Ανάλυση Fourier και Ολοκλήρωμα Lebesgue – 3ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

(παραδίδετε 7 από τις ασκήσεις – ημερομηνία παράδοσης: Τρίτη 16-4-2019)

1. Έστω $0 < p < q \leqslant \infty$. Δώστε παραδείγματα μετρήσιμων συναρτήσεων $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ οι οποίες ανήκουν στον $L^r(\mathbb{R})$ αν και μόνο αν (i) $p < r < q$, (ii) $p \leqslant r \leqslant q$, (iii) $r = p$.

2. Έστω $f : \mathbb{R} \to [-\infty, \infty]$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:

(α) Υπάρχει $1 \leqslant p < \infty$ τέτοιος ώστε $f \in L^p(I)$ για κάθε φραγμένο διάστημα $I \subset \mathbb{R}$,

(β) Υπάρχει σταθερά $0 < \alpha < 1$ τέτοια ώστε

$$\Big|\int_I f\Big|^p \leqslant \alpha\lambda(I)^{p-1}\int_I |f|^p$$

για κάθε φραγμένο διάστημα $I \subset \mathbb{R}$.

Αποδείξτε ότι $f = 0$ σχεδόν παντού.

3. Έστω $1 < p < \infty$ και $f, g \in L^p(\mathbb{R})$ μη αρνητικές συναρτήσεις οι οποίες ικανοποιούν την

$$\lambda(\{g > \alpha\}) \leqslant \frac{1}{\alpha}\int_{\{g>\alpha\}} f\,d\lambda$$

για κάθε $\alpha > 0$. Αποδείξτε ότι

$$\|g\|_p \leqslant q\,\|f\|_p,$$

όπου q είναι ο συζυγής εκθέτης του p.

4. Έστω $1 < p < \infty$ και $f_n, f \in L^p(\mathbb{R})$ τέτοιες ώστε $\sup_n \|f_n\|_p < \infty$ και $f_n \to f$ σχεδόν παντού. Αποδείξτε ότι

$$\int_{\mathbb{R}} f_n g\,d\lambda \to \int_{\mathbb{R}} fg\,d\lambda$$

για κάθε $g \in L^q(\mathbb{R})$, όπου q είναι ο συζυγής εκθέτης του p.

5. Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $0 < \lambda(E) < \infty$ και $f : E \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $p > 0$ και σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε $\lambda(\{x \in E : |f(x)| \geqslant t\}) \leqslant C/t^p$ για κάθε $t > 0$. Αποδείξτε ότι $f \in L^r(E)$ για κάθε $0 < r < p$.

Υπόδειξη: Γνωρίζουμε ότι

$$\int |f|^r = \int_0^\infty rt^{r-1}\lambda(\{|f| \geqslant t\})dt.$$

6. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: υπάρχει $C_1 > 0$ ώστε, για κάθε $t > 0$,

$$\lambda(\{x : |f(x)| \geqslant t\}) \leqslant \frac{C_1}{t^2}.$$

Αποδείξτε ότι: υπάρχει $C_2 > 0$ ώστε, για κάθε μετρήσιμο E με $0 < \lambda(E) < \infty$,

$$\int_E |f(x)|\,dx \leqslant C_2\sqrt{\lambda(E)}.$$

7. Έστω E, F Lebesgue μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με $0 < \lambda(E), \lambda(F) < \infty$.

(i) Αποδείξτε ότι η $\chi_E * \chi_F$ είναι συνεχής συνάρτηση.

(ii) Αποδείξτε ότι υπάρχουν $t_0 \in \mathbb{R}$ και $\varepsilon > 0$ ώστε: αν $|t - t_0| < \varepsilon$ τότε $\lambda(E \cap (F + t)) > 0$.

8. Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη με

$$(*) \qquad \int_0^1 |f_n(t)|^3 \, dt \leqslant 1$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(α) Αποδείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $E \subseteq [0,1]$ Lebesgue μετρήσιμο με $\lambda(E) < \delta$ τότε $\int_E |f_n(t)| \, dt < \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(β) Δείξτε με ένα παράδειγμα ότι το συμπέρασμα του (α) δεν ισχύει αν η $(*)$ αντικατασταθεί από την $\int_0^1 |f_n(t)| \, dt \leqslant 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

9. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε σαν «ουσιώδες πεδίο τιμών» της f το σύνολο R_f όλων των $a \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει το εξής: για κάθε $\varepsilon > 0$,

$$\lambda(\{x \in \mathbb{R} : |f(x) - a| < \varepsilon\}) > 0.$$

(α) Αποδείξτε ότι το R_f είναι κλειστό σύνολο.

(β) Αν $f \in L^\infty$, αποδείξτε ότι το R_f είναι συμπαγές και ότι $\|f\|_\infty = \max\{|a| : a \in R_f\}$.

10. Έστω $g \in L^2([0,1])$ και $\alpha > 0$ ώστε

$$1 \leqslant \|g\|_2 \leqslant \frac{1}{\alpha} \|g\|_1.$$

Αποδείξτε ότι

$$\lambda(\{x \in [0,1] : |g(x)| \geqslant \alpha/2\}) \geqslant \frac{\alpha^2}{4}.$$