Ανάλυση Fourier και Ολοκλήρωμα Lebesgue (2011–12)
5ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Παραδίδετε έξι από τις ασκήσεις του Φυλλαδίου 5 ως την Τετάρτη 8 Φεβρουαρίου 2012.

1. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι αν το B είναι σύνολο Borel, τότε το $f^{-1}(B)=\{x\in\mathbb{R}:f(x)\in B\}$ είναι μετρήσιμο.

(β) Δείξτε ότι η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν για κάθε ανοιχτό $G\subseteq\mathbb{R}$ το $f^{-1}(G)$ είναι μετρήσιμο σύνολο.

2. (α) Δείξτε ότι αν η $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και η $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι Borel μετρήσιμη, τότε η $h\circ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι Borel μετρήσιμη.

(β) Χρησιμοποιώντας την συνάρτηση Cantor–Lebesgue βρείτε μια συνεχή συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και μια Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε η $h\circ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ να μην είναι Lebesgue μετρήσιμη.

3. Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση.

(α) Δείξτε ότι η f απεικονίζει F_σ-σύνολα σε F_σ-σύνολα.

(β) Δείξτε ότι η f απεικονίζει μετρήσιμα σύνολα σε μετρήσιμα σύνολα αν και μόνο αν για κάθε $A\subset[a,b]$ με $\mu(A)=0$ ισχύει $\mu(f(A))=0$.

4. Έστω E μη μετρήσιμο υποσύνολο του $(0,1)$. Θεωρούμε την συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x\chi_E(x)$. Δείξτε ότι η f δεν είναι μετρήσιμη, αλλά για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ το σύνολο $\{x:f(x)=\alpha\}$ είναι μετρήσιμο. Μπορείτε να βρείτε μη μετρήσιμη συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ το σύνολο $\{x:g(x)=\alpha\}$ να είναι μετρήσιμο;

5. Εξετάστε αν καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής.

(α) Αν η $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη στο $(a,b-\epsilon)$ για κάθε $0<\epsilon<b-a$, τότε η f είναι μετρήσιμη στο (a,b).

(β) Αν η $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και η $h:g([a,b])\to\mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη, τότε η $h\circ g$ είναι μετρήσιμη.

6. Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $0<\mu(A)<\infty$. Αν η $f:A\to\mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση, δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει μετρήσιμο $B\subseteq A$ ώστε: $\mu(A\setminus B)<\varepsilon$ και η $f|_B$ είναι φραγμένη.

7. Δείξτε ότι δεν υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με την ιδιότητα $f(x)=\chi_{[0,1]}(x)$ σχεδόν παντού.

8. Έστω (E_n) ακολουθία μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$.

(α) Αν $\mu(E_n)<\frac{1}{2^n}$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$, δείξτε ότι $\chi_{E_n}(x)\to 0$ σχεδόν παντού.

(β) Αν $\mu(E_n)\to 0$ είναι πάντα σωστό ότι $\chi_{E_n}(x)\to 0$ σχεδόν παντού;

9. Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και έστω $f_n,f:E\to\mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις ώστε $f_n\to f$ σχεδόν παντού. Δείξτε ότι υπάρχει αύξουσα ακολουθία (E_k) μετρήσιμων υποσυνόλων του E ώστε $f_n\xrightarrow{\text{ομ}} f$ στο E_k για κάθε $k\in\mathbb{N}$ και $\mu\left(E\setminus\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\right)=0$.

10. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι η f είναι περιοδική και έχει δύο περιόδους $s,t>0$ των οποίων ο λόγος s/t είναι άρρητος. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή σχεδόν παντού.