Ανάλυση Fourier και Ολοκλήρωμα Lebesgue (2011–12)
Υποδείξεις για το 5ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

1. (α) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι αν το B είναι σύνολο Borel, τότε το $f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in B\}$ είναι μετρήσιμο.

(β) Δείξτε ότι η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν για κάθε ανοιχτό $G \subseteq \mathbb{R}$ το $f^{-1}(G)$ είναι μετρήσιμο σύνολο.

Υπόδειξη. (α) Θεωρούμε την κλάση $\mathcal{A} = \{B \subseteq \mathbb{R} \mid f^{-1}(B) \text{ μετρήσιμο}\}$. Θέλουμε να δείξουμε ότι η σ-άλγεβρα των Borel του $\mathbb{R}$ περιέχεται στην $\mathcal{A}$. Γι' αυτό δείχνουμε διαδοχικά τα εξής:

(i) Η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα: Πράγματι· $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ μετρήσιμο, επομένως $\mathbb{R} \in \mathcal{A}$. Αν $B \in \mathcal{A}$ τότε $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus B) = \mathbb{R} \setminus f^{-1}(B)$ και εφόσον το $B \in \mathcal{A}$ έπεται ότι το $\mathbb{R} \setminus f^{-1}(B)$ είναι μετρήσιμο. Τέλος, αν $\{B_n\}$ ακολουθία στην $\mathcal{A}$, τότε $f^{-1}(\cup_{n=1}^{\infty} B_n) = \cup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(B_n)$ είναι μετρήσιμο αφού κάθε $f^{-1}(B_n)$ είναι μετρήσιμο.

(ii) Δείχνουμε ότι η $\mathcal{A}$ περιέχει τα ανοικτά: Αφού f μετρήσιμη το $f^{-1}((a,b)) = [f < b] \cap [f > a]$ είναι μετρήσιμο, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Δηλαδή, $(a,b) \in \mathcal{A}$. Όμως κάθε ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ γράφεται ως αριθμήσιμη (ξένη) ένωση ανοικτών διαστημάτων κι εφόσον η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα προκύπτει ότι περιέχει τα ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

Από τον ορισμό των Borel έπεται ότι $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{A}$. Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο.

(β) Αν για κάθε ανοιχτό $G \subseteq \mathbb{R}$ το $f^{-1}(G)$ είναι μετρήσιμο σύνολο, τότε για κάθε $a \in \mathbb{R}$ το σύνολο $\{f > a\} = f^{-1}((a,\infty))$ είναι μετρήσιμο. Άρα, η f είναι μετρήσιμη. Το αντίστροφο έπεται από το γεγονός ότι κάθε ανοικτό σύνολο G γράφεται σαν αριθμήσιμη ένωση ανοικτών διαστημάτων και το ότι, για κάθε διάστημα I το σύνολο $f^{-1}(I)$ είναι μετρήσιμο αν η f είναι μετρήσιμη.

2. (α) Δείξτε ότι αν η $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και η $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι Borel μετρήσιμη, τότε η $h \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι Borel μετρήσιμη.

(β) Χρησιμοποιώντας την συνάρτηση Cantor–Lebesgue βρείτε μια συνεχή συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και μια Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε η $h \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ να μην είναι Lebesgue μετρήσιμη.

Υπόδειξη. (α) Έστω $a \in \mathbb{R}$. Τότε, $(h \circ g)^{-1}((a,+\infty)) = g^{-1}(h^{-1}(a,+\infty))$. Όμως, η h είναι μετρήσιμη, άρα το $B = h^{-1}(a,+\infty)$ είναι Borel. Έπεται, ότι $g^{-1}(B)$ είναι επίσης Borel αφού g συνεχής.

(β) Έστω $\phi : [0,1] \to [0,1]$ η συνάρτηση Cantor–Lebesgue και ξαναλέμε ϕ την επέκτασή της σ' όλο το $\mathbb{R}$ με $\phi(x) = 1$ αν $x > 1$ ενώ $\phi(x) = 0$ αν $x < 0$. Ορίζουμε $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x + \phi(x)$. Έχουμε δει ότι $\mu(f(C)) = 1$, άρα υπάρχει $V \subseteq f(C)$ μη μετρήσιμο. Επίσης, το $A = f^{-1}(V)$ είναι μετρήσιμο. Παρατηρήστε ότι ορίζεται η $g = f^{-1}$, η οποία είναι συνεχής και $h = \chi_A$ η οποία είναι μετρήσιμη. Τότε, η $h \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δεν είναι μετρήσιμη αφού $\{x \mid (h \circ g)(x) > 0\} = V$.

3. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση.

(α) Δείξτε ότι η f απεικονίζει F_σ-σύνολα σε F_σ-σύνολα.

(β) Δείξτε ότι η f απεικονίζει μετρήσιμα σύνολα σε μετρήσιμα σύνολα αν και μόνο αν για κάθε $A \subset [a,b]$ με $\mu(A) = 0$ ισχύει $\mu(f(A)) = 0$.

Υπόδειξη. (α) Πρώτα δείχνουμε ότι η f απεικονίζει κλειστά υποσύνολα του $[a,b]$ σε κλειστά. Πράγματι· αν F κλειστό στο $[a,b]$, επειδή το $[a,b]$ είναι συμπαγές έπεται ότι το F είναι συμπαγές. Αφού η f είναι συνεχής παίρνουμε ότι το $f(F)$ είναι συμπαγές, άρα κλειστό. Αν τώρα $E = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$ είναι F_σ σύνολο, τότε κάθε E_n είναι κλειστό, οπότε το $f(E) = \cup_{n=1}^{\infty} f(E_n)$ είναι F_σ.

(β) Υποθέτουμε ότι αν $\mu(A) = 0$ τότε $\mu(f(A)) = 0$. Θα δείξουμε ότι η f απεικονίζει μετρήσιμα σε μετρήσιμα. Πράγματι· αν A μετρήσιμο, τότε γνωρίζουμε ότι υπάρχουν N και E μηδενικό σύνολο και F_σ-σύνολο αντίστοιχα, ώστε $A = E \cup N$. Τότε, $f(A) = f(E) \cup f(N)$. Αλλά, από το (α) το $f(E)$ είναι F_σ, ενώ από την υπόθεση το $f(N)$ είναι μηδενικό. Συνεπώς, το $f(A)$ είναι μετρήσιμο.
Αντίστροφα· έστω ότι η f απεικονίζει μετρήσιμα σε μετρήσιμα. Θα δείξουμε ότι απεικονίζει μηδενικά σύνολα σε μηδενικά. Έστω $A \subset [a,b]$ με $\mu(A) = 0$. Τότε, το $f(A)$ είναι μετρήσιμο. Αν είναι

$\mu(f(A)) > 0$ τότε υπάρχει $V \subset f(A)$ μη μετρήσιμο. Έστω $E = f^{-1}(V) \cap A$, το οποίο είναι προφανώς μετρήσιμο. Τότε, το $f(E) = V$ δεν είναι μετρήσιμο κι έχουμε αντίφαση.

4. Έστω E μη μετρήσιμο υποσύνολο του $(0,1)$. Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x\chi_E(x)$. Δείξτε ότι η f δεν είναι μετρήσιμη, αλλά για κάθε $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ το σύνολο $\{x : f(x) = \alpha\}$ είναι μετρήσιμο. Μπορείτε να βρείτε μη μετρήσιμη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ το σύνολο $\{x : g(x) = \alpha\}$ να είναι μετρήσιμο;

Υπόδειξη. Παρατηρούμε ότι $\{x \mid f(x) > 0\} = E$ το οποίο είναι μη μετρήσιμο. Παρ' όλα αυτά αν $a \neq 0$ διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(i) $a \in E$, τότε $[f = a] = \{a\}$, ενώ αν

(ii) $a \notin E$, τότε $[f = a] = \emptyset$,

δηλαδή σε κάθε περίπτωση το $[f = a]$ είναι μετρήσιμο.

Για το δεύτερο σκέλος μας αρκεί μία μη μετρήσιμη συνάρτηση g η οποία να είναι 1-1. (Πράγματι, τότε για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ το σύνολο $\{x : g(x) = \alpha\}$ θα είναι είτε μονοσύνολο είτε το κενό σύνολο, άρα θα είναι μετρήσιμο.) Για να κατασκευάσουμε μία τέτοια g, θυμόμαστε ότι υπάρχει μη μετρήσιμο υποσύνολο E_0 του $[0,1]$ με τις εξής ιδιότητες:

(i) το E_0 περιέχει ακριβώς έναν αντιπρόσωπο από κάθε κλάση που ορίζει η σχέση ισοδυναμίας $\sim$, όπου
$$x \sim y \Leftrightarrow x, y \in [0,1] \text{ και } x - y \in \mathbb{Q},$$

(ii) αν $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι μία αρίθμηση των ρητών του $[-1,1]$, τότε
$$[0,1] \subseteq \bigcup_n (E + q_n),$$

(iii) αν $n \neq m$ τότε $(E + q_n) \cap (E + q_m) = \emptyset$.

Από την πρώτη ιδιότητα το E_0 περιέχει ακριβώς έναν ρητό του $[0,1]$, άρα $E_0 \subset [0,1)$ ή $E_0 \subset (0,1]$. Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $E_0 \subset [0,1)$ και θέτουμε
$$E := \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (E_0 + n).$$

Τότε το E είναι μη μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ (αφού αν ήταν μετρήσιμο, τότε και το $E_0 = E \cap [0,1)$ θα ήταν μετρήσιμο, ενώ δεν είναι). Επίσης, αν $\{p_k : k \in \mathbb{Z}\}$ είναι μία αρίθμηση των ρητών του $[0,1)$, τότε
$$\mathbb{R} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (E + p_k).$$
Πράγματι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ το $x - \lfloor x \rfloor$ ανήκει στο $[0,1)$, άρα υπάρχει (μοναδικό) $y \in E_0$ ώστε να ισχύει $(x - \lfloor x \rfloor) - y \in \mathbb{Q}$. Αν $(x - \lfloor x \rfloor) - y \geq 0$, τότε $(x - \lfloor x \rfloor) - y = p_{k_x}$ για κάποιον ρητό p_{k_x} του $[0,1)$, επομένως
$$x = y + \lfloor x \rfloor + p_{k_x} \in E + p_{k_x}.$$
Αλλιώς, αν $(x - \lfloor x \rfloor) - y < 0$ τότε, αφού $(x - \lfloor x \rfloor), y \in [0,1)$, θά έχουμε ότι $(x - \lfloor x \rfloor) - y \in (-1,0)$ και άρα το $(x - \lfloor x \rfloor) - y + 1$ θα είναι κάποιος ρητός q_{k_x} του $[0,1)$. Τότε πάλι $x = y + \lfloor x \rfloor) - 1 + q_{k_x} \in E + q_{k_x}$. Μπορούμε επίσης να δείξουμε ότι για δύο διαφορετικούς ρητούς $p, q \in [0,1)$ ισχύει $(E + p) \cap (E + q) = \emptyset$, άρα κάθε πραγματικός αριθμός x ανήκει σε ακριβώς ένα απ' τα σύνολα $E + p_k$, $p_k \in [0,1) \cap \mathbb{Q}$.

Παρατηρούμε τώρα ότι αφού $\mathbb{R} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(E + p_k)$, το σύνολο E έχει τον ίδιο πληθάριθμο με το $\mathbb{R}$, άρα και τον ίδιο πληθάριθμο με το $[0,1)$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει 1-1 και επί συνάρτηση $h : E \to [0,1)$. Ορίζουμε 1-1 και επί συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ως εξής: για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει μοναδικός $p_k \in [0,1) \cap \mathbb{Q}$ ώστε να ισχύει $x \in E + p_k$, επομένως υπάρχουν μοναδικό $y \in E$ και μοναδικός ακέραιος $k \in \mathbb{Z}$ ώστε να ισχύει $x = y + p_k$. Ορίζουμε τότε $g(x) := h(y) + k \in [k, k+1)$. Έτσι η g ορίζεται καλά και είναι 1-1 (εξηγήστε γιατί). Επίσης η g δέν είναι μετρήσιμη αφού $g^{-1}([0,1)) = E$.

5. Εξετάστε αν καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής.

(α) Αν η $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη στο $(a, b-\epsilon)$ για κάθε $0 < \epsilon < b-a$, τότε η f είναι μετρήσιμη στο (a,b).

(β) Αν η $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και η $h : g([a,b]) \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη, τότε η $h \circ g$ είναι μετρήσιμη.

Υπόδειξη. (α) Σωστό. Έστω $k \in \mathbb{N}$ ώστε $1/k < b-a$. Ορίζουμε την ακολουθία συναρτήσεων $f_n = f \cdot \chi_{[a,b-\frac{1}{n+k}]}$. Παρατηρήστε ότι κάθε f_n είναι μετρήσιμη από την υπόθεση και $f_n \to f$ κατά σημείο. Άρα, η f είναι μετρήσιμη.

(β) Λάθος. Χρησιμοποιήστε την Άσκηση 2(β).

6. Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $0 < \mu(A) < \infty$. Αν η $f : A \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση, δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει μετρήσιμο $B \subseteq A$ ώστε: $\mu(A \setminus B) < \varepsilon$ και η $f|_B$ είναι φραγμένη.

Υπόδειξη. Αφού η f είναι μετρήσιμη, τα σύνολα $B_n := f^{-1}([-n,n])$ είναι μετρήσιμα υποσύνολα του A. Επίσης

$$A = f^{-1}(\mathbb{R}) = f^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[-n,n]\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n,$$

άρα, απ΄ την συνέχεια του μέτρου, $\mu(A) = \lim_n \mu(B_n)$. Έστω $\varepsilon > 0$, τότε μπορούμε να βρούμε $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ ώστε $\mu(B_{n_\varepsilon}) > \mu(A) - \varepsilon$. Όμως τότε $\mu(A \setminus B_{n_\varepsilon}) = \mu(A) - \mu(B_{n_\varepsilon}) < \varepsilon$, ενώ $f(B_{n_\varepsilon}) \subseteq [-n_\varepsilon, n_\varepsilon]$, δηλαδή η $f|_{B_{n_\varepsilon}}$ είναι φραγμένη.

7. Δείξτε ότι δεν υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $f(x) = \chi_{[0,1]}(x)$ σχεδόν παντού.

Υπόδειξη. Έστω συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(x) = \chi_{[0,1]}(x)$ σχεδόν παντού, δηλαδή υπάρχει σύνολο $A \subset \mathbb{R}$ με $\mu(A) = 0$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f(x) = \chi_{[0,1]}(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus A$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τα σύνολα $(1-\frac{1}{n}, 1), (1, 1+\frac{1}{n})$ έχουν μη μηδενικό μέτρο, άρα δεν μπορεί να είναι υποσύνολα του A. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε n μπορούμε να βρούμε $x_n \in (1-\frac{1}{n}, 1)$ και $y_n \in (1, 1+\frac{1}{n})$ με

$$f(x_n) = \chi_{[0,1]}(x_n) = 1 \quad \text{και} \quad f(y_n) = \chi_{[0,1]}(y_n) = 0.$$

Όμως τότε $\lim_n f(x_n) = 1 \neq 0 = \lim_n f(y_n)$, που σημαίνει ότι η f είναι ασυνεχής στο 1.

8. Έστω (E_n) ακολουθία μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$.

(α) Αν $\mu(E_n) < \frac{1}{2^n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δείξτε ότι $\chi_{E_n}(x) \to 0$ σχεδόν παντού.

(β) Αν $\mu(E_n) \to 0$ είναι πάντα σωστό ότι $\chi_{E_n}(x) \to 0$ σχεδόν παντού;

Υπόδειξη. (α) Έστω $x \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\chi_{E_n}(x) \not\to 0$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν άπειροι δείκτες $n_1 < n_2 < \cdots$, τέτοιοι ώστε $\chi_{E_{n_i}}(x) = 1$, ή ισοδύναμα τέτοιοι ώστε $x \in E_{n_i}$. Έπεται ότι

$$\{x \in \mathbb{R} : \chi_{E_n}(x) \not\to 0\} = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq m} E_n = \limsup E_n.$$

Αφού $\mu(E_n) < \frac{1}{2^n}$, απ΄ το οποίο προκύπτει ότι $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n) < \infty$, έχουμε ότι $\mu(\limsup E_n) = 0$, άρα έχουμε το ζητούμενο.

(β) Όχι, δεν είναι πάντα σωστό. Ως παράδειγμα θεωρούμε την ακολουθία συνόλων

$$E_n := \begin{cases} [\frac{i-1}{2^m}, \frac{i}{2^m}], & \text{αν } n = 3^m 5^i,\ i = 1, \ldots, 2^m, \\ \emptyset, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

(όπου χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι κάθε φυσικός γράφεται με μοναδικό τρόπο ως γινόμενο πρώτων). Τότε $\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = 0$, αλλά για κάθε $x \in [0,1]$ υπάρχουν άπειροι δείκτες $n_1 < n_2 < \cdots$, ώστε $x \in E_{n_i}$, και άρα $\chi_{E_n}(x) \not\to 0$ για κάθε $x \in [0,1]$.

9. Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και έστω $f_n, f : E \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις ώστε $f_n \to f$ σχεδόν παντού. Δείξτε ότι υπάρχει αύξουσα ακολουθία (E_k) μετρήσιμων υποσυνόλων του E ώστε $f_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$ στο E_k για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και $\mu\left(E \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = 0$.

Υπόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι $\mu(E) < \infty$. Από την υπόθεση, υπάρχει $B \subseteq E$ με $\mu(B) = 0$ ώστε για κάθε $x \in E \setminus B$ να ισχύει $f(x) = \lim_n f_n(x)$. Για κάθε n, m θέτουμε

$$A_{n,m} := \left\{x \in E : |f_n(x) - f(x)| \leq \tfrac{1}{m}\right\}$$

(επειδή οι f_n, f είναι μετρήσιμες, το $A_{n,m}$ είναι μετρήσιμο σύνολο). Τότε για κάθε $x \in E \setminus B$ και για κάθε $m \in \mathbb{N}$, υπάρχει $n_{x,m}$ ώστε $x \in \bigcap_{n \geq n_{x,m}} A_{n,m}$, άρα

$$E \setminus B = \bigcup_{l \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq l} A_{n,m}.$$

Έπεται ότι $\lim_{l\to\infty} \mu\big(\bigcap_{n\geq l} A_{n,m}\big) = \mu(E \setminus B) = \mu(E)$, άρα για κάθε δ υπάρχει ένας ελάχιστος φυσικός $l_{m,\delta}$ τέτοιος ώστε

$$\mu\Bigg(\bigcap_{n \geq l_{m,\delta}} A_{n,m}\Bigg) > \mu(E) - \frac{\delta}{2^m}.$$

Αν θέσουμε $A_\delta := \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{n \geq l_{m,\delta}} A_{n,m}$, τότε έχουμε ότι $f_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$ στο A_δ, ενώ

$$\mu(A_\delta) = \mu(E) - \mu\Bigg(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} \Bigg(E \setminus \bigcap_{n\geq l_{m,\delta}} A_{n,m}\Bigg)\Bigg) > \mu(E) - \sum_{m\in\mathbb{N}} \frac{\delta}{2^m} = \mu(E) - \delta.$$

Αρκεί τώρα να θέσουμε $E_k := A_{1/k}$ για να έχουμε τα ζητούμενα της ασκήσεως.

Στην περίπτωση που έχουμε $\mu(E) = \infty$, θέτουμε $E'_k := E \cap [-k, k]$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, και όπως πριν βρίσκουμε μετρήσιμο σύνολο $A_k \subseteq E'_k$ τέτοιο ώστε $\mu(E'_k \setminus A_k) < \frac{1}{k}$ και $f_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$ στο A_k. Αν θέσουμε $E_k := \bigcup_{l\leq k} A_l$ έχουμε ότι η ακολουθία των συνόλων E_k είναι αύξουσα, ότι $\mu(E'_k \setminus E_k) \leq \mu(E'_k \setminus A_k) < \frac{1}{k}$ και ότι $f_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$ στο E_k. Θα δείξουμε επίσης ότι $\mu\left(E \setminus \bigcup_{k=1}^\infty E_k\right) = 0$. Έστω $x \in E \setminus \bigcup_{k=1}^\infty E_k$, τότε υπάρχει $k_x \in \mathbb{N}$ ώστε $x \in \bigcap_{k\geq k_x} E'_k = \bigcap_{k \geq k_x}(E \cap [-k, k])$. Αυτό σημαίνει ότι $x \in \bigcap_{k\geq k_x}(E'_k \setminus E_k)$, άρα

$$E \setminus \bigcup_{k=1}^\infty E_k \subseteq \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \left(\bigcap_{k\geq m} (E'_k \setminus E_k)\right).$$

Όμως για κάθε m και για κάθε $k \geq m$,

$$\mu\Bigg(\bigcap_{k\geq m} (E'_k \setminus E_k)\Bigg) \leq \mu(E'_k \setminus E_k) < \frac{1}{k},$$

το οποίο σημαίνει ότι για κάθε m, $\mu\big(\bigcap_{k\geq m}(E'_k \setminus E_k)\big) = 0$, και άρα $\mu\left(\bigcup_m \big(\bigcap_{k\geq m}(E'_k \setminus E_k)\big)\right) = 0$.

10. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι η f είναι περιοδική και έχει δύο περιόδους $s, t > 0$ των οποίων ο λόγος s/t είναι άρρητος. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή σχεδόν παντού.

Υπόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι μη αρνητική και φραγμένη. Ορίζουμε $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Για κάθε y της μορφής $y = kt + ms,\ k, m \in \mathbb{Z}$ έχουμε:

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x f(t+y)\,dt = \int_y^{x+y} f(t)\,dt = F(x+y) - F(y),$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Από το θεώρημα του Kronecker γνωρίζουμε ότι το σύνολο $D = \{kt + ms : k, m \in \mathbb{Z}\}$ είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$. Εφόσον, η F είναι συνεχής (εξηγήστε γιατί) και ικανοποιεί τη συναρτησιακή εξίσωση $F(x+y) = F(x) + F(y)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και για κάθε y σε ένα πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, έπεται ότι υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε $F(x) = \alpha x$. Έτσι,

$$F(x) - \alpha x = \int_0^x f(t)\,dt - \alpha x = \int_0^x (f(t) - \alpha)\,dt = 0,$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Από εδώ έπεται εύκολα ότι η $h(t) = f(t) - \alpha$ έχει ολοκλήρωμα μηδέν σε κάθε διάστημα κι άρα είναι μηδέν σχεδόν παντού.

Για τη γενική περίπτωση θεωρούμε τη συνάρτηση $f_1(t) = 1 + \frac{2}{\pi}\arctan f(t)$ για την οποία πρέπει πρώτα να παρατηρήσουμε ότι είναι μετρήσιμη και ότι $0 < f_1 < 2$.