)^{1/p} F_n(t)\,d\lambda(t)\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το θεώρημα Fubini και την ανισότητα Hölder. Αν θέσουμε $f_t(x) = f(x+t)$, συνδυάζοντας τα παραπάνω έχουμε

$$\|\sigma_n(f) - f\|_p \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \|f_t - f\|_p F_n(t)\, d\lambda(t). \tag{6.3.25}$$

Ορίζουμε $A(t) = \|f_t - f\|_p$. Γνωρίζουμε ότι η $A$ είναι συνεχής στο 0, άρα

$$\sigma_n(A,0) \to A(0) = 0 \ \text{ καθώς το } n \to \infty. \tag{6.3.26}$$

Όμως,

$$\begin{aligned}
\sigma_n(A,0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} A(t) F_n(-t)\, d\lambda(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} A(t) F_n(t)\, d\lambda(t) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \|f_t - f\|_p F_n(t)\, d\lambda(t),
\end{aligned}$$

άρα

$$\|\sigma_n(f) - f\|_p \leqslant \sigma_n(A,0) \tag{6.3.27}$$

και έπεται το συμπέρασμα. □

Παρατηρήστε ότι το Θεώρημα 6.3.9 έχει ως συνέπεια το δεύτερο μέρος του Θεωρήματος 6.3.6. Δείχνει επίσης ότι η απεικόνιση $f \mapsto \{\widehat{f}(k)\}_{k=-\infty}^{\infty}$ είναι 1-1.

**Θεώρημα 6.3.10** (μοναδικότητα). *Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Αν $\widehat{f}(k) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, τότε $f \equiv 0$.*

*Απόδειξη.* Αφού $\widehat{f}(k) = 0$ για κάθε $k$, έχουμε

$$\sigma_n(f,x) = \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) \widehat{f}(k) e^{ikx} = 0 \tag{6.3.28}$$

για κάθε $n$, δηλαδή $\sigma_n(f) \equiv 0$. Από το Θεώρημα 6.3.9 βλέπουμε ότι

$$\|f\|_p = \|\sigma_n(f) - f\|_p \to 0. \tag{6.3.29}$$

Άρα, $\|f\|_p = 0$ και αυτό δείχνει ότι $f \equiv 0$. □

## 6.4 Χαρακτηρισμός των τριγωνομετρικών σειρών που είναι σειρές Fourier

Σε αυτήν την παράγραφο εξετάζουμε αν υπάρχουν κάποια απλά κριτήρια τα οποία να μας επιτρέπουν να δούμε αν κάποια τριγωνομετρική σειρά είναι η σειρά Fourier μιας συνάρτησης $f \in L_p(\mathbb{T})$. Θεωρούμε λοιπόν μια τριγωνομετρική σειρά

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt} \tag{6.4.1}$$

και τους Cesàro μέσους

$$\sigma_n(t) = \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) c_k e^{ikt}. \tag{6.4.2}$$

της σειράς (6.4.1).

**Θεώρημα 6.4.1.** *Η (6.4.1) είναι η σειρά Fourier μιας συνεχούς συνάρτησης $f \in C(\mathbb{T})$ αν και μόνο αν η ακολουθία συναρτήσεων $\{\sigma_n\}$ των Cesàro μέσων της συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{T}$.*

*Απόδειξη.* Υποθέτουμε πρώτα ότι υπάρχει $f \in C(\mathbb{T})$ ώστε $\widehat{f}(k) = c_k$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Τότε,

$$\sigma_n(x) = \sigma_n(f, x). \tag{6.4.3}$$

Από το Θεώρημα 6.3.5 συμπεραίνουμε ότι $\sigma_n \to f$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{T}$.

Αντίστροφα, έστω ότι η $\{\sigma_n\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάποια συνάρτηση $f$ στο $\mathbb{T}$. Η $f$ είναι συνεχής ως ομοιόμορφο όριο τριγωνομετρικών πολυωνύμων. Παρατηρούμε ότι, για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, αν θεωρήσουμε $n > |k|$ τότε

$$\left(1 - \frac{|k|}{n}\right) c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \sigma_n(x) e^{-ikx} d\lambda(x). \tag{6.4.4}$$

Καθώς το $n \to \infty$ έχουμε

$$\left(1 - \frac{|k|}{n}\right) c_k \to c_k \tag{6.4.5}$$

και, αφού $\sigma_n \to f$ ομοιόμορφα,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \sigma_n(x) e^{-ikx} d\lambda(x) \to \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x) e^{-ikx} d\lambda(x) = \widehat{f}(k). \tag{6.4.6}$$

Έπεται ότι $c_k = \widehat{f}(k)$ για κάθε $k$, δηλαδή η (6.4.1) είναι η σειρά Fourier της $f$. $\square$

Στη συνέχεια μελετάμε την περίπτωση $1 < p < \infty$.

**Θεώρημα 6.4.2.** *Έστω $1 < p < \infty$. Η (6.4.1) είναι η σειρά Fourier μιας συνάρτησης $f \in L_p(\mathbb{T})$ αν και μόνο αν η ακολουθία $\{\sigma_n\}$ των Cesàro μέσων της είναι φραγμένη στον $L_p(\mathbb{T})$. Δηλαδή, αν υπάρχει $M > 0$ ώστε $\|\sigma_n\|_p \leqslant M$ για κάθε $n$.*

*Απόδειξη.* Παρατηρούμε πρώτα ότι

$$\begin{aligned}
\|\sigma_n(f)\|_p &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |\sigma_n(f, x)|^p d\lambda(x)\right)^{1/p} \\
&= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \left|\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x+t) F_n(t)\, d\lambda(t)\right|^p d\lambda(x)\right)^{1/p} \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(x+t)|^p\, d\lambda(x)\right)^{1/p} F_n(t)\, d\lambda(t) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \|f_t\|_p F_n(t)\, d\lambda(t),
\end{aligned}$$

όπου $f_t(x) = f(x+t)$, χρησιμοποιώντας τον δυϊσμό όπως και στην απόδειξη του Θεωρήματος 6.3.9. Αφού $\|f_t\|_p = \|f\|_p$ για κάθε $t \in \mathbb{T}$, συμπεραίνουμε ότι

$$\|\sigma_n(f)\|_p \leqslant \|f\|_p \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} F_n(t)\, d\lambda(t) = \|f\|_p \tag{6.4.7}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση θα χρησιμοποιήσουμε το εξής: αν $1 < p < \infty$ και $\{f_n\}$ είναι μια φραγμένη ακολουθία στον $L_p(\mathbb{T})$ τότε υπάρχει υπακολουθία $\{f_{k_n}\}$ της $\{f_n\}$ η οποία συγκλίνει ασθενώς σε κάποια $g \in L^p(\mathbb{T})$: αυτό σημαίνει ότι

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f_{k_n}(x)h(x)\, d\lambda(x) \to \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} g(x)h(x)\, d\lambda(x) \tag{6.4.8}$$

για κάθε $h \in L_q(\mathbb{T})$, όπου $q$ είναι ο συζυγής εκθέτης του $p$. Μια άμεση απόδειξη αυτού του ισχυρισμού έχουμε αν σκεφτούμε ότι η μοναδιαία μπάλα $B_p$ του $L_p(\mathbb{T})$ είναι ασθενώς συμπαγής (διότι ο $L_p$ είναι αυτοπαθής χώρος, άρα ισοδύναμα μιλάμε για τη μοναδιαία μπάλα του $(L_q(\mathbb{T}))^*$ με την $w^*$-τοπολογία). Επίσης, η ασθενής τοπολογία στην $B_p$ είναι μετρικοποιήσιμη διότι αναφερόμαστε σε διαχωρίσιμους χώρους. Εφαρμόζουμε λοιπόν αυτό το αποτέλεσμα για την $\{f_n\}$ η οποία περιέχεται σε κάποιο πολλαπλάσιο της $B_p$.

Υποθέτουμε ότι η $\{\sigma_n(f)\}$ είναι φραγμένη στον $L_p(\mathbb{T})$. Τότε, υπάρχει υπακολουθία $\{\sigma_{k_n}(f)\}$ της $\{\sigma_n(f)\}$ η οποία συγκλίνει ασθενώς σε κάποια $g \in L_p(\mathbb{T})$: για κάθε $h \in L_q(\mathbb{T})$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \sigma_{k_n}(f,x)h(x)\, d\lambda(x) \to \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} g(x)h(x)\, d\lambda(x). \tag{6.4.9}$$

Όπως και στην προηγούμενη απόδειξη, παρατηρούμε ότι, για κάθε $m \in \mathbb{Z}$, αν θεωρήσουμε $k_n > |m|$ τότε

$$\left(1 - \frac{|m|}{k_n}\right) c_m = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \sigma_{k_n}(f,t)e^{-imt} d\lambda(t). \tag{6.4.10}$$

Καθώς το $n \to \infty$ έχουμε

$$\left(1 - \frac{|m|}{k_n+1}\right) c_m \to c_m \tag{6.4.11}$$

και, αφού η $t \mapsto e^{-imt}$ ανήκει στον $L_q(\mathbb{T})$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \sigma_{k_n}(f,t)e^{-imt} d\lambda(t) \to \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} g(t)e^{-imt} d\lambda(t) = \widehat{g}(m). \tag{6.4.12}$$

Έπεται ότι $c_m = \widehat{g}(m)$ για κάθε $m$, δηλαδή η (6.4.1) είναι η σειρά Fourier της $g$. □

## 6.5 Abel αθροισιμότητα και ο πυρήνας του Poisson

Μια σειρά μιγαδικών αριθμών $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ λέγεται *Abel αθροίσιμη* στον $s \in \mathbb{C}$ αν για κάθε $0 \leqslant r < 1$ η σειρά

$$A(r) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k r^k \tag{6.5.1}$$

συγκλίνει, και

$$\lim_{r\to 1^-} A(r) = s. \tag{6.5.2}$$

Οι ποσότητες $A(r)$ λέγονται *Abel μέσοι* της σειράς $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$. Αποδεικνύεται ότι αν η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ συγκλίνει στον $s$ τότε είναι και Abel αθροίσιμη στον $s$. Αποδεικνύεται επίσης ότι αν η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ είναι Cesàro αθροίσιμη στον $s$ τότε είναι και Abel αθροίσιμη στον $s$. Το παράδειγμα της σειράς

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+1) = 1-2+3-4+5-\cdots \tag{6.5.3}$$

δείχνει ότι μια σειρά μπορεί να είναι Abel αθροίσιμη χωρίς να είναι Cesàro αθροίσιμη. Μπορεί κανείς να ελέγξει ότι

$$A(r) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+1)r^k = \frac{1}{(1+r)^2} \tag{6.5.4}$$

για κάθε $0 \leqslant r < 1$, συνεπώς

$$\lim_{r\to 1^-} A(r) = \frac{1}{4}. \tag{6.5.5}$$

Όμως, η σειρά αυτή δεν είναι Cesàro αθροίσιμη: θα έπρεπε να ισχύει $\lim\limits_{n\to\infty}(s_n/n) = 0$. Για αποδείξεις των παραπάνω ισχυρισμών παραπέμπουμε στο Παράρτημα και τις σχετικές ασκήσεις.

**Ορισμός 6.5.1** (πυρήνας του Poisson)**.** Για κάθε $0 \leqslant r < 1$ θεωρούμε τη συνάρτηση $P_r : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ που ορίζεται μέσω της

$$P_r(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}e^{ikx}. \tag{6.5.6}$$

Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του Weierstrass βλέπουμε ότι η σειρά στο δεξιό μέλος συγκλίνει απολύτως για κάθε $x$ και ομοιόμορφα σαν σειρά συναρτήσεων στο $[-\pi,\pi]$. Η συνάρτηση $P_r$ λέγεται *$r$-πυρήνας του Poisson*. Από την ομοιόμορφη σύγκλιση της σειράς (6.5.6) έπεται (εξηγήστε γιατί) ότι

$$\widehat{P_r}(k) = r^{|k|}, \qquad k \in \mathbb{Z}. \tag{6.5.7}$$

Μπορούμε να δείξουμε ότι ο πυρήνας $P_r$ παίρνει μη αρνητικές πραγματικές τιμές: δίνεται μάλιστα από την

$$P_r(x) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2}. \tag{6.5.8}$$

Για την απόδειξη της τελευταίας ισότητας θέτουμε $\omega = re^{ix}$. Τότε,

$$\begin{aligned}
P_r(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} r^k(e^{ix})^k + \sum_{k=-\infty}^{-1} r^{-k}(e^{-ix})^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty}(re^{ix})^k + \sum_{s=1}^{\infty}(re^{-ix})^s \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\omega^k + \sum_{s=1}^{\infty}\overline{\omega}^s = \frac{1}{1-\omega} + \frac{\overline{\omega}}{1-\overline{\omega}} = \frac{1-\overline{\omega}+(1-\omega)\overline{\omega}}{(1-\omega)(1-\overline{\omega})} \\
&= \frac{1-|\omega|^2}{|1-\omega|^2}.
\end{aligned}$$

Δεδομένου ότι $|\omega| = r$ και $1 - \omega = 1 - re^{ix} = (1 - r\cos x) - ir\sin x$, καταλήγουμε στην

$$P_r(x) = \frac{1-r^2}{(1-r\cos x)^2 + r^2\sin^2 x} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2}. \tag{6.5.9}$$

Θα αποδείξουμε ότι η οικογένεια $\{P_r\}_{0\leqslant r\leqslant 1}$ είναι οικογένεια καλών πυρήνων. Δεδομένου ότι το σύνολο δεικτών είναι τώρα το διάστημα $[0,1)$, αυτό που χρειάζεται να τροποποιήσουμε είναι η τρίτη συνθήκη του ορισμού. Ουσιαστικά ζητάμε το εξής: για κάθε ακολουθία $\{r_n\}$ στο $[0,1)$ με $r_n \to 1^-$, ζητάμε η ακολουθία $\{P_{r_n}\}_{n=1}^{\infty}$ να είναι ακολουθία καλών πυρήνων. Η δεύτερη συνθήκη του ορισμού είναι άμεση συνέπεια της πρώτης συνθήκης, διότι οι $P_r$ παίρνουν μη αρνητικές πραγματικές τιμές. Αποδεικνύουμε λοιπόν την εξής πρόταση.

**Πρόταση 6.5.2.** *Για κάθε $0 \leqslant r < 1$ έχουμε*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(x)\,d\lambda(x) = 1, \tag{6.5.10}$$

*και για κάθε $0 < \delta < \pi$ ισχύει ότι*

$$\lim_{r\to 1^-}\int_{\delta\leqslant|x|\leqslant\pi} P_r(x)\,d\lambda(x) = 0. \tag{6.5.11}$$

*Απόδειξη.* Έστω $0 \leqslant r < 1$. Αφού η σειρά συναρτήσεων $P_r(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}e^{ikx}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-\pi,\pi]$, έχουμε

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(x)\,d\lambda(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{r^{|k|}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}d\lambda(x) = \frac{r^0}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^0 d\lambda(x) = 1, \tag{6.5.12}$$

χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}d\lambda(x) = 0$ αν $k \neq 0$. Έστω τώρα $0 < \delta < \pi$ και έστω $1/2 \leqslant r < 1$. Έχουμε

$$1 - 2r\cos x + r^2 = (1-r)^2 + 2r(1-\cos x) \geqslant (1-r)^2 + 2r(1-\cos\delta) \geqslant c_\delta = 1 - \cos\delta > 0 \tag{6.5.13}$$

για κάθε $\delta \leqslant |x| \leqslant \pi$ (διότι $\cos x \leqslant \cos\delta$). Συνεπώς,

$$0 \leqslant \int_{\delta\leqslant|x|\leqslant\pi} P_r(x)\,d\lambda(x) \leqslant \int_{\delta\leqslant|x|\leqslant\pi}\frac{1-r^2}{c_\delta}\,d\lambda(x) \leqslant \frac{2\pi}{c_\delta}(1-r^2) \to 0 \tag{6.5.14}$$

όταν $r \to 1^-$. Έπεται το συμπέρασμα της πρότασης. $\square$

**Ορισμός 6.5.3** (Abel μέσοι της $f$)**.** Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Για κάθε $0 \leqslant r < 1$ ορίζουμε τον *r-Abel μέσο* της $f$ μέσω της

$$A_r(f)(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}\widehat{f}(k)e^{ikx}. \tag{6.5.15}$$

Αφού η ακολουθία $\{|\widehat{f}(k)|\}$ είναι φραγμένη, το κριτήριο του Weierstrass δείχνει ότι η σειρά συναρτήσεων στο δεξιό μέλος συγκλίνει ομοιόμορφα στον $\mathbb{T}$. Παρατηρήστε ότι $A_r(f)(x)$ είναι ο $r$-Abel μέσος της σειράς Fourier $S(f)$ της $f$.

Λόγω της ομοιόμορφης σύγκλισης της σειράς (6.5.15), μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}
A_r(f)(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}\widehat{f}(k)e^{ikx} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-iky}d\lambda(y)\right) e^{ikx} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}e^{-ik(y-x)}\right) d\lambda(y) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)P_r(x-y)\,d\lambda(y) \\
&= (f * P_r)(x).
\end{aligned}$$

Αφού η $\{P_r\}$ είναι οικογένεια καλών πυρήνων, παίρνουμε αμέσως το εξής.

**Θεώρημα 6.5.4.** *Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Τότε, η σειρά Fourier $S(f)$ της $f$ είναι Abel αθροίσιμη στην $f$ σε κάθε σημείο συνέχειας της $f$: αν η $f$ είναι συνεχής στο $x \in \mathbb{T}$, τότε*

$$A_r(f)(x) \to f(x). \tag{6.5.16}$$

*Επιπλέον, αν η $f$ είναι συνεχής σε κάθε $x \in \mathbb{T}$, τότε η σειρά Fourier $S(f)$ της $f$ είναι ομοιόμορφα Abel αθροίσιμη στην $f$: δηλαδή,*

$$A_r(f) \xrightarrow{o\mu} f. \tag{6.5.17}$$

## 6.6 Ασκήσεις

### Ομάδα Α΄

**1.** Έστω $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ σειρά πραγματικών αριθμών. Ορίζουμε $s_n = c_1 + \cdots + c_n$. Δείξτε ότι:

(α) Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ συγκλίνει στον $s$, τότε είναι Abel αθροίσιμη στον $s$.

*Υπόδειξη.* Μπορείτε να υποθέσετε ότι $s = 0$ (εξηγήστε γιατί). Δείξτε πρώτα ότι, για κάθε $r \in (0,1)$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k = (1-r)\sum_{k=1}^{\infty} s_k r^k.$$

(β) Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ είναι Cesàro αθροίσιμη στον $s$, τότε είναι Abel αθροίσιμη στον $s$.

*Υπόδειξη.* Μπορείτε να υποθέσετε ότι $s = 0$ (εξηγήστε γιατί). Δείξτε πρώτα ότι, για κάθε $r \in (0,1)$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k = (1-r)^2\sum_{k=1}^{\infty} k\sigma_k r^k.$$

**2.** Έστω $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Δείξτε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$(s_n(f)) * g = s_n(f * g) = f * (s_n(g)).$$

**3.** Έστω $\{K_\delta\}_{\delta>0}$ μια οικογένεια καλών πυρήνων. Δείξτε ότι: για κάθε $p > 1$,

$$\lim_{\delta\to 0} \|K_\delta\|_p = \lim_{\delta\to 0} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |K_\delta(x)|^p d\lambda(x) \right)^{1/p} = +\infty.$$

**4.** Έστω $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ άρτια ολοκληρώσιμη συνάρτηση με την ιδιότητα: $a_k(f) \geqslant 0$ για κάθε $k \geqslant 0$. Δείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k < +\infty.$$

**5.** Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση που ικανοποιεί την

$$f(x) = f(x+1) = f(x+\sqrt{2})$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η $f$ είναι σταθερή. [Υπόδειξη: Θεωρήστε την $g(x) = f\left(\frac{x}{2\pi}\right)$ και υπολογίστε τους συντελεστές Fourier της $g$.]

**6.** Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ συνάρτηση $2\pi$-περιοδική και ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό διάστημα. Υποθέτουμε ότι, για κάποιο $x \in \mathbb{R}$ υπάρχουν τα πλευρικά όρια

$$f(x^-) := \lim_{t\to x^-} f(t) \quad \text{και} \quad f(x^+) := \lim_{t\to x^+} f(t).$$

Δείξτε ότι η σειρά Fourier $S(f)$ της $f$ είναι Abel αθροίσιμη στο σημείο $x$: πιο συγκεκριμένα,

$$\lim_{r\to 1^-} A_r(f)(x) = \lim_{r\to 1^-} (f * P_r)(x) = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}.$$

*Υπόδειξη.* Χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{0} P_r(x)\, d\lambda(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} P_r(x)\, d\lambda(x).$$

**7.** Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$Q_n(t) = \alpha_n \left( \frac{1+\cos t}{2} \right)^n,$$

όπου η θετική σταθερά $\alpha_n$ επιλέγεται έτσι ώστε να έχουμε

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Q_n(t)\, d\lambda(t) = 1.$$

Δείξτε ότι: αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής $2\pi$-περιοδική συνάρτηση, τότε

$$f * Q_n \xrightarrow{\text{ομ}} f.$$

Παρατηρήστε ότι αυτό δίνει ακόμα μία απόδειξη του «τριγωνομετρικού» προσεγγιστικού θεωρήματος Weierstrass.

**8.** Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$G_n(x) = F_n(x)\sin nx,$$

όπου $F_n$ είναι ο $n$-οστός πυρήνας του Fejér. Δείξτε ότι: αν $T \in \mathcal{T}_n$ είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού μικρότερου ή ίσου από $n$, τότε

$$T'(x) = -2n(T * G_n)(x)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Συμπεράνατε ότι

$$|T'(x)| \leqslant 2n\|T\|_\infty$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αυτή είναι μια «ασθενής» έκδοση της ανισότητας του Bernstein, η οποία ισχυρίζεται ότι $\|T'\|_\infty \leqslant n\|T\|_\infty$ για κάθε $T \in \mathcal{T}_n$.

**9.** Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής $2\pi$-περιοδική συνάρτηση και έστω $a_k, b_k$ οι συντελεστές Fourier της $f$. Αν

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{a_k^2 + b_k^2} = 0,$$

δείξτε ότι $s_n(f) \to f$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

**10.** Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Δείξτε ότι ο τελεστής $T : L_1(\mathbb{T}) \to L_1(\mathbb{T})$ που ορίζεται μέσω της $T(g) = f * g$ έχει νόρμα

$$\|T\| = \|f\|_1.$$

*Υπόδειξη.* Χρησιμοποιήστε τον πυρήνα του Fejér $F_n$, $n \in \mathbb{N}$.

**11.** Έστω $f \in L_\infty(\mathbb{T})$ με την ιδιότητα $|k\widehat{f}(k)| \leqslant A$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Δείξτε ότι, για κάθε $n$ και για κάθε $x \in \mathbb{T}$ ισχύει

$$|s_n(f,x)| \leqslant \|f\|_\infty + 2A.$$

*Υπόδειξη.* Δείξτε ότι

$$s_n(f,x) = \sigma_{n+1}(f,x) + \sum_{k=-n}^{n} \frac{|k|}{n+1}\widehat{f}(k)e^{ikx}.$$

**12.** Έστω $p \geqslant 1$ και έστω $f \in L_p(\mathbb{T})$ με την ιδιότητα

$$\lim_{n\to\infty} n\|\sigma_n(f) - f\|_p = 0.$$

Δείξτε ότι η $f$ είναι σταθερή.

**13.** Έστω $(f_n)$ ακολουθία στον $L_1(\mathbb{T})$ με την ιδιότητα: για κάθε $g \in L_1(\mathbb{T})$,

$$\lim_{n\to\infty} \|g - g * f_n\|_1 = 0.$$

Δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} \widehat{f_n}(k) = 1$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

**14.** Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Δείξτε ότι: για κάθε μετρήσιμο $A \subseteq \mathbb{T}$, η σειρά

$$\sum_k \widehat{f}(k) \int_A e^{ikt} d\lambda(t)$$

είναι Cesàro αθροίσιμη στο $\int_A f(t)\, d\lambda(t)$.

**Ομάδα Β′**

**15.** Έστω $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ αύξουσα συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$|\widehat{f}(k)| \leqslant \frac{M}{|k|}$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

*Υπόδειξη.* Υπολογίστε αρχικά τους συντελεστές Fourier συναρτήσεων της μορφής $h := \chi_{[b_s, b_{s+1}]}$. Κατόπιν, δείξτε ότι η $f$ προσεγγίζεται (ως προς την $\|\cdot\|_1$) από κλιμακωτές συναρτήσεις της μορφής

$$g(x) = \sum_{k=1}^{N} t_k \chi_{[b_s, b_{s+1}]}(x),$$

όπου $-\pi = b_1 < b_2 < \cdots < b_{N+1} = \pi$ και $-\|f\|_\infty \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_N \leqslant \|f\|_\infty$.

**16.** Έστω $0 < \alpha \leqslant 1$ και έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $t \in \mathbb{T}$ η $f$ ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz

$$|f(t+x) - f(t)| \leqslant A|x|^\alpha, \qquad |x| \leqslant \pi.$$

Δείξτε ότι: αν $\alpha < 1$ τότε

$$|\sigma_n(f,t) - f(t)| \leqslant \frac{\pi+1}{1-\alpha} \frac{A}{n^\alpha},$$

ενώ αν $\alpha = 1$ τότε

$$|\sigma_n(f,t) - f(t)| \leqslant 2\pi A \frac{\ln(n+1)}{n}.$$

**17.** Έστω $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ ακολουθία μη αρνητικών πραγματικών αριθμών με τις εξής ιδιότητες: (α) $a_{-n} = a_n$ για κάθε $n$, (β) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, και (γ) για κάθε $n > 0$,

$$2a_n \leqslant a_{n-1} + a_{n+1}.$$

Δείξτε ότι υπάρχει μη αρνητική $f \in L_1(\mathbb{T})$ με $\widehat{f}(k) = a_k$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

*Υπόδειξη.* Δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} n(a_n - a_{n+1}) = 0$ και θεωρήστε την συνάρτηση

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n)\, F_n(x).$$

**18.** (α) Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Υποθέτουμε ότι: για κάθε $k \geqslant 0$ ισχύει $\widehat{f}(k) = -\widehat{f}(-k) \geqslant 0$. Δείξτε ότι
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\widehat{f}(k)}{k} < +\infty.$$
(β) Δείξτε ότι: αν $a_k > 0$ και $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} = +\infty$, τότε η τριγωνομετρική σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx$ δεν είναι σειρά Fourier κάποιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης.

**19.** Έστω $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ περιττή ολοκληρώσιμη συνάρτηση ώστε $|f(x)| \leqslant M$ για κάθε $x \in [-\pi, \pi]$ και $b_k(f) \geq 0$ για κάθε $k \geq 1$. Δείξτε ότι
$$|s_n(f)(x)| \leqslant 5M$$
για κάθε $n \geq 1$ και για κάθε $x \in [-\pi, \pi]$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

# $L_2$-σύγκλιση σειρών Fourier

## 7.1 Χώροι Hilbert

### 7.1.1 Χώροι με εσωτερικό γινόμενο και χώροι Hilbert

**Ορισμός 7.1.1.** Έστω $X$ γραμμικός χώρος πάνω από το $\mathbb{K}$. Μια συνάρτηση $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{K}$ λέγεται *εσωτερικό γινόμενο* αν ικανοποιεί τα εξής:

(α) $\langle x, x\rangle \geqslant 0$ για κάθε $x \in X$, με ισότητα αν και μόνο αν $x = 0$.

(β) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$, για κάθε $x, y \in X$.

(γ) για κάθε $y \in X$ η συνάρτηση $x \mapsto \langle x, y\rangle$ είναι γραμμική.

**Πρόταση 7.1.2** (ανισότητα Cauchy-Schwarz). *Έστω $X$ χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Αν $x, y \in X$, τότε*

$$|\langle x, y\rangle| \leqslant \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}. \tag{7.1.1}$$

*Απόδειξη.* Εξετάζουμε πρώτα την περίπτωση $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Έστω $x, y \in X$ και έστω $M = |\langle x, y\rangle|$. Υπάρχει $\vartheta \in \mathbb{R}$ ώστε $\langle x, y\rangle = Me^{i\vartheta}$. Για κάθε μιγαδικό αριθμό $\lambda = re^{it}$ έχουμε

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \langle \lambda x + y, \lambda x + y\rangle &= |\lambda|^2\langle x, x\rangle + \lambda\langle x, y\rangle + \overline{\lambda\langle x, y\rangle} + \langle y, y\rangle \\ &= |\lambda|^2\langle x, x\rangle + 2\mathrm{Re}(\lambda\langle x, y\rangle) + \langle y, y\rangle \\ &= r^2\langle x, x\rangle + 2\mathrm{Re}(rMe^{i(\vartheta+t)}) + \langle y, y\rangle. \end{aligned}$$

Επιλέγουμε το $t$ έτσι ώστε $e^{i(\vartheta+t)} = -1$. Τότε, έχουμε

$$r^2\langle x, x\rangle - 2rM + \langle y, y\rangle \geqslant 0 \tag{7.1.2}$$

για κάθε $r > 0$. Παίρνοντας $r = \sqrt{\langle y, y\rangle}/\sqrt{\langle x, x\rangle}$ έχουμε το ζητούμενο (η περίπτωση $x = 0$ ή $y = 0$ είναι προφανής).

Στην περίπτωση που $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, παρατηρούμε ότι για κάθε $x, y \in X$ και για κάθε $t \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$0 \leqslant \langle tx + y, tx + y\rangle = t^2\langle x, x\rangle + 2t\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle. \tag{7.1.3}$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου ως προς $t$ πρέπει να είναι μικρότερη ή ίση από μηδέν. Άρα, $4\langle x,y\rangle^2 - 4\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle \leqslant 0$. Αυτό δίνει το ζητούμενο. □

Ορίζουμε $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ με $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$. Η ανισότητα Cauchy-Schwarz μας επιτρέπει να δείξουμε ότι η $\|\cdot\|$ είναι νόρμα:

**Πρόταση 7.1.3.** *Έστω $X$ χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Η συνάρτηση $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$, με $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$ είναι νόρμα.*

*Απόδειξη.* Αρκεί να ελέγξουμε την τριγωνική ανισότητα (οι άλλες ιδιότητες είναι απλές). Όμως,

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \|y\|^2 \\
&= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\mathrm{Re}(\langle x,y\rangle) \\
&\leqslant \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|\langle x,y\rangle| \\
&\leqslant \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\cdot\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2,
\end{aligned}$$

από τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου και την ανισότητα Cauchy-Schwarz. □

**Παρατήρηση 7.1.4.** Έστω $X$ χώρος με εσωτερικό γινόμενο και έστω $\|\cdot\|$ η επαγόμενη νόρμα. Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έπεται εύκολα ότι το εσωτερικό γινόμενο είναι συνεχές ως προς την $\|\cdot\|$: Αν $x_n \to x$ και $y_n \to y$ ως προς την $\|\cdot\|$, τότε

$$\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x,y\rangle. \tag{7.1.4}$$

Για την απόδειξη γράφουμε

$$\begin{aligned}
|\langle x_n,y_n\rangle - \langle x,y\rangle| &= |\langle x_n, y_n - y\rangle + \langle x_n - x, y\rangle| \\
&\leqslant |\langle x_n, y_n - y\rangle| + |\langle x_n - x, y\rangle| \leqslant \|x_n\|\,\|y_n - y\| + \|x_n - x\|\,\|y\|.
\end{aligned}$$

Η $(x_n)$ συγκλίνει άρα είναι φραγμένη, και $\|y_n - y\| \to 0$, $\|x_n - x\| \to 0$. Άρα,

$$\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x,y\rangle. \tag{7.1.5}$$

Ειδικότερα, για κάθε $y \in X$ η απεικόνιση $x \mapsto \langle x,y\rangle$ είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές στον $X$.

**Ορισμός 7.1.5.** Ένας χώρος Banach λέγεται *χώρος Hilbert* αν υπάρχει εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$ στον $X$ ώστε $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$ για κάθε $x \in X$.

Στη συνέχεια συμβολίζουμε τους χώρους Hilbert με $H$. Κάθε χώρος Hilbert ικανοποιεί τον *κανόνα του παραλληλογράμμου*: για κάθε $x,y \in H$,

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2. \tag{7.1.6}$$

Αντίστροφα, αν η νόρμα $\|\cdot\|$ ενός χώρου Banach $X$ ικανοποιεί τον κανόνα του παραλληλογράμμου, τότε προέρχεται από εσωτερικό γινόμενο το οποίο ορίζεται από την

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\} \tag{7.1.7}$$

στην περίπτωση $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, και από την

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2) \tag{7.1.8}$$

στην περίπτωση $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

### 7.1.2 Καθετότητα

**Ορισμός 7.1.6** (καθετότητα)**.** Έστω $X$ ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Λέμε ότι τα $x, y \in X$ είναι *ορθογώνια* (ή *κάθετα*) και γράφουμε $x \perp y$, αν $\langle x, y\rangle = 0$. Αν $x \in X$ και $M$ είναι ένα μη κενό υποσύνολο του $X$, λέμε ότι το $x$ είναι κάθετο στο $M$ και γράφουμε $x \perp M$ αν $x \perp y$ για κάθε $y \in M$.

**Παρατηρήσεις 7.1.7.** (α) Το 0 είναι κάθετο σε κάθε $x \in X$, και είναι το μοναδικό στοιχείο του $X$ που έχει αυτήν την ιδιότητα.
(β) Αν $x \perp y$, ισχύει το *Πυθαγόρειο θεώρημα*: $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

**Ορισμός 7.1.8.** Έστω $X$ ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο και έστω $M$ γραμμικός υπόχωρος του $X$. Ορίζουμε

$$M^\perp = \{x \in X : \forall y \in M,\ \ \langle x, y\rangle = 0\}. \tag{7.1.9}$$

Ο $M^\perp$ είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του $X$

**Πρόταση 7.1.9.** *Έστω $H$ χώρος Hilbert, $M$ κλειστός γραμμικός υπόχωρος του $H$, και $x \in H$. Υπάρχει μοναδικό $y_0 \in M$ ώστε*

$$\|x - y_0\| = \mathrm{dist}(x, M) = \inf\{\|x - y\| : y \in M\}. \tag{7.1.10}$$

*Το μοναδικό αυτό $y_0 \in M$ συμβολίζεται με $P_M(x)$, ονομάζεται προβολή του $x$ στον $M$ και ικανοποιεί την $x - P_M(x) \perp M$.*

*Απόδειξη.* Θέτουμε $\delta = \mathrm{dist}(x, M)$. Υπάρχει ακολουθία $(y_n)$ στον $M$ ώστε

$$\|x - y_n\| \to \delta. \tag{7.1.11}$$

Από τον κανόνα του παραλληλογράμμου,

$$\begin{aligned}
\|y_n - y_m\|^2 &= \|(y_n - x) + (x - y_m)\|^2 \\
&= 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - \|(y_n + y_m) - 2x\|^2 \\
&= 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - 4\left\|\frac{y_n + y_m}{2} - x\right\|^2.
\end{aligned}$$

Όμως, $\frac{y_n+y_m}{2} \in M$, άρα $\|\frac{y_n+y_m}{2} - x\| \geqslant \delta$. Επομένως,

$$\|y_n - y_m\|^2 \leqslant 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - 4\delta^2 \to 2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\delta^2 = 0 \tag{7.1.12}$$

όταν $m, n \to \infty$. Άρα, η $(y_n)$ είναι ακολουθία Cauchy στον $H$. Ο $H$ είναι πλήρης, άρα υπάρχει $y_0 \in H$ ώστε $y_n \to y_0$. Έπεται ότι $y_0 \in M$ (ο $M$ είναι κλειστός) και $\|x - y_0\| = \lim_n \|x - y_n\| = \delta$.

Για τη μοναδικότητα, χρησιμοποιούμε και πάλι τον κανόνα του παραλληλογράμμου. Αν $\|x - y\| = \delta = \|x - y'\|$, τότε

$$\begin{aligned}
0 \leqslant \|y - y'\|^2 &= 2\|x - y'\|^2 + 2\|x - y\|^2 - 4\left\|\frac{y + y'}{2} - x\right\|^2 \\
&\leqslant 2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\delta^2 = 0.
\end{aligned}$$

Άρα, $y = y'$.

Για τον τελευταίο ισχυρισμό θέτουμε $w = x - P_M(x)$. Έστω ότι το $w$ δεν είναι κάθετο στον $M$. Τότε, υπάρχει $z \in M$ ώστε $\langle w, z\rangle > 0$. Για $\varepsilon > 0$ αρκετά μικρό, έχουμε $2\langle w, z\rangle - \varepsilon\|z\|^2 > 0$. Άρα,

$$\begin{aligned}\|x - (P_M(x) + \varepsilon z)\|^2 &= \|w - \varepsilon z\|^2 = \langle w - \varepsilon z, w - \varepsilon z\rangle \\ &= \|w\|^2 - 2\varepsilon\langle w, z\rangle + \varepsilon\|z\|^2 \\ &= \delta^2 - \varepsilon(2\langle w, z\rangle - \varepsilon\|z\|^2) < \delta^2,\end{aligned}$$

το οποίο είναι άτοπο γιατί $P_M(x) + \varepsilon z \in M$. □

**Πόρισμα 7.1.10.** *Αν $H$ χώρος Hilbert και $M$ κλειστός γνήσιος υπόχωρος του $H$, τότε υπάρχει $z \in H$, $z \neq 0$, ώστε $z \perp M$.*

*Απόδειξη.* Έστω $x \in H \setminus M$. Παίρνουμε $z = x - P_M(x) \neq 0$. □

### 7.1.3 Ορθοκανονικές βάσεις

**Ορισμός 7.1.11.** Έστω $X$ χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Μια πεπερασμένη ή άπειρη ακολουθία $(e_k) \subseteq X$ λέγεται *ορθοκανονική*, αν $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$ (1 αν $i = j$ και 0 αν $i \neq j$). Αν $(e_k)$ είναι μια ορθοκανονική ακολουθία στον $X$, τότε το $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο. Πράγματι, αν $\sum_{k=1}^n \lambda_k e_{i_k} = 0$, τότε για κάθε $j = 1, \ldots, n$ έχουμε

$$0 = \Big\langle \sum_{k=1}^n \lambda_k e_{i_k}, e_{i_j}\Big\rangle = \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle e_{i_k}, e_{i_j}\rangle = \lambda_j. \tag{7.1.13}$$

**Ορισμός 7.1.12.** Έστω $H$ χώρος Hilbert. Μιά ορθοκανονική ακολουθία $(e_k)$ λέγεται *ορθοκανονική βάση* του $H$ αν

$$H = \overline{\mathrm{span}}\{e_k : k \in \mathbb{N}\}. \tag{7.1.14}$$

**Πρόταση 7.1.13.** *Έστω $H$ ένας απειροδιάστατος διαχωρίσιμος χώρος Hilbert. Υπάρχει ορθοκανονική βάση $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ του $H$.*

*Απόδειξη.* Παρατηρούμε πρώτα ότι κάθε ορθοκανονική οικογένεια $\{e_i : i \in I\}$ του $H$ είναι αριθμήσιμο σύνολο: πράγματι, αν $e_i \neq e_j$ είναι στοιχεία μιας τέτοιας οικογένειας, τότε $\|e_i - e_j\| = \sqrt{2}$. Την ίδια στιγμή, αφού ο χώρος είναι διαχωρίσιμος δεν γίνεται να υπάρχουν υπεραριθμήσιμα το πλήθος σημεία του που να απέχουν ανά δύο απόσταση ίση με $\sqrt{2}$. Θεωρούμε λοιπόν μια ορθοκανονική ακολουθία $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ του $H$ (η διάταξη των στοιχείων της βάσης είναι τυχούσα) η οποία να είναι μεγιστική, δηλαδή να μην περιέχεται γνήσια σε κάποια άλλη. Αυτό γίνεται με χρήση του λήμματος του Zorn. Τότε, ο υπόχωρος $\mathrm{span}\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ είναι πυκνός στον $H$ (αλλιώς, θα μπορούσαμε να βρούμε μοναδιαίο $z \perp e_k$ για κάθε $k$, και η $(e_k)$ δεν θα ήταν μεγιστική). Άρα, η $(e_k)$ είναι ορθοκανονική βάση του $H$. □

**Λήμμα 7.1.14.** *Έστω $X$ χώρος με εσωτερικό γινόμενο και έστω $(e_n)$ ορθοκανονική ακολουθία στον $X$. Για κάθε $x \in H$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$,*

$$d(x, \mathrm{span}\{e_1, \ldots, e_n\}) = \Big\| x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k\rangle e_k \Big\|. \tag{7.1.15}$$

*Απόδειξη.* Έστω $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ και $y = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k$. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\left\| x - \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k \right\|^2 &= \left\| x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k\rangle e_k + \sum_{k=1}^n (\langle x, e_k\rangle - \lambda_k) e_k \right\|^2 \\ &= \left\| x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k\rangle e_k \right\|^2 + \left\| \sum_{k=1}^n (\langle x, e_k\rangle - \lambda_k) e_k \right\|^2 \\ &= \left\| x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k\rangle e_k \right\|^2 + \sum_{k=1}^n |\lambda_k - \langle x, e_k\rangle|^2\end{aligned}$$

(χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι το $x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k\rangle e_k$ είναι κάθετο σε όλα τα $e_k$, άρα και στο $\sum_{k=1}^n (\langle x, e_k\rangle - \lambda_k) e_k$, οπότε εφαρμόσαμε το Πυθαγόρειο θεώρημα γι' αυτά τα δύο διανύσματα). Άρα,

$$\left\| x - \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k \right\|^2 \geqslant \left\| x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k\rangle e_k \right\|^2 \tag{7.1.16}$$

και ισότητα μπορεί να ισχύει μόνο αν $\lambda_k = \langle x, e_k\rangle$ για κάθε $k = 1, \dots, n$, δηλαδή αν $y = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k\rangle e_k$. □

*Σημείωση.* Παρατηρήστε επίσης ότι

$$\begin{aligned}\|x\|^2 &= \left\| x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k\rangle e_k \right\|^2 + \left\| \sum_{k=1}^n \langle x, e_k\rangle e_k \right\|^2 \\ &= \left\| x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k\rangle e_k \right\|^2 + \sum_{k=1}^n |\langle x, e_k\rangle|^2.\end{aligned}$$

Το επόμενο θεώρημα δίνει ισοδύναμους χαρακτηρισμούς του ότι η $(e_n)$ είναι ορθοκανονική βάση.

**Θεώρημα 7.1.15.** *Έστω $(e_k)$ ορθοκανονική ακολουθία σε έναν χώρο Hilbert $H$. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(α) *Η $(e_k)$ είναι ορθοκανονική βάση του $H$.*

(β) *Αν $x \in H$ και $\langle x, e_k\rangle = 0$ για κάθε $k$, τότε $x = 0$.*

(γ) *Αν $x \in H$ και $s_n(x) = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k\rangle e_k$, τότε $s_n(x) \to x$. Δηλαδή,*

$$x = \sum_k \langle x, e_k\rangle e_k. \tag{7.1.17}$$

(δ) *Ισχύει η ισότητα του Parseval: για κάθε $x \in H$,*

$$\sum_{k=1}^\infty |\langle x, e_k\rangle|^2 = \|x\|^2. \tag{7.1.18}$$

*Απόδειξη.* (α) $\Longrightarrow$ (β) Έστω $x \in H$. Αφού ο $F = \mathrm{span}\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ είναι πυκνός, υπάρχει ακολουθία $(y_n) \in F$ με $y_n \to x$. Από την υπόθεση έχουμε $x \perp y$ για κάθε $y \in F$. Τότε, $0 = \langle x, y_n \rangle \to \langle x, x \rangle$. Άρα, $\langle x, x \rangle = 0$, το οποίο σημαίνει ότι $x = 0$.

(β) $\Longrightarrow$ (γ) Παρατηρούμε πρώτα ότι $x - s_n(x) \perp s_n(x)$: πράγματι,

$$\langle x, s_n(x) \rangle = \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 = \|s_n(x)\|^2 = \langle s_n(x), s_n(x) \rangle. \tag{7.1.19}$$

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα παίρνουμε

$$\|x\|^2 = \|x - s_n(x)\|^2 + \|s_n(x)\|^2 = \|x - s_n(x)\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2. \tag{7.1.20}$$

Συνεπώς. $\sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leqslant \|x\|^2$ για κάθε $n$, και αφήνοντας το $n \to \infty$ παίρνουμε την ανισότητα Bessel

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leqslant \|x\|^2. \tag{7.1.21}$$

Ειδικότερα, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2$ συγκλίνει, και από την

$$\|s_m(x) - s_n(x)\|^2 = \sum_{k=n+1}^{m} |\langle x, e_k \rangle|^2 \tag{7.1.22}$$

η οποία ισχύει για κάθε $m > n$, έπεται ότι η $\{s_n(x)\}$ είναι ακολουθία Cauchy. Αφού ο $H$ είναι πλήρης, υπάρχει $y \in H$ ώστε $s_n(x) \to y$. Από την σύγκλιση αυτή βλέπουμε ότι $\langle x-y, e_k]rangle = 0$ για κάθε $k$, και η υπόθεσή μας (το (β)) εξασφαλίζει ότι

$$x = y = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k. \tag{7.1.23}$$

(γ) $\Longrightarrow$ (δ) Έστω $x \in H$. Ελέγξαμε ότι $\|x\|^2 = \|x - s_n(x)\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2$ για κάθε $n$. Αφού $\|x - s_n(x)\| \to 0$, έπεται ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 = \|x\|^2. \tag{7.1.24}$$

(δ) $\Longrightarrow$ (α) Έστω $x \in H$. Ελέγξαμε ότι $\|x\|^2 = \|x - s_n(x)\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2$ για κάθε $n$. Αφού $\sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 \to \|x\|^2$, έπεται ότι $\|x - s_n(x)\| \to 0$. Δηλαδή, $s_n(x) \to x$. Αφού κάθε $s_n(x) \in \mathrm{span}\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$, έπεται ότι

$$H = \overline{\mathrm{span}}\{e_k : k \in \mathbb{N}\}. \tag{7.1.25}$$

Δηλαδή, η $\{e_k\}$ είναι ορθοκανονική βάση του $H$. $\square$

## 7.2 Σύγκλιση στον $L_2(\mathbb{T})$

Εφαρμόζουμε τα αποτελέσματα της προηγούμενης παραγράφου στην $L_2$-σύγκλιση των σειρών Fourier. Το ερώτημα είναι αν για κάθε $f \in L_2(\mathbb{T})$ ισχύει

$$\|s_n(f) - f\|_2 \to 0 \ \text{ καθώς το } \ n \to \infty. \tag{7.2.1}$$

Υπενθυμίζουμε ότι ο $L^2(\mathbb{T})$ είναι χώρος Hilbert. Η $\|\cdot\|_2$ επάγεται από το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x)\overline{g(x)}\,dx. \tag{7.2.2}$$

**Λήμμα 7.2.1.** *Η ακολουθία $\{e^{ikx}\}_{k=-\infty}^{\infty}$ είναι ορθοκανονική βάση στον $L^2(\mathbb{T})$.*

*Απόδειξη.* Έχουμε δεί ότι

$$\langle e^{ikx}, e^{isx}\rangle = \delta_{k,s} \tag{7.2.3}$$

για κάθε $k, s \in \mathbb{Z}$, και από το Θεώρημα 6.3.10 έχουμε ότι αν $f \in L^2(\mathbb{T})$ και $\widehat{f}(k) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, τότε $f \equiv 0$. Ισοδύναμα, αν $\langle f, e^{ikx}\rangle = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ τότε $f = 0$. Το συμπέρασμα έπεται από το Θεώρημα 7.1.15. □

Άμεσο πόρισμα της γενικής θεωρίας των χώρων Hilbert είναι τώρα το εξής.

**Θεώρημα 7.2.2.** *Έστω $f \in L_2(\mathbb{T})$. Τότε,*

$$\|s_n(f) - f\|_2 \to 0 \ \text{ καθώς το } \ n \to \infty \tag{7.2.4}$$

*και*

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(x)|^2 dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2. \tag{7.2.5}$$

**Παρατήρηση 7.2.3.** Στην απόδειξη της $\|f\|_2^2 = \|f - s_n(f)\|_2^2 + \|s_n(f)\|_2^2$ χρησιμοποιήθηκε μόνο το γεγονός ότι το $\{e^{ik\vartheta} : |k| \leqslant n\}$ είναι ορθοκανονικό. Με το ίδιο επιχείρημα μπορείτε εύκολα να ελέγξετε ότι: αν θεωρήσουμε οποιοδήποτε όρθοκανονικό σύνολο $E = \{e_k : k \in \mathbb{Z}\}$ συναρτήσεων στον $L_2(\mathbb{T})$ και αν, για τυχόν $n$, θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f_n = \sum_{k=-n}^{n} \langle f, e_k\rangle e_k$, τότε

$$\|f\|_2^2 = \|f - f_n\|_2^2 + \|f_n\|_2^2 = \sum_{k=-n}^{n} |\langle f, e_k\rangle|^2. \tag{7.2.6}$$

Συνεπώς,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\langle f, e_k\rangle|^2 \leqslant \|f\|_2^2, \tag{7.2.7}$$

για κάθε ορθοκανονικό σύνολο $E = \{e_k : k \in \mathbb{Z}\} \subset \mathcal{R}$. Αυτή είναι η (γενική) **ανισότητα του Bessel**. Ισότητα στην ανισότητα του Bessel ισχύει για κάθε $f \in L_2(\mathbb{T})$, ακριβώς όταν το $E$ είναι ορθοκανονική βάση του $L_2(\mathbb{T})$, δηλαδή

$$\lim_{n\to\infty} \left\| f - \sum_{k=-n}^{n} \langle f, e_k\rangle e_k \right\|_2 = 0 \tag{7.2.8}$$

για κάθε $f \in L_2(\mathbb{T})$.

**Θεώρημα 7.2.4** (Riesz-Fisher). *Ο $L_2(\mathbb{T})$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $\ell_2(\mathbb{Z})$.*

*Απόδειξη.* Ορίζουμε $T : L_2(\mathbb{T}) \to \ell_2(\mathbb{Z}$ με

$$T(f) = \{\widehat{f}(k)\}_{k=-\infty}^{\infty}. \tag{7.2.9}$$

Ο $T$ είναι καλά ορισμένος, γιατί

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2 = \|f\|_2^2 < +\infty \tag{7.2.10}$$

από την ταυτότητα του Parseval, άρα $T(f) \in \ell_2(\mathbb{Z})$. Η γραμμικότητα του $T$ ελέγχεται εύκολα.

Η ταυτότητα του Parseval δείχνει επιπλέον ότι

$$\|T(f)\|_{\ell_2(\mathbb{Z}} = \|f\|_2 \tag{7.2.11}$$

για κάθε $f \in L_2(\mathbb{T})$, άρα ο $T$ είναι ισομετρία (ειδικότερα, είναι ένα προς ένα).

Δείχνουμε τέλος ότι ο $T$ είναι επί: έστω $\{a_k\}_{k=-\infty}^{\infty} \in \ell_2(\mathbb{Z})$. Ορίζουμε $f_N(x) = \sum_{k=1}^{N} a_k e^{ikx}$. Τότε, αν $N > M$ έχουμε

$$\|f_N - f_M\|_2^2 = \sum_{k=M+1}^{N} a_k^2 \to 0 \tag{7.2.12}$$

καθώς $N, M \to \infty$, και αυτό δείχνει ότι η $(f_N)$ είναι ακολουθία Cauchy στον $L_2(\mathbb{T})$. Ο $L_2(\mathbb{T})$ είναι πλήρης, άρα υπάρχει $f \in L_2(\mathbb{T})$ ώστε $f_N \to f$. Αφού

$$\|f - f_N\|_1 \leqslant \|f - f_N\|_2 \to 0, \tag{7.2.13}$$

είναι εύκολο να δούμε (άσκηση του Κεφαλαίου 5) ότι

$$\widehat{f_N})(k) \to \widehat{f}(k) \tag{7.2.14}$$

(και μάλιστα ομοιόμορφα ως προς $k$). Όμως, για κάθε $N > |k|$ ισχύει $\widehat{f}(k) = a_k$, από τον ορισμό των $f_N$. Συνεπώς,

$$\widehat{f}(k) = a_k, \qquad k \in \mathbb{Z} \tag{7.2.15}$$

το οποίο αποδεικνύει ότι $T(f) = \{a_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$. □

**Παρατήρηση 7.2.5.** Άμεση συνέπεια της ταυτότητας του Parseval είναι το Λήμμα Riemann-Lebesgue για τον $L_2(\mathbb{T})$. Για κάθε $f \in L_2(\mathbb{T})$ έχουμε

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2 < +\infty, \tag{7.2.16}$$

άρα

$$\lim_{|k|\to\infty} \widehat{f}(k) = 0. \tag{7.2.17}$$

Συχνά, χρησιμοποιούμε το Λήμμα Riemann-Lebesgue στην εξής μορφή: αν η $f \in L_2(\mathbb{T})$ είναι ολοκληρώσιμη, τότε

$$a_k(f) = \int_{\mathbb{T}} f(x)\cos(kx)\,d\lambda(x) \to 0 \quad \text{και} \quad b_k(f) = \int_{\mathbb{T}} f(x)\sin(kx)\,d\lambda(x) \to 0 \tag{7.2.18}$$

όταν $k \to \infty$. Από τις σχέσεις που συνδέουν τους $\widehat{f}(k)$, $a_k(f)$ και $b_k(f)$, ελέγχουμε εύκολα ότι η πρόταση «$a_k(f) \to 0$ και $b_k(f) \to 0$ όταν $k \to \infty$» είναι ακριβώς ισοδύναμη με την «$\widehat{f}(k) \to 0$ όταν $|k| \to \infty$» (εξηγήστε γιατί).

Κλείνουμε αυτήν την παράγραφο με μια γενίκευση της ταυτότητας του Parseval.

**Πρόταση 7.2.6.** *Έστω $f, g \in L_2(\mathbb{T})$. Τότε,*

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x)\overline{g(x)}\,d\lambda(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)\overline{\widehat{g}(k)}. \tag{7.2.19}$$

*Απόδειξη.* Χρησιμοποιούμε την παρατήρηση ότι αν $X$ είναι ένας γραμμικός χώρος πάνω από το $\mathbb{C}$ με εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$, τότε

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\big[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\big]. \tag{7.2.20}$$

Έχουμε

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{4}\big[\|f+g\|_2^2 - \|f-g\|_2^2 + i\|f+ig\|_2^2 - i\|f-ig\|_2^2\big] \tag{7.2.21}$$

και

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)\overline{\widehat{g}(k)} = \frac{1}{4}\big[\|\widehat{f}(k)+\widehat{g}(k)\|^2 - \|\widehat{f}(k)-\widehat{g}(k)\|^2 + i\|\widehat{f}(k)+i\widehat{g}(k)\|^2 - i\|\widehat{f}(k)-i\widehat{g}(k)\|^2\big]. \tag{7.2.22}$$

Το συμπέρασμα προκύπτει άμεσα, αν εφαρμόσουμε την ταυτότητα του Parseval για τις $f+g$, $f-g$, $f+ig$ και $f-ig$. $\square$

## 7.3 Ασκήσεις

### Ομάδα Α΄

**1.** (α) Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = |x|$ και την ταυτότητα του Parseval, δείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96} \qquad \text{και} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

(β) Χρησιμοποιώντας την $2\pi$-περιοδική περιττή συνάρτηση $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = x(\pi - x)$ στο $[0, \pi]$ και την ταυτότητα του Parseval, δείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^6} = \frac{\pi^6}{960} \qquad \text{και} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

**2.** Δείξτε ότι: αν $\alpha \notin \mathbb{Z}$, τότε η σειρά Fourier της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} e^{i(\pi - x)\alpha}$$

στο $[0, 2\pi]$, είναι η

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k+\alpha}.$$

Εφαρμόζοντας την ταυτότητα του Parseval, συμπεράνατε ότι

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(k+\alpha)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi\alpha)}.$$

**3.** Έστω $0 < a \leqslant \pi$. Θεωρούμε την συνάρτηση $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \chi_{[-a,a]}(x)$.

(α) Δείξτε ότι $\widehat{f}(0) = \frac{a}{\pi}$ και $\widehat{f}(k) = \frac{\sin(ka)}{\pi k}$ αν $k \neq 0$.

(β) Δείξτε ότι για κάθε $x \in [-\pi, \pi] \setminus \{-a, a\}$ ισχύει

$$f(x) = \frac{a}{\pi} + \sum_{k \neq 0} \frac{\sin(ka)}{\pi k} e^{ikx}.$$

(γ) Υπολογίστε τα αθροίσματα

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(ka)}{k} \quad \text{και} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2(ka)}{k^2}.$$

**4.** Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη $2\pi$-περιοδική συνάρτηση.

(α) Δείξτε ότι

$$\|f - s_n(f)\|_\infty \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|a_k(f')| + |b_k(f')|}{k}.$$

(β) Δείξτε ότι

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt{n} \|f - s_n(f)\|_\infty = 0.$$

**5.** Έστω $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση.

(α) Δείξτε ότι υπάρχει σταθερά $C(f) > 0$ ώστε $|k\widehat{f}(k)| \leqslant C(f)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

(β) Εξετάστε αν $\lim\limits_{|k| \to \infty} |k\widehat{f}(k)| = 0$.

(γ) Εξετάστε αν $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)| < +\infty$.

**6.** Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη $2\pi$-περιοδική συνάρτηση με

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = 0.$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα του Parseval για τις $f$ και $f'$ δείξτε ότι

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx,$$

με ισότητα αν και μόνο αν $f(x) = a\cos x + b\sin x$ για κάποιους $a, b \in \mathbb{R}$.

**7.** (α) Έστω $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι $\int_0^{2\pi} g(t)\,dt = 0$. Δείξτε ότι

$$\left| \int_0^{2\pi} \overline{f(t)} g(t)\,dt \right|^2 \leqslant \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \int_0^{2\pi} |g'(t)|^2 dt.$$

(β) Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(a) = f(b) = 0$. Δείξτε ότι

$$\int_a^b |f(t)|^2 dt \leqslant \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_a^b |f'(t)|^2 dt.$$

### Ομάδα Β΄

**8.** Δώστε παράδειγμα ακολουθίας $\{f_n\}$ ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f_n : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ ώστε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f_n(x)|^2 dx = 0,$$

αλλά για κάθε $x \in [0, 2\pi]$ η ακολουθία $\{f_n(x)\}$ δεν συγκλίνει.

**9.** Δείξτε ότι

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}.$$

**10.** Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ συνάρτηση $2\pi$-περιοδική, η οποία ικανοποιεί την συνθήκη Lipshitz

$$|f(x) - f(y)| \leqslant K|x - y|$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, όπου $K > 0$ σταθερά.

(α) Για κάθε $t > 0$ ορίζουμε $g_t(x) = f(x+t) - f(x-t)$. Δείξτε ότι

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g_t(x)|^2 dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 4|\sin kt|^2 |\widehat{f}(k)|^2$$

και συμπεράνατε ότι

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\sin kt|^2 |\widehat{f}(k)|^2 \leqslant K^2 t^2.$$

(β) Έστω $p \in \mathbb{N}$. Επιλέγοντας $t = \pi/2^{p+1}$, δείξτε ότι

$$\sum_{2^{p-1} < |k| \leqslant 2^p} |\widehat{f}(k)|^2 \leqslant \frac{K^2\pi^2}{2^{2p+1}}.$$

(γ) Δώστε άνω φράγμα για το
$$\sum_{2^{p-1}<|k|\leqslant 2^p} |\widehat{f}(k)|$$
και συμπεράνατε ότι η σειρά Fourier της $f$ συγκλίνει απολύτως, άρα ομοιόμορφα.

**11.** Έστω $\alpha > 1/2$ και $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ συνάρτηση $2\pi$-περιοδική, η οποία ικανοποιεί την συνθήκη Hölder
$$|f(x) - f(y)| \leqslant K|x-y|^\alpha$$
για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, όπου $K > 0$ σταθερά. Δείξτε ότι η σειρά Fourier της $f$ συγκλίνει απολύτως, άρα ομοιόμορφα.

**12.** Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής $2\pi$-περιοδική συνάρτηση και έστω $a_k, b_k$ οι συντελεστές Fourier της $f$. Δείξτε ότι
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\pi - x) f(x)\, dx = \sum_{k=1}^\infty \frac{b_k}{k}.$$

**13.** Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής $2\pi$-περιοδική συνάρτηση και έστω $a_k, b_k$ οι συντελεστές Fourier της $f$. Δείξτε ότι
$$\sum_{k=1}^\infty \frac{a_k}{k} = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right)\, dx.$$

**14.** Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Υποθέτουμε ότι
$$\sum_{n=1}^\infty [w_1(f, \pi/n)]^2 < \infty,$$
όπου
$$w_1(f, x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(x+t) - f(t)|\, dt.$$
Δείξτε ότι $f \in L^2(\mathbb{T})$.

**15.** Έστω $f \in L^2(\mathbb{T})$. Ορίζουμε
$$F(x) = \left(\sum_{n=1}^\infty \frac{|s_n(f,x) - \sigma_n(f,x)|^2}{n}\right)^{1/2}.$$
Δείξτε ότι $F \in L^2(\mathbb{T})$ και $\|F\|_2 \leqslant \|f\|_2$. Ειδικότερα, $F(x) < \infty$ σχεδόν παντού στο $\mathbb{T}$.

**16.** Έστω $x_n, y_m \in \mathbb{C}$, $n, m \geqslant 0$. Δείξτε ότι
$$\left|\sum_{n,m=0}^\infty \frac{x_n y_m}{n+m+1}\right| \leqslant \pi \left(\sum_{n=0}^\infty |x_n|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{m=0}^\infty |y_m|^2\right)^{1/2}.$$

*Υπόδειξη.* Θεωρήστε την $\varphi(t) = i(\pi - t)e^{-it}$. Παρατηρήστε ότι $\widehat{\varphi}(k) = \frac{1}{k+1}$ και $\|\varphi\|_\infty = \pi$.