Μια Άσκηση

Αν η g είναι 2π-περιοδική και $m \in \mathbb{N}$, να βρεθεί η σειρά Fourier της g_1 όπου $g_1(t) = g(mt)$.

Απάντηση
$$\hat{g}_1(k) = \begin{cases} \hat{g}(\frac{k}{m}), & \text{αν } m|k \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Απόδειξη Αν $g \sim \sum a_n e_n$ (δηλαδή $\hat{g}(n) = a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$) ξέρουμε ότι

$$\lim_{N\to\infty} \left\| g - \sum_{n=-N}^{N} a_n e_n \right\|_2 = 0.$$

Αλλά

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| g(mt) - \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{inmt} \right|^2 dt \stackrel{(mt=s)}{=} \int_{-\pi m}^{\pi m} \left| g(s) - \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{ins} \right|^2 \frac{1}{m} ds$$
$$\stackrel{(*)}{=} m \int_{-\pi}^{\pi} \left| g(s) - \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{ins} \right|^2 \frac{1}{m} ds = \int_{-\pi}^{\pi} \left| g(s) - \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{ins} \right|^2 ds.$$

(*: επειδή η $h(s) = \left| g(s) - \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{ins} \right|$ είναι 2π-περιοδική). Δηλαδή

$$\lim_{N\to\infty} \left\| g_1 - \sum_{n=-N}^{N} a_n e_{nm} \right\|_2 = 0$$

οπότε $g_1 \sim \sum a_n e_{nm}$. Δηλαδή $\hat{g}_1(nm) = a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ και $\hat{g}_1(k) = 0$ αν το k δεν είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του m.