Ασκήσεις I: Σειρές Fourier
27 Φεβρουαρίου 2005

Άσκηση 1 Να αποδειχθεί ότι καθένα από τα σύνολα

$$\{\sin n : n \in \mathbb{N}\} \qquad \text{και} \qquad \{\cos n : n \in \mathbb{N}\}$$

είναι πυκνό στο $[-1, 1]$.

Άσκηση 2 Να δειχθεί ότι για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ και $x \neq 2k\pi$,

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin kx = \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}}$$

$$c_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}}.$$

Άσκηση 3 Αν

$$S(f, x) \equiv \frac{a_o(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f) \cos kx + \sum_{k=1}^{\infty} b_k(f) \sin kx \qquad \text{και} \quad S_c(f, x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx}$$

δείξτε ότι τα μερικά αθροίσματα των δύο αυτών σειρών ταυτίζονται.

Άσκηση 4 Αν μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ είναι άρτια, τότε η σειρά Fourier της είναι σειρά συνημιτόνων (δηλαδή $b_n = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$). Αν είναι περιττή, τότε η σειρά Fourier της είναι σειρά ημιτόνων (δηλαδή $a_n = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$). Αν η f παίρνει πραγματικές τιμές, τότε $c_{-k} = \overline{c_k}$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

Άσκηση 5 Να εξετασθεί αν συγκλίνει η τριγωνομετρική σειρά[1]

$$\frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \ldots \right)$$

και να βρεθεί το όριό της, αν υπάρχει.

Άσκηση 6 Δίδονται οι συναρτήσεις

$$f_1 : (0, 2\pi] \to \mathbb{R} \text{ με } f_1(t) = t, \quad f_2 : [0, 2\pi) \to \mathbb{R} \text{ με } f_2(t) = t^2 - \pi^2,$$
$$f_3 : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R} \text{ με } f_3(t) = t^2 - \pi^2.$$

Να επεκταθούν περιοδικά στο $\mathbb{R}$ και να βρεθούν οι σειρές Fourier τους. Να εξετασθεί αν οι σειρές αυτές συγκλίνουν και πού. Εφαρμόζονται οι Προτάσεις της Παραγράφου 3 στις συναρτήσεις αυτές;

Άσκηση 7 Αν η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι ολοκληρώσιμη και 2π-περιοδική, τότε

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \int_I f(t)dt$$

όπου $I \subseteq \mathbb{R}$ οποιοδήποτε διάστημα μήκους 2π. Ειδικότερα, $\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_I f(t) e^{-ikt} dt$.

Άσκηση 8 Αν είναι γνωστή η σειρά Fourier μιας συνάρτησης g, να βρεθούν οι σειρές Fourier των συναρτήσεων $g_1(t) = g(t) - a$, $g_2(t) = g(t - b)$, $g_3(t) = g(ct)$, $g_4(t) = e^{idt} g(t)$, όπου a, b, c, d κατάλληλες σταθερές.

Άσκηση 9 Αν $D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}$ είναι ο πυρήνας του Dirichlet, δείξτε ότι υπάρχει σταθερά c ώστε

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt \geq c \log n.$$

[Υπόδειξη: $|D_n(x)| \geq c \frac{|\sin((N+1/2)x)|}{|x|}$.]

[1] βλ. τις γραφικές παραστάσεις στην ηλεκτρονική σελίδα του μαθήματος