Ανάλυση Fourier και Ολοκλήρωμα Lebesgue (2011–12)
4ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Παραδίδετε έξι από τις ασκήσεις του Φυλλαδίου 4 ως την Τετάρτη 25 Ιανουαρίου 2012.

1. Έστω $E \subset [a,b]$ με $\mu^*(E) = 0$. Δείξτε ότι το $[a,b] \setminus E$ είναι πυκνό υποσύνολο του $[a,b]$.

2. (α) Έστω E μετρήσιμο σύνολο με $\mu(E) < \infty$. Δείξτε ότι, για κάθε $F \supseteq E$,

$$\mu^*(F \setminus E) = \mu^*(F) - \mu(E).$$

(β) Δείξτε ότι: αν $E \subset \mathbb{R}$ με $\mu^*(E) < \infty$ και αν υπάρχει μετρήσιμο υποσύνολο F του E ώστε $\mu(F) = \mu^*(E)$, τότε το E είναι μετρήσιμο.

3. Έστω $A, B \subset \mathbb{R}$ ώστε

$$d(A,B) = \inf\{|x-y| : x \in A, y \in B\} > 0.$$

Δείξτε ότι

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

4. (α) Έστω $f : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση Lipschitz με σταθερά C, δηλαδή $|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|$ για κάθε $x, y \in B$. Δείξτε ότι

$$\mu^*(f(A)) \leq C\mu^*(A)$$

για κάθε $A \subseteq B$.

(γ) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\mu(A) = 0$. Δείξτε ότι το σύνολο $A' = \{x^2 \mid x \in A\}$ έχει επίσης μέτρο $\mu(A') = 0$.

Υπόδειξη: Εξετάστε πρώτα την περίπτωση όπου $A \subseteq [-M, M]$ για κάποιο $M > 0$.

5. Για κάθε φραγμένο $E \subset \mathbb{R}$ ορίζουμε

$$\mu_*(E) = \sup\{\mu^*(K) : K \text{ συμπαγές και } K \subseteq E\}.$$

(α) Δείξτε ότι για κάθε φραγμένο $E \subset \mathbb{R}$ ισχύει $\mu_*(E) \leq \mu^*(E)$.

(β) Δείξτε ότι αν E_1, E_2 είναι φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ και $E_1 \subseteq E_2$ τότε $\mu_*(E_1) \leq \mu_*(E_2)$.

(γ) Δείξτε ότι ένα φραγμένο υποσύνολο E του $\mathbb{R}$ είναι μετρήσιμο αν και μόνο αν $\mu^*(E) = \mu_*(E)$.

6. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι για κάθε Borel $B \subseteq \mathbb{R}$ το $f^{-1}(B)$ είναι σύνολο Borel.

7. Έστω A η ένωση όλων των διαστημάτων της μορφής $[x-\delta, x+\delta]$ με κέντρο x σημείο του συνόλου Cantor:

$$A = \bigcup_{x \in C} [x-\delta, x+\delta].$$

Βρείτε το $\mu(A)$.

8. Δείξτε ότι κάθε υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ με $\mu^*(A) > 0$ έχει μη μετρήσιμο υποσύνολο.

9. Έστω E το σύνολο των $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η ακολουθία $\{\sin(2^n x)\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει. Δείξτε ότι $\mu(E) = 0$.

Υπόδειξη. Δείξτε ότι αν $x, y \in E$ τότε $x + y \in E$. Υποθέτοντας ότι $\mu(E) > 0$ και χρησιμοποιώντας το λήμμα του Steinhaus καταλήξτε σε άτοπο.

10. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(0) = f(1)$. Θεωρούμε το σύνολο

$$A = \{t \in [0,1] : \text{ υπάρχει } x \in [0,1] \text{ ώστε } f(x+t) = f(x)\}.$$

(α) Δείξτε ότι το A είναι κλειστό, άρα μετρήσιμο.

(β) Αν $B = \{t \in [0,1] : 1-t \in A\}$, δείξτε ότι $A \cup B = [0,1]$.

(γ) Δείξτε ότι $\mu(A) \geq 1/2$.