Ανάλυση Fourier και Ολοκλήρωμα Lebesgue (2011–12)
3ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Παραδίδετε έξι από τις ασκήσεις του Φυλλαδίου 3 ως την Τετάρτη 11 Ιανουαρίου 2012.

1. Έστω $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Δείξτε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$(s_n(f)) * g = s_n(f * g) = f * (s_n(g)).$$

2. Έστω $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια ακολουθία καλών πυρήνων. Δείξτε ότι: για κάθε $p > 1$,

$$\lim_{n\to\infty} \|K_n\|_p = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |K_n(x)|^p dx \right)^{1/p} = +\infty.$$

3. Έστω $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση και έστω $x_0 \in \mathbb{T}$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f(x_0 - t) - f(x_0)| \leq M|t|$ για κάθε $t \in [-\pi, \pi]$. Δείξτε ότι

$$s_n(f)(x_0) \to f(x_0).$$

4. (α) Έστω $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση και έστω $k \neq 0$. Δείξτε ότι

$$\widehat{f}(k) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x + \pi/k) e^{-ikx} dx,$$

και συμπεράνατε ότι

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - f(x + \pi/k)] e^{-ikx} dx.$$

(β) Υποθέτουμε ότι η f ικανοποιεί την συνθήκη Hölder $|f(x+h) - f(x)| \leq C|h|^{\alpha}$ για κάποιον $0 < \alpha \leq 1$, κάποια σταθερά $C > 0$ και για κάθε x, h. Χρησιμοποιώντας το (α) δείξτε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$|k|^{\alpha} |\widehat{f}(k)| \leq M$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

5. Έστω $\{\varepsilon_k\}$ ακολουθία θετικών αριθμών με $\varepsilon_k \to 0$. Δείξτε ότι υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ με την ιδιότητα: για άπειρες τιμές του $k \in \mathbb{Z}$,

$$|\widehat{f}(k)| \geq \varepsilon_k.$$

6. Δείξτε ότι η τριγωνομετρική σειρά

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin kx}{\sqrt{k}}$$

συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αλλά δεν είναι σειρά Fourier Riemann ολοκληρώσιμης συνάρτησης.

7. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση και έστω a_k, b_k οι συντελεστές Fourier της f. Δείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \ln\left(2 \sin \frac{x}{2}\right) dx.$$

8. Έστω $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ περιττή ολοκληρώσιμη συνάρτηση ώστε $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [-\pi, \pi]$ και $b_k(f) \geq 0$ για κάθε $k \geq 1$. Δείξτε ότι

$$|s_n(f)(x)| \leq 5M$$

για κάθε $n \geq 1$ και για κάθε $x \in [-\pi, \pi]$.

9. Έστω $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ άρτια ολοκληρώσιμη συνάρτηση με την ιδιότητα: $a_k(f) \geq 0$ για κάθε $k \geq 0$. Δείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k < +\infty.$$

Υπόδειξη: $s_n(f)(0) = (a_0/2) + a_1 + \cdots + a_n$.

10. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια 2π-περιοδική συνάρτηση, η οποία ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz

$$|f(x) - f(y)| \leq M\,|x - y|$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ και κάποια σταθερά $M > 0$. Δείξτε ότι: υπάρχει σταθερά $C > 0$ ώστε

$$\|f - \sigma_n(f)\|_\infty \leq \frac{C \log n}{n}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.