**Ανάλυση Fourier και Ολοκλήρωμα Lebesgue (2013–14)**
**2ο Φυλλάδιο Ασκήσεων**

*Παραδίδετε έξι από τις ασκήσεις του Φυλλαδίου 2 ως την Δευτέρα 10 Μαρτίου 2014.*

**1.** Έστω $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής $2\pi$-περιοδική συνάρτηση με σειρά Fourier την

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx).$$

Αν η $f$ είναι $2\pi$-περιοδική και ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση

$$f''(x)+\lambda f(x)=g(x)$$

όπου ο $\lambda$ δεν είναι τετράγωνο φυσικού, να βρείτε την σειρά Fourier της $f$ και να δείξετε ότι συγκλίνει παντού.

**2.** Έστω $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια ακολουθία καλών πυρήνων. Δείξτε ότι: για κάθε $p>1$,

$$\lim_{n\to\infty}\|K_n\|_p=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|K_n(x)|^p dx\right)^{1/p}=+\infty.$$

**3.** Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ ορίζουμε

$$G_n(x)=F_n(x)\sin nx,$$

όπου $F_n$ είναι ο $n$-οστός πυρήνας του Fejér. Δείξτε ότι: αν $T\in\mathcal{T}_n$ είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού μικρότερου ή ίσου από $n$, τότε

$$T'(x)=-2n(T*G_n)(x)$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Συμπεράνατε ότι

$$|T'(x)|\leq 2n\|T\|_\infty$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

**4.** Δείξτε ότι

$$\frac{1}{2i}\sum_{0<|k|\leq n}\frac{e^{ikx}}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}=\frac{1}{2}\int_0^x(D_n(t)-1)\,dt,$$

και συμπεράνατε ότι

$$\sup_n\sup_{x\in[-\pi,\pi]}\left|\frac{1}{2i}\sum_{0<|k|\leq n}\frac{e^{ikx}}{k}\right|<+\infty.$$

**5.** Έστω $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ άρτια ολοκληρώσιμη συνάρτηση με την ιδιότητα: $a_k(f)\geq 0$ για κάθε $k\geq 0$. Δείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k<+\infty.$$

*Υπόδειξη:* $s_n(f)(0)=(a_0/2)+a_1+\cdots+a_n$.

**6.** Αν $A,B\subseteq\mathbb{R}$ και $\mu^*(A\triangle B)=0$, δείξτε ότι $\mu^*(A)=\mu^*(B)$ (με $A\triangle B$ συμβολίζουμε την συμμετρική διαφορά $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$ των $A$ και $B$).

**7.** (α) Έστω $A$ και $B$ μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν μετρήσιμα $E,F\subseteq\mathbb{R}$ ώστε $A\subseteq E$, $B\subseteq F$ και $\mu(E\cap F)=0$. Δείξτε ότι $\mu^*(A\cup B)=\mu^*(A)+\mu^*(B)$.
(β) Έστω $A$ και $B$ μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ανοικτό $G\subseteq\mathbb{R}$ ώστε $A\subseteq G$ και $B\cap G=\emptyset$. Δείξτε ότι $\mu^*(A\cup B)=\mu^*(A)+\mu^*(B)$.

**8.** Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς:

1. Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ και $\mu^*(A) = 0$, τότε το $A$ είναι πεπερασμένο ή άπειρο αριθμήσιμο σύνολο.
2. Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ και το $A$ δεν είναι μετρήσιμο, τότε $\mu^*(A) > 0$.
3. Αν $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $\mu^*(A) < +\infty$, $B \subseteq A$, το $B$ είναι μετρήσιμο και $\mu(B) = \mu^*(A)$, τότε το $A$ είναι μετρήσιμο.
4. Έστω $A \subseteq [a, b]$. Τότε, $\mu^*(A) = 0$ αν και μόνο αν υπάρχει κάλυψη του $A$ από μια ακολουθία ανοικτών διαστημάτων $(I_n)$ ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < +\infty$ και κάθε $x \in A$ ανήκει σε άπειρα το πλήθος από τα διαστήματα $I_n$.

**9.** Θέτουμε $A = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Δείξτε ότι:

(α) Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ακολουθία $\{R_j\}_{j=1}^{\infty}$ ανοικτών διαστημάτων ώστε: $A \subseteq \cup_{j=1}^{\infty} R_j$ και $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(R_j) < \varepsilon$.

(β) Αν $\{R_j\}_{j=1}^{m}$ είναι μια *πεπερασμένη* οικογένεια ανοικτών διαστημάτων ώστε $A \subseteq \cup_{j=1}^{m} R_j$, τότε $\sum_{j=1}^{m} \lambda(R_j) \geq 1$.

**10.** Έστω $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια αρίθμηση του $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ ορίζουμε

$$A(\varepsilon) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left( q_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, q_n + \frac{\varepsilon}{2^n} \right).$$

Τέλος, θέτουμε $A = \cap_{j=1}^{\infty} A(1/j)$.

(α) Δείξτε ότι $\lambda(A(\varepsilon)) \leq 2\varepsilon$.

(β) Αν $\varepsilon < \frac{1}{2}$ δείξτε ότι το $[0, 1] \setminus A(\varepsilon)$ είναι μη κενό.

(γ) Δείξτε ότι $A \subseteq [0, 1]$ και $\lambda(A) = 0$.

(δ) Δείξτε ότι $\mathbb{Q} \cap [0, 1] \subseteq A$ και ότι το $A$ είναι υπεραριθμήσιμο.