Ανάλυση Fourier και Ολοκλήρωμα Lebesgue (2011–12)
3ο Φυλλάδιο Ασκήσεων – Υποδείξεις

1. Έστω $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Δείξτε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$(s_n(f)) * g = s_n(f * g) = f * (s_n(g)).$$

Υπόδειξη. Θυμηθείτε ότι $s_n(f) = (f * D_n)$ και ότι η πράξη $*$ της συνέλιξης είναι προσεταιριστική και αντιμεταθετική:

$$s_n(f) * g = (f * D_n) * g = f * (D_n * g) = f * (g * D_n) = f * s_n(g).$$

Όμοια δείχνουμε και την άλλη ισότητα.

2. Έστω $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια ακολουθία καλών πυρήνων. Δείξτε ότι: για κάθε $p > 1$,

$$\lim_{n\to\infty} \|K_n\|_p = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |K_n(x)|^p dx \right)^{1/p} = +\infty.$$

Υπόδειξη. Έστω $p > 1$ και q ο συζυγής εκθέτης του, δηλαδή $1/p + 1/q = 1$. Για κάθε $0 < \delta < \pi$ θεωρούμε τη συνάρτηση $g_\delta = \chi_{[-\delta,\delta]}$. Από την ανισότητα Hölder παίρνουμε

$$(\delta/\pi)^{1/q} \|K_n\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g_\delta(t)|^q \, dt \right)^{1/q} \|K_n\|_p \geq \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(x) g_\delta(x) \, dx \right|.$$

Από την άλλη πλευρά, από τις ιδιότητες των καλών πυρήνων παίρνουμε

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(x) g_\delta(x) \, dx \right| = \left| 1 - \frac{1}{2\pi} \int_{\delta < |x| \leq \pi} K_n(x) \, dx \right|.$$

Έστω $M > 0$. Υπάρχει $\delta \in (0, \pi)$ ώστε $(\pi/\delta)^{1/q} > 2M$. Επιπλέον, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n \geq n_0$ τότε $\left| \frac{1}{2\pi} \int_{\delta<|x|\leq\pi} K_n(x) \, dx \right| < 1/2$ (εξηγήστε γιατί). Συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω βλέπουμε ότι αν $n \geq n_0$ τότε

$$\|K_n\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |K_n(x)|^p \, dx \right)^{1/p} > M,$$

το οποίο δείχνει ότι $\|K_n\|_p \to +\infty$ καθώς $n \to \infty$.

3. Έστω $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση και έστω $x_0 \in \mathbb{T}$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f(x_0 - t) - f(x_0)| \leq M|t|$ για κάθε $t \in [-\pi, \pi]$. Δείξτε ότι

$$s_n(f)(x_0) \to f(x_0).$$

Υπόδειξη. Γνωρίζουμε ότι $s_n(f)(x_0) = (f * D_n)(x_0)$ όπου $D_n(t) = \frac{\sin(n+1/2)t}{\sin(t/2)}$ ο πυρήνας Dirichlet. Επιπλέον, από τη σχέση $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) \, dt = 1$ μπορούμε να γράψουμε:

$$s_n(f)(x_0) - f(x_0) \quad = \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x_0 - t) - f(x_0)] D_n(t) \, dt.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ με

$$F(t) = \begin{cases} \frac{f(x_0-t)-f(x_0)}{t}, & 0 < |t| \leq \pi \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$

(Στην πραγματικότητα μπορούμε να ορίσουμε την F όπως θέλουμε στο 0). Παρατηρήστε ότι για κάθε $\delta > 0$ (οσοδήποτε μικρό) η F είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$. Επιπλέον, από την Lipschitz συνθήκη της f στο x_0 έπεται ότι η F είναι φραγμένη στο $[-\pi, \pi]$ άρα και στην περιοχή του 0 επομένως, από το κριτήριο του Riemann έπεται ότι η F είναι ολοκληρώσιμη. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε

$$\begin{aligned} s_n(f)(x_0) - f(x_0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} tF(t)D_n(t)\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} tF(t)\frac{\sin(n+1/2)t}{\sin(t/2)}\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\frac{t}{\sin(t/2)}\cos(t/2)\sin nt\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} tF(t)\cos nt\,dt, \end{aligned}$$

γράφοντας $\sin(n+1/2)t = \sin nt\cos(t/2) + \cos nt\sin(t/2)$. Επειδή, η $g(t) = \frac{t}{\sin(t/2)}\cos(t/2)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[-\pi, \pi]$ το ζητούμενο έπεται από το λήμμα Riemann–Lebesgue (εξηγήστε γιατί).

4. (α) Έστω $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση και έστω $k \neq 0$. Δείξτε ότι

$$\widehat{f}(k) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\pi/k)e^{-ikx}dx,$$

και συμπεράνατε ότι

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - f(x+\pi/k)]e^{-ikx}dx.$$

(β) Υποθέτουμε ότι η f ικανοποιεί την συνθήκη Hölder $|f(x+h) - f(x)| \leq C|h|^{\alpha}$ για κάποιον $0 < \alpha \leq 1$, κάποια σταθερά $C > 0$ και για κάθε x, h. Χρησιμοποιώντας το (α) δείξτε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$|k|^{\alpha}|\widehat{f}(k)| \leq M$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

Υπόδειξη. (α) Παρατηρούμε ότι, με την αντικατάσταση $y = x + \frac{\pi}{k}$,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f\big(x+\frac{\pi}{k}\big)e^{-ikx}dx &= \int_{-\pi+\frac{\pi}{k}}^{\pi+\frac{\pi}{k}} f(y)e^{-ik\left(y-\frac{\pi}{k}\right)}dy = \int_{-\pi+\frac{\pi}{k}}^{\pi+\frac{\pi}{k}} f(y)e^{-iky}e^{i\pi}dy \\ &= -\int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-iky}dy = -2\pi\widehat{f}(k). \end{aligned}$$

Άρα,

$$\widehat{f}(k) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\pi/k)e^{-ikx}dx,$$

απ' όπου έπεται ότι

$$\begin{aligned} \widehat{f}(k) &= \frac{\widehat{f}(k)+\widehat{f}(k)}{2} = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx - \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\pi/k)e^{-ikx}dx \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - f(x+\pi/k)]e^{-ikx}dx. \end{aligned}$$

(β) Έστω $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Χρησιμοποιώντας το (α) και την συνθήκη Hölder γράφουμε

$$\begin{aligned} |\widehat{f}(k)| &\leq \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f(x+\pi/k)|\,dx \leq \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} C\left|\frac{\pi}{k}\right|^{\alpha} dx \\ &= \frac{C\pi^{\alpha}}{2|k|^{\alpha}} = \frac{M}{|k|^{\alpha}}, \end{aligned}$$

όπου $M = C\pi^{\alpha}/2$. Έπεται ότι $|k|^{\alpha}|\widehat{f}(k)| \leq M$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

5. Έστω $\{\varepsilon_k\}$ ακολουθία θετικών αριθμών με $\varepsilon_k \to 0$. Δείξτε ότι υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ με την ιδιότητα: για άπειρες τιμές του $k \in \mathbb{Z}$,

$$|\widehat{f}(k)| \geq \varepsilon_k.$$

Υπόδειξη. Αφού $\varepsilon_k \to 0$, μπορούμε να βρούμε υπακολουθία (ε_{s_k}) της (ε_k) ώστε

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_{s_k} < +\infty.$$

Θεωρούμε την σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_{s_k} e^{is_k x}.$$

Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του Weierstrass ελέγχουμε ότι συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνεχή συνάρτηση. Αν $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_{s_k} e^{is_k x}$, τότε

$$|\widehat{f}(s_k)| = \widehat{f}(s_k) = \varepsilon_{s_k}$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Δηλαδή, για άπειρες τιμές του $k \in \mathbb{Z}$ έχουμε $|\widehat{f}(k)| \geq \varepsilon_k$.

6. Δείξτε ότι η τριγωνομετρική σειρά

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin kx}{\sqrt{k}}$$

συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αλλά δεν είναι σειρά Fourier Riemann ολοκληρώσιμης συνάρτησης.

Υπόδειξη. Η σύγκλιση της σειράς προκύπτει από το κριτήριο dirichlet. Αν η παραπάνω σειρά είναι σειρά Fourier Riemann ολοκληρώσιμης συνάρτησης, τότε πρέπει από την ανισότητα του Bessel να έχουμε

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2 < +\infty.$$

Αλλά, $a_k = 0$ για $k = 0, 1, 2, \ldots$, $b_1 = 0$ και $b_k = k^{-1/2}$ για $k \geq 2$. Οπότε, θα έπρεπε η αρμονική σειρά $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}$ να συγκλίνει, άτοπο.

7. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση και έστω a_k, b_k οι συντελεστές Fourier της f. Δείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right)\, dx.$$

Υπόδειξη. Επεκτείνουμε την $\ln(2\sin\frac{x}{2})$ σε μια άρτια 2π-περιοδική συνάρτηση g στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι, γενικά,

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx = \frac{1}{2} a_0(f)a_0(g) + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f)a_k(g) + b_k(f)b_k(g)).$$

Αφού η g είναι άρτια, έχουμε $b_k(g) = 0$ για κάθε $k \geq 1$. Επίσης, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin u)du = -\frac{\pi}{2} \ln 2,$$

ελέγχουμε ότι $a_0(g) = 0$. Άρα,

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f)a_k(g).$$

Τέλος, για κάθε $k \geq 1$ έχουμε:

$$\begin{aligned} a_k(g) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln\left|2\sin\frac{x}{2}\right| \cos kx\, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \ln(2\sin\frac{x}{2}) \cos kx\, dx \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{2}{k\pi}\int_0^\pi \frac{\sin kx \cos\frac{x}{2}}{2\sin(x/2)}\,dx \\
&= -\frac{1}{k\pi}\int_0^\pi \frac{\sin(k+1/2)x+\sin(k-1/2)x}{2\sin(x/2)}\,dx \\
&= -\frac{1}{2k\pi}\int_{-\pi}^\pi \frac{D_k(x)+D_{k-1}(x)}{2}\,dx = -\frac{1}{k}.
\end{aligned}
$$

8. Έστω $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ περιττή ολοκληρώσιμη συνάρτηση ώστε $|f(x)|\leq M$ για κάθε $x\in[-\pi,\pi]$ και $b_k(f)\geq 0$ για κάθε $k\geq 1$. Δείξτε ότι

$$|s_n(f)(x)|\leq 5M$$

για κάθε $n\geq 1$ και για κάθε $x\in[-\pi,\pi]$.

Υπόδειξη. Στην άσκηση 6 του δευτέρου φυλλαδίου είδαμε ότι

$$|s_n(f)(x)-\sigma_{n+1}(f)(x)|\leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^n kb_k.$$

Επίσης, είναι εύκολο να δούμε ότι $|\sigma_n(f)(x)|\leq \|f\|_\infty\leq M$. Πράγματι· μπορούμε να γράψουμε

$$|\sigma_n(f)(x)|\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^\pi |f(x-t)|F_n(t)\,dt\leq M\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^\pi F_n(t)\,dt = M.$$

Επιπλέον, είναι $\sigma_{n+1}(f)(x)=\sum_{k=1}^n(1-\frac{k}{n+1})b_k\sin kx$. Οπότε, για $x_n=\pi/(4n)$ και $2n$ αντί n παίρνουμε

$$M\geq \sigma_{2n+1}(f)(x_n)=\sum_{k=1}^{2n}\left(1-\frac{k}{2n+1}\right)b_k\sin(kx_n)\geq \sum_{k=1}^{2n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)b_k\frac{k}{2n},$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει την ανισότητα $\sin x>(2/\pi)x$ για $0<x<\pi/2$ και το γεγονός ότι $b_k\geq 0$. Συνεπώς, είναι

$$2nM\geq \sum_{k=1}^{2n}\left(1-\frac{k}{2n+1}\right)kb_k\geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2}kb_k,$$

χρησιμοποιώντας ακόμη μια φορά το γεγονός ότι $b_k\geq 0$. Έτσι, καταλήγουμε στην

$$\sum_{k=1}^n kb_k\leq 4nM.$$

Συνδυάζοντας με τα παραπάνω βρίσκουμε:

$$|s_n(f)(x)|\leq |\sigma_{n+1}(f)(x)|+\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^n kb_k\leq M+\frac{4nM}{n+1}<5M,$$

το οποίο αποδεικνύει το ζητούμενο.

9. Έστω $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ άρτια ολοκληρώσιμη συνάρτηση με την ιδιότητα: $a_k(f)\geq 0$ για κάθε $k\geq 0$. Δείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^\infty a_k<+\infty.$$

Υπόδειξη. Αν θεωρήσουμε το n-οστό μερικό άθροισμα Cesàro της f τότε για κάθε $n\in\mathbb{N}$ μπορούμε να γράψουμε:

$$\sigma_{2n}(f)(0)=\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}s_k(f)(0)\geq \frac{1}{2n}\sum_{k=n+1}^{2n}s_k(f)(0)\geq \frac{1}{2}s_n(f)(0),$$

διότι $s_n(f)(0) = a_0/2 + a_1 + \ldots + a_n$ και $a_n \geq 0$ για κάθε n. Από την άλλη πλευρά γνωρίζουμε ότι $|\sigma_n(f)(x)| \leq \|f\|_\infty$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Έτσι, τα μερικά αθροίσματα της $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ είναι άνω φραγμένα:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \leq 4\|f\|_\infty,$$

που αποδεικνύει τη σύγκλιση της σειράς.

10. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια 2π-περιοδική συνάρτηση, η οποία ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz

$$|f(x) - f(y)| \leq M\,|x - y|$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ και κάποια σταθερά $M > 0$. Δείξτε ότι: υπάρχει σταθερά $C > 0$ ώστε

$$\|f - \sigma_n(f)\|_\infty \leq \frac{C \log n}{n}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Υπόδειξη. Αν $F_n(x) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin(nx)}{\sin(x/2)}\right)^2$ ο πυρήνας του Fejér τότε μπορούμε να γράψουμε $\sigma_n(f)(x) = (f * F_n)(x)$. Επομένως, αν $x \in \mathbb{R}$ τότε

$$\begin{aligned}
|\sigma_n(f)(x) - f(x)| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(x-t) - f(x)]F_n(t)\,dt\right| \\
&\leq \frac{M}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |t| F_n(t)\,dt \\
&\leq \frac{M}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|t|}{|\sin(t/2)|}\frac{\sin^2(nt)}{|\sin(t/2)|}\,dt,
\end{aligned}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει την συνθήκη Lipschitz για την f και το ότι η $\{F_n\}$ είναι οικογένεια καλών πυρήνων που παίρνει θετικές τιμές. Καθώς, η συνάρτηση $t \mapsto \frac{t}{\sin(t/2)}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, \pi)$, παίρνουμε $|\frac{t}{\sin(t/2)}| \leq \pi$ για κάθε $|t| \leq \pi$. Έτσι, βρίσκουμε:

$$\|\sigma_n(f) - f\|_\infty \leq \frac{M}{2n}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\sin nt}{\sin(t/2)}\right| dt,$$

διότι $|\sin nt| \leq 1$. Τέλος, αν μιμηθούμε την απόδειξη της

$$\|D_n\|_1 := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\,dt \leq C \log n,$$

μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\sin nt}{\sin(t/2)}\right| dt \leq C \log n$$

και το συμπέρασμα έπεται. Πράγματι· μπορούμε να γράψουμε, χρησιμοποιώντας την ανισότητα $\sin(t/2) > t/\pi$ για $0 < t < \pi$,

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\sin nt}{\sin(t/2)}\right| dt &\leq 2\pi\int_0^{\pi}\frac{|\sin(nt)|}{t}\,dt \\
&\leq 2\pi\int_0^{n\pi}\frac{|\sin t|}{t}\,dt \\
&\leq 2\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}\,dt + 2\pi\sum_{k=1}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin t|}{t}\,dt \\
&\leq 2\pi^2 + 2\pi\sum_{k=1}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin t|}{k\pi}\,dt \\
&\leq 2\pi^2 + 2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\int_0^{\pi}|\sin t|\,dt \\
&\leq 2\pi^2 + 4\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} \leq c \log n
\end{aligned}$$

για κάποια αριθμητική σταθερά $c > 0$. Έχουμε λοιπόν

$$\|\sigma_n(f) - f\|_\infty \leq c' M \frac{\log n}{n}.$$