5 Μέση τετραγωνική σύγκλιση

Ας θυμηθούμε ότι μια ακολουθία (συνεχών) συναρτήσεων (f_n) συγκλίνει σε μια συνάρτηση f *ομοιόμορφα* στο $[-\pi, \pi]$ αν και μόνον αν

$$\|f_n - f\|_\infty \equiv \sup\{|f_n(t) - f(t) : t \in [-\pi, \pi]\} \to 0.$$

Δηλαδή, στον (γραμμικό) χώρο $C[-\pi, \pi]$, η ομοιόμορφη σύγκλιση ταυτίζεται με την σύγκλιση ως προς τη μετρική d_∞ που ορίζεται ως εξής:

$$d_\infty(f, g) \equiv \|f - g\|_\infty = \sup\{|f(t) - g(t) : t \in [-\pi, \pi]\}.$$

Υπάρχει όμως και μια άλλη χρήσιμη μετρική στον $C[-\pi, \pi]$, λεγόμενη μετρική d_2 της *μέσης τετραγωνικής σύγκλισης* που ορίζεται ως εξής:

$$d_2(f, g) \equiv \|f - g\|_2 \equiv \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - g(t)|^2 dt\right)^{1/2}.$$

Για να δείξουμε ότι η d_2 είναι πράγματι μετρική στον $C[-\pi, \pi]$, παρατηρούμε αμέσως από τον ορισμό της ότι

$$d_2(f, g) = d_2(g, f) \quad \text{και} \quad d_2(f, g) \geq 0$$

για κάθε f, g. Επίσης, αν οι f, g είναι *συνεχείς* και διαφορετικές, τότε υπάρχει $\delta > 0$ και $(a, b) \subseteq [-\pi, \pi]$ ώστε $|f(t) - g(t)|^2 \geq \delta$ για κάθε $t \in (a, b)$, οπότε

$$d_2(f, g)^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - g(t)|^2 dt \geq \frac{1}{2\pi}\int_a^b |f(t) - g(t)|^2 dt \geq \frac{1}{2\pi}\delta(b - a) > 0$$

άρα $d_2(f, g) = 0$ αν και μόνον αν $f = g$. Απομένει να αποδειχθεί η τριγωνική ανισότητα:

Λήμμα 5.1 *Αν*

$$\langle f, g\rangle \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\bar{g}$$

τότε για κάθε f, g, h έχουμε

$$(a)\ |\langle f, g\rangle| \leq \|f\|_2 \|g\|_2$$
$$(b)\ d_2(f, g) \leq d_2(f, h) + d_2(h, g).$$

Απόδειξη (a) Για να δείξω ότι $|\langle f,g\rangle| \leq \|f\|_2 \|g\|_2$ αρκεί να υποθέσω ότι $\|g\|_2 = 1$. Αν $\lambda \in \mathbb{C}$, από τον ορισμό του $\langle f,g\rangle$ υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle f-\lambda g, f-\lambda g\rangle &= \|f\|_2^2 - \bar{\lambda}\langle f,g\rangle - \lambda\langle g,f\rangle + |\lambda|^2\|g\|_2^2 \\ &= \|f\|_2^2 - \bar{\lambda}\langle f,g\rangle - \lambda\langle g,f\rangle + |\lambda|^2 \end{aligned}$$

οπότε, θέτοντας $\lambda = \langle f,g\rangle)$, έχουμε $0 \leq \|f\|_2^2 - 2|\langle f,g\rangle|^2 + |\langle f,g\rangle|^2$ άρα $|\langle f,g\rangle|^2 \leq \|f\|_2^2 = \|f\|_2^2\|g\|_2^2$ και η ζητούμενη ανισότητα αποδείχθηκε.

(b) Για κάθε f,g,h έχουμε

$$\begin{aligned} \|f+g\|_2^2 &= \langle f+g, f+g\rangle = \langle f,f\rangle + \langle f,g\rangle + \langle g,f\rangle + \langle g,g\rangle \\ &= \langle f,f\rangle + 2Re\langle f,g\rangle + \langle g,g\rangle \\ &\leq \langle f,f\rangle + 2|\langle f,g\rangle| + \langle g,g\rangle \\ &\leq \|f\|_2^2 + 2\|f\|_2\|g\|_2 + \|g\|_2^2 = (\|f\|_2 + \|g\|_2)^2 \end{aligned}$$

από το (a), άρα

$$d_2(f,g) = \|(f-h)+(h-g)\|_2 \leq \|f-h\|_2 + \|h-g\|_2 = d_2(f,h) + d_2(h,g).$$

□

Παρατήρηση 5.2 *Αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα τότε $f_n \xrightarrow{d_2} f$ και $f_n(t) \to f(t)$ για κάθε t. Το αντίστροφο δεν ισχύει εν γένει.*

Απόδειξη Αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα τότε

$$\begin{aligned} d_2(f_n,f) &= \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f_n(t)-f(t)|^2\right)^{1/2} \\ &\leq \left(\sup\{|f_n(t)-f(t)|^2 : t\in[-\pi,\pi]\}\frac{2\pi}{2\pi}\right)^{1/2} = d_\infty(f_n,f) \to 0 \end{aligned}$$

και για κάθε $t \in [-\pi,\pi]$,

$$|f_n(t)-f(t)| \leq \sup\{|f_n(x)-f(x)| : x\in[-\pi,\pi]\} = d_\infty(f_n,f) \to 0.$$

Για να δείξουμε ότι το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα, θεωρούμε την ακολουθία (f_n) όπου

$$f_n(t) = \begin{cases} \sin^2\left(\frac{\pi}{t}\right) & \text{αν } \frac{1}{n+1} \leq t \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Η f_n είναι συνεχής στο $[-\pi,\pi]$ και επειδή για κάθε $t\in[-\pi,\pi]$ υπάρχει n_o ώστε για κάθε $n\ge n_o$ να έχουμε $t\notin[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]$, ισχύει $\lim_n f_n(t)=0$. Επίσης

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f_n(t)|^2dt\le\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}}1dt\le\frac{1}{n},$$

άρα $d_2(f_n,0)\to 0$. Όμως $\sup\{|f_n(t)|:|t|\le\pi\}=f_n(\frac{2}{2n+1})=1$ για κάθε n άρα $\lim_n d_\infty(f_n,0)=1\neq 0$.

Λήμμα 5.3 (Βέλτιστης μέσης τετραγωνικής προσέγγισης [Απ 30.6]) *Έστω $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{C}$ συνάρτηση ώστε $\int|f|^2<\infty$ και $n\in\mathbb{N}$. Τότε για κάθε τριγωνομετρικό πολυώνυμο p βαθμού το πολύ n ισχύει*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f-p|^2\ge\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f-S_n(f)|^2.$$

Ισότητα ισχύει αν και μόνον αν $p=S_n$.

Απόδειξη Έστω $p(t)=\sum_{k=-n}^{n}c_ke^{ikt}$. Ισχυρίζομαι ότι

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f-p|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f-S_n(f)|^2+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|S_n(f)-p|^2 \qquad (1)$$

Από την (1) έπεται αμέσως ότι

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f-p|^2\ge\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f-S_n(f)|^2$$

και ότι ισότητα ισχύει αν και μόνον αν ο τελευταίος όρος στην (1) μηδενίζεται, πράγμα που συμβαίνει αν και μόνον αν $p=S_n$.

Απόδειξη Ισχυρισμού Αν θέσουμε $g=f-S_n(f)$ και $h=S_n(f)-p$ έχουμε

$$f-p=f-S_n(f)+S_n(f)-p=g+h.$$

Παρατηρούμε ότι, αν $e_k(t)=e^{ikt}$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\overline{e_k}=\hat{f}(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}S_n(f)\overline{e_k}$$

όταν $|k|\le n$ (από τον ορισμό του $S_n(f)$), άρα

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g\overline{e_k}=0,\qquad |k|\le n.$$

Έπεται ότι
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g\bar{h} = 0 \quad \text{γιατί} \quad h = \sum_{k=-n}^{n} (\hat{f}(k) - c_k)e_k$$
οπότε
$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f-p|^2 =& \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g+h|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (g+h)(\overline{g+h}) \\ =& \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g\overline{g} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g\overline{h} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h\overline{g} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h\overline{h} \\ =& \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g|^2 + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |h|^2\end{aligned}$$
και η (1) αποδείχθηκε.

Η επόμενη Πρόταση, όπως θα δείξουμε αργότερα, ισχύει για μια κλάση συναρτήσεων πολύ ευρύτερη από τις συνεχείς.

Πρόταση 5.4 *Αν η f είναι συνεχής, τότε*
$$S_n(f) \xrightarrow{d_2} f$$
δηλαδή
$$\lim_n \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |S_n(f) - f|^2 = 0.$$

Απόδειξη Εφόσον η f είναι συνεχής, από το Θεώρημα του Féjer ξέρουμε ότι $\sigma_n(f) \to f$ ομοιόμορφα, δηλαδή $d_\infty(\sigma_n(f), f) \to 0$. Έπεται (βλ. Παρατήρηση 5.2) ότι $d_2(\sigma_n(f), f) \to 0$. Εφαρμόζοντας όμως το Λήμμα για $p = \sigma_n(f)$, έχουμε $0 \leq d_2(S_n(f), f) \leq d_2(\sigma_n(f), f)$ άρα $d_2(S_n(f), f) \to 0$.

Παρατήρηση 5.5 *Αν $p(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}$ είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο, τότε*
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |p|^2 = \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2.$$

Απόδειξη Εφόσον $\hat{p}(k) = c_k$ για $|k| \leq n$, έχουμε
$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |p|^2 =& \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} p\bar{p} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} p\sum_{k=-n}^{n} \bar{c}_k\bar{e}_k \\ =& \sum_{k=-n}^{n} \bar{c}_k \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} p\bar{e}_k = \sum_{k=-n}^{n} \bar{c}_k c_k = \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2.\end{aligned}$$

Πρόταση 5.6 (Ανισότητα Bessel [Απ 30.7]) *Έστω $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ συνάρτηση ώστε $\int |f|^2 < \infty$. Τότε*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(k)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2.$$

Απόδειξη Έστω $n \in \mathbb{N}$. Εφαρμόζουμε την (1) για $p = 0$ και έχουμε

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f - S_n(f)|^2 + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |S_n(f)|^2 \geq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |S_n(f)|^2 \quad (2)$$

Αλλά το $S_n(f)$ είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο με συντελεστές $\hat{f}(k)$ για $|k| \leq n$ και 0 για $|k| > n$, άρα από την προηγούμενη Παρατήρηση έχουμε

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 \geq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |S_n(f)|^2 = \sum_{k=-n}^{n} |\hat{f}(k)|^2.$$

Εφόσον η ανισότητα αυτή ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η ανισότητα Bessel αποδείχθηκε.

Θα δείξουμε αργότερα ότι στην πραγματικότητα ισχύει ισότητα.

Άμεσο πόρισμα της ανισότητας Bessel είναι το θεμελιώδες

Θεώρημα 5.7 (Riemann - Lebesgue [Απ 30.8]) *Αν $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ είναι μια συνάρτηση ώστε $\int |f|^2 < \infty$, τότε*

$$\lim_{k \to +\infty} \hat{f}(k) = \lim_{k \to -\infty} \hat{f}(k) = 0.$$

Πόρισμα 5.8 (Ισότητα Parseval [Απ 30.41]) *Αν $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής συνάρτηση, τότε*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2.$$

Απόδειξη Έχουμε δείξει ότι $d_2(S_n(f), f) \to 0$. Εφόσον η d_2 είναι μετρική, από την τριγωνική ανισότητα έχουμε

$$|d_2(f, 0) - d_2(S_n(f), 0)| \leq d_2(S_n(f), f)$$

άρα $d_2(S_n(f),0) \to d_2(f,0)$, δηλαδή

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|S_n(f)|^2 \to \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f|^2.$$

Αλλά από την Παρατήρηση 5.5 έχουμε $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|S_n(f)|^2 = \sum_{k=-n}^{n}|\hat{f}(k)|^2$, άρα

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\hat{f}(k)|^2 = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n}|\hat{f}(k)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f|^2.$$

6 Συμπληρώματα

Πρόταση 6.1 (Ru 8.14) *Έστω $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ Riemann-ολοκληρώσιμη και $x \in [-\pi,\pi]$. Αν υπάρχει $\delta > 0$ και $M < \infty$ ώστε*

$$|f(x+t) - f(x)| \leq M|t| \quad \text{για κάθε } t \in (-\delta,\delta)$$

τότε $S_n(f,x) \to f(x)$.

Η υπόθεση ικανοποιείται π.χ. όταν υπάρχει η $f'(x)$.

Απόδειξη Σταθεροποιούμε το x και ορίζουμε την $g : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ από τις σχέσεις $g(0) = 0$ και

$$g(t) = \frac{f(x-t) - f(x)}{\sin(t/2)} \quad t \neq 0.$$

Έχουμε δείξει ότι

$$S_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_n(t)dt$$

όπου

$$D_n(s) = \sum_{k=-n}^{n}\exp(iks) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})s}{\sin\frac{s}{2}} \quad \text{όταν } \ s \neq 2k\pi$$

και $D_n(0) = 2n+1$. Επομένως $(f(x-t) - f(x))D_n(t) = g(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)$ για κάθε t. Επειδή $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)dx = 1$ έχουμε

$$\begin{aligned}
s_n(f,x) - f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x-t) - f(x))D_n(t)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(g(t)\cos\frac{t}{2}\right)\sin(nt)dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(g(t)\sin\frac{t}{2}\right)\cos(nt)dt \\
&= b_n(h_1) + a_n(h_2)
\end{aligned}$$

όπου $h_1(t) = g(t)\cos\frac{t}{2}$ και $h_2(t) = g(t)\sin\frac{t}{2}$. Παρατηρούμε όμως ότι οι h_1 και h_2 είναι ολοκληρώσιμες σε κάθε διάστημα της μορφής $[-\pi, x-\epsilon]$ ή $[x+\epsilon, \pi]$ (όπου $\epsilon > 0$), και (από την υπόθεση) είναι φραγμένες στο $[-\pi,\pi]$, άρα είναι ολοκληρώσιμες στο $[-\pi,\pi]$. Επομένως, από το Λήμμα Riemann-Lebesgue, τα δύο ολοκληρώματα τείνουν στο 0 καθώς $n \to \infty$.

Πόρισμα 6.2 (Αρχή τοπικότητας του Riemann) *Αν οι f και g ταυτίζονται σε κάθε σημείο ενός ανοικτού διαστήματος J, τότε $S_n(f,x) - S_n(g,x) \to 0$ για κάθε $x \in J$.*

Απόδειξη Θεωρούμε την $h = f - g$. Για κάθε $x \in J$ υπάρχει η $h'(x)$ (και είναι 0), άρα από την προηγούμενη πρόταση η $(S_n(h,x))_n$ συγκλίνει στο $h(x) = 0$. $\square$

Πρόταση 6.3 *Αν $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ είναι 2π-περιοδική και έχει ολοκληρώσιμη παράγωγο στο $[-\pi,\pi]$, τότε $S_n(f) \to f$ ομοιόμορφα.*

Απόδειξη Ξέρουμε ότι $\widehat{f'}(k) = ik\hat{f}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ (Πρόταση 2.11). Εφόσον $\sum_k |\widehat{f'}(k)|^2 < \infty$, έπεται ότι $\sum_k |k\hat{f}(k)|^2 < \infty$, άρα, από την ανισότητα Cauchy-Schwarz,

$$\left(\sum_{k\neq 0}\left|\hat{f}(k)\right|\right)^2 = \left(\sum_{k\neq 0}\left|k\hat{f}(k)\frac{1}{k}\right|\right)^2 \leq \left(\sum_{k\neq 0}\left|k\hat{f}(k)\right|^2\right)\left(\sum_{k\neq 0}\frac{1}{|k|^2}\right).$$

Αφού οι δύο σειρές δεξιά συγκλίνουν, έπεται ότι $\sum_{k\neq 0}\left|\hat{f}(k)\right|$, και άρα η $(S_n(f))_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στη f (Πρόταση 3.1). $\square$