Ανάλυση Fourier και Ολοκλήρωμα Lebesgue
5 Μαρτίου 2012

1. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = (\pi - x)^2$ στο $[0, 2\pi]$ και την επεκτείνουμε σε μια 2π-περιοδική συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι

$$S[f](x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2}.$$

2. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ μια 2π-περιοδική συνάρτηση, Riemann ολοκληρώσιμη στο $[-\pi, \pi]$. Δείξτε ότι:

(α) Αν $f(x + \pi) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε $\widehat{f}(k) = 0$ για κάθε περιττό ακέραιο k.

(β) Αν η f παίρνει πραγματικές τιμές τότε $\overline{\hat{f}(k)} = \hat{f}(-k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Αν, επιπλέον, υποθέσουμε ότι η f είναι συνεχής, δείξτε ότι ισχύει και το αντίστροφο.

3. (α) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ μια 2π-περιοδική συνάρτηση, Riemann ολοκληρώσιμη στο $[-\pi, \pi]$, και έστω $k \neq 0$. Δείξτε ότι

$$\widehat{f}(k) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x + \pi/k)e^{-ikx}dx,$$

και συμπεράνατε ότι

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - f(x + \pi/k)]e^{-ikx}dx.$$

(β) Υποθέτουμε ότι η f ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz $|f(y) - f(x)| \leq M|y - x|$ για κάποια σταθερά $M > 0$ και για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Χρησιμοποιώντας το (α) δείξτε ότι υπάρχει $C > 0$ ώστε $|k\widehat{f}(k)| \leq C$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

4. Δίνονται $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n \in \{-1, 1\}$. Ορίζουμε $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ με $f(x) = \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k e^{ikx}$. Δείξτε ότι

$$\|f\|_\infty = \max\{|f(x)| : x \in [0, 2\pi]\} \geq \sqrt{n}.$$

5. Εξετάστε αν καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής (δώστε απόδειξη ή αντιπαράδειγμα):

(α) Αν $E_1, \ldots, E_n$ είναι μετρήσιμα υποσύνολα του $[0, 1]$ με $\sum_{k=1}^{n} \mu(E_k) > n - 1$ τότε $\mu\left(\bigcap_{k=1}^{n} E_k\right) > 0$.

(β) Αν A είναι μετρήσιμο υποσύνολο του $[0, 1]$ με $\mu(A) > 0$ τότε υπάρχουν $x, y \in A$ ώστε $x - y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

(γ) Αν $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση και $\left|\int_{[0,1]} f\right| = \int_{[0,1]} |f|$, τότε είτε $f \geq 0$ σχεδόν παντού στο $[0, 1]$ ή $f \leq 0$ σχεδόν παντού στο $[0, 1]$.

6. Έστω A και B μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ανοικτό $G \subseteq \mathbb{R}$ ώστε $A \subseteq G$ και $B \cap G = \emptyset$. Δείξτε ότι $\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$.

7. (α) Δώστε παράδειγμα μη μετρήσιμης συνάρτησης f με την ιδιότητα η f^2 να είναι μετρήσιμη.

(β) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μετρήσιμο και έστω $f : A \to \mathbb{R}$. Αν η f^2 είναι μετρήσιμη και το σύνολο $\{x \in A \mid f(x) > 0\}$ είναι μετρήσιμο, δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη.

8. Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και έστω $f_n, f : A \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις με $\|f_n - f\|_1 = \int_A |f_n - f| \to 0$. Υποθέτουμε επίσης ότι E_n, E είναι μετρήσιμα υποσύνολα του A και $\mu(E_n \triangle E) \to 0$. Δείξτε ότι

$$\int_{E_n} f_n d\mu \to \int_E f d\mu.$$

9. Έστω $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $g_n : (0, 1) \to \mathbb{R}$ με $g_n(x) = x^n f(x)$. Δείξτε ότι κάθε g_n είναι ολοκληρώσιμη και ότι $\lim_{n\to\infty} \int g_n = 0$.

Καλή Επιτυχία!