Ανάλυση Fourier και Ολοκλήρωμα Lebesgue (2011–12)
1ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Παραδίδετε έξι από τις ασκήσεις του Φυλλαδίου 1 ως την Τετάρτη 7 Δεκεμβρίου 2011.

1. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = |x|$ και $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } -\pi < x < 0 \\ -1 & \text{αν } 0 < x < \pi \\ 0 & \text{αν } x \in \{-\pi, 0, \pi\} \end{cases}$.

Να βρείτε τις σειρές Fourier $S[f]$ και $S[g]$ των f και g.

2. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = (\pi - x)^2$ στο $[0, 2\pi]$ και την επεκτείνουμε σε μια 2π-περιοδική συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι

$$S[f](x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2}.$$

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω, δείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

3. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια 2π-περιοδική συνάρτηση με συνεχή δεύτερη παράγωγο. Δείξτε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε $|a_k(f)| \leq \frac{M}{k^2}$ και $|b_k(f)| \leq \frac{M}{k^2}$ για κάθε $k = 1, 2, \ldots$

4. (α) Έστω $0 < \delta < \pi$. Δείξτε ότι, για κάθε $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$,

$$\left| \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx \right| \leq \frac{1}{2\sin\frac{\delta}{2}} \qquad \text{και} \qquad \left| \sum_{k=1}^{n} \sin kx \right| \leq \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}.$$

(β) Έστω (t_k) φθίνουσα ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών με $t_k \to 0$. Δείξτε ότι οι σειρές $\sum_{k=1}^{\infty} t_k \cos kx$ και $\sum_{k=1}^{\infty} t_k \sin kx$ συγκλίνουν κατά σημείο στο $(0, 2\pi)$ και ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα $[\delta, 2\pi - \delta]$, όπου $0 < \delta < \pi$. Συμπεράνατε ότι ορίζουν συνεχείς συναρτήσεις στο $(0, 2\pi)$.

5. Αποδείξτε ότι, για κάθε $0 < x < 2\pi$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2} = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{6}.$$

6. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-περιοδική συνάρτηση, ολοκληρώσιμη στο $[-\pi, \pi]$. Δείξτε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$s_n(f)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{\sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right]}{2\sin\frac{t}{2}}\, dt.$$

7. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια 2π-περιοδική συνάρτηση, ολοκληρώσιμη στο $[0, 2\pi]$.

(α) Δείξτε ότι

$$\lim_{t \to 0} \int_0^{2\pi} |f(x+t) - f(x)|\, dx = 0.$$

[*Υπόδειξη*: εξετάστε πρώτα την περίπτωση που η f είναι συνεχής.]

(β) (Λήμμα Riemann–Lebesgue). Δείξτε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{2\pi} f(x) \sin nx\, dx = -\int_0^{2\pi} f\left(x + \frac{\pi}{n}\right) \sin nx\, dx.$$

και συμπεράνατε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx = 0.$$

8. Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-περιοδικές συναρτήσεις, ολοκληρώσιμες στο $[0, 2\pi]$. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)g(nx)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx \;\cdot\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\,dx.$$

9. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη 2π-περιοδική συνάρτηση με

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0.$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα του Parseval για τις f και f' δείξτε ότι

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx,$$

με ισότητα αν και μόνο αν $f(x) = a\cos x + b\sin x$ για κάποιους $a, b \in \mathbb{R}$.

10. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια 2π-περιοδική συνάρτηση με συνεχή δεύτερη παράγωγο και

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0.$$

Υποθέτουμε ότι $|f(x)| \geq |f''(x)|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Τι μπορείτε να πείτε για την f;