Μια Άσκηση *Να δειχθεί ότι υπάρχει σταθερά $c > 0$ ώστε για κάθε n,*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(x)| dx \geq c \log n$$

Λύση Αθροίζοντας την γεωμετρική πρόοδο, (αν $x \in [-\pi, \pi]$, $x \neq 0$) έχουμε

$$\begin{aligned} D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \exp(ikx) &= \frac{\exp(i(n+1)x) - \exp(-inx)}{\exp(ix) - 1} \\ &= \frac{\exp(i(n+\frac{1}{2})x) - \exp(-i(n+\frac{1}{2}x))}{\exp(i\frac{x}{2}) - \exp(-i\frac{x}{2})} = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

Αλλά $|\sin x| \leq |x|$, οπότε

$$x \neq 0 : \quad |D_n(x)| = \left|\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}\right| \geq 2\left|\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{x}\right|$$

και συνεπώς (εφόσον η $|D_n|$ είναι άρτια),

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(x)| dx = 2\int_0^{\pi} |D_n(x)| dx &\geq 4\int_0^{\pi} \left|\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{x}\right| dx \qquad (t = (n+\frac{1}{2})x) \\ &= 4\int_0^{n\pi+\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin t|}{t} dt \geq 4\int_0^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \\ &= 4\sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \geq 4\sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin t|}{k\pi} dt \\ &= \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin t| dt = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\int_0^{\pi} \sin t dt \\ &= \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \frac{8}{\pi}\int_1^n \frac{1}{s} ds = \frac{8}{\pi}\log n \end{aligned}$$

(χρησιμοποιήσαμε ότι η συνάρτηση $x \to \left|\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{x}\right|$ είναι συνεχής στο $[0, \pi]$, άρα το ολοκλήρωμα υπάρχει, καθώς και ότι $\frac{1}{t} \geq \frac{1}{k\pi}$ όταν $0 < t < k\pi$).