Ανάλυση Fourier και Ολοκλήρωμα Lebesgue (2011–12)
6ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Παραδίδετε έξι από τις ασκήσεις του Φυλλαδίου 6 ως την Παρασκευή 2 Μαρτίου 2012.

1. Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει μετρήσιμο σύνολο E με $\mu(E) < \infty$, ώστε

$$\int_E f > \int f - \varepsilon.$$

Επιπλέον, δείξτε ότι το E μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε η f να είναι φραγμένη στο E.

2. Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν $\mu(E) < \delta$ τότε $\int_E f < \varepsilon$.

3. Έστω f μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k \mu(\{f > 2^k\}) < \infty.$$

4. Έστω f και f_n, $n \in \mathbb{N}$, μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις με $f_n \to f$ και

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f < \infty.$$

Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n = \int_E f$$

για κάθε μετρήσιμο σύνολο E.

5. Έστω f μετρήσιμη και σχεδόν παντού πεπερασμένη στο $[0,1]$.
(α) Αν $\int_E f = 0$ για κάθε μετρήσιμο $E \subset [0,1]$ με $\mu(E) = 1/2$, δείξτε ότι $f = 0$ σχεδόν παντού στο $[0,1]$.
(β) Αν $f > 0$ σχεδόν παντού, δείξτε ότι

$$\inf\left\{ \int_E f : \mu(E) \geq \frac{1}{2} \right\} > 0.$$

6. Έστω A μετρήσιμο σύνολο και έστω $f_n, f \in L_1(A)$ με $\|f_n - f\|_1 \to 0$. Υποθέτουμε επίσης ότι E_n, E είναι μετρήσιμα υποσύνολα του A και $\mu(E_n \triangle E) \to 0$. Δείξτε ότι

$$\int_{E_n} f_n d\mu \to \int_E f d\mu.$$

7. Έστω A μετρήσιμο σύνολο και έστω $1 \leq p < q < r < \infty$. Δείξτε ότι κάθε $f \in L_q(A)$ γράφεται στην μορφή $f = g + h$ για κάποιες $g \in L_p(A)$ και $h \in L_r(A)$.
Υπόδειξη. Θεωρήστε το $E = \{|f| > 1\}$ και τις $g = f\chi_E$, $h = f - g$.

8. Έστω A μετρήσιμο σύνολο με $0 < \mu(A) < \infty$ και έστω $1 \leq p < q < \infty$.

(α) Αν $f : A \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση, δείξτε ότι

$$\|f\|_q \leq \|f\|_p [\mu(A)]^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}.$$

(β) Δείξτε ότι $L_q(A) \subseteq L_p(A)$.

(γ) Δείξτε ότι $L_q(A) \neq L_p(A)$.

9. (α) Έστω A μετρήσιμο σύνολο, έστω $r \geq 1$ και έστω $f \in L_r(A)$. Δείξτε ότι

$$\int |f|^r = r\int_0^\infty t^{r-1}\mu(\{x \in A : |f(x)| > t\})\,dt.$$

(β) Έστω A μετρήσιμο σύνολο με $0 < \mu(A) < \infty$ και έστω $f : A \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $p > 0$ και σταθερά $C > 0$ ώστε $\mu(\{x \in A : |f(x)| \geq t\}) \leq C/t^p$ για κάθε $t > 0$. Δείξτε ότι $f \in L_r$ για κάθε $0 < r < p$.

10. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο 0. Αν $f \in L_1([0,1])$, δείξτε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η συνάρτηση

$$f_n(x) = f(x^n)$$

ανήκει στον $L_1([0,1])$.