

10 Σύγκριση με το ολοκλήρωμα Riemann

Περιοριζόμαστε τώρα στην περίπτωση όπου $X = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, m το μέτρο Lebesgue και $\mathcal{M}(m)$ η οικογένεια των Lebesgue μετρήσιμων συνόλων. Χρησιμοποιώντας τους συμβολισμούς της παραγράφου 6.2, έχουμε

$$\int_a^b h_{\mathcal{P}}(t)dt = L(f, \mathcal{P}), \quad \int_a^b g_{\mathcal{P}}(t)dt = U(f, \mathcal{P}).$$

όπου

$$h_{\mathcal{P}}(t) = \sum_{i=1}^n m_i(f)\chi_{I_i}(t), \quad g_{\mathcal{P}}(t) = \sum_{i=1}^n M_i(f)\chi_{I_i}(t).$$

Επειδή οι συναρτήσεις $h_{\mathcal{P}}$ και $g_{\mathcal{P}}$ είναι κλιμακωτές (άρα απλές μετρήσιμες), το ολοκλήρωμα Riemann και το ολοκλήρωμα Lebesgue των συναρτήσεων αυτών συμπίπτουν.

Επιλέγουμε επαγωγικά διαμερίσεις $\mathcal{P}_1 \subseteq \mathcal{P}_2 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{P}_n \subseteq \dots$ ώστε η «λεπτότητα» (δηλαδή η απόσταση δύο διαδοχικών σημείων) της \mathcal{P}_n να είναι μικρότερη από $\frac{1}{n}$ και

$$\int_a^b h_{\mathcal{P}_n} \rightarrow \sup_{\mathcal{P}} L(f, \mathcal{P}) \equiv \underline{\int_a^b} f, \quad \int_a^b g_{\mathcal{P}_n} \rightarrow \inf_{\mathcal{P}} U(f, \mathcal{P}) \equiv \overline{\int_a^b} f.$$

Παρατηρούμε ότι η ακολουθία $(h_{\mathcal{P}_n}) = (h_n)$ είναι αύξουσα και η $(g_{\mathcal{P}_n}) = (g_n)$ είναι φθίνουσα και ότι $h_n \leq f \leq g_n$ για κάθε n . Θέτουμε $h = \sup_n h_n$ και $g = \inf_n g_n$. Οι h, g είναι μετρήσιμες και

$$h \leq f \leq g.$$

Χωρίς καμιά υπόθεση για την f (εκτός του ότι είναι φραγμένη) από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης συμπεραίνουμε ότι

$$\int h dm = \lim_n \int h_n dm = \underline{\int_a^b} f \quad \text{και} \quad \int g dm = \lim_n \int g_n dm = \overline{\int_a^b} f.$$

Επομένως η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν και μόνον αν ισχύει η ισότητα

$$\int h dm = \int g dm.$$

Εφόσον $h \leq g$, η ισότητα αυτή ισχύει αν και μόνον αν $h(x) = g(x)$ σχεδόν για κάθε $x \in [a, b]$.

Τότε έχουμε και $h(x) = f(x) = g(x)$ σχεδόν για κάθε $x \in [a, b]$ οπότε η f είναι μετρήσιμη¹, μάλιστα Lebesgue-ολοκληρώσιμη και

$$\int f dm = \int h dm = \int_a^b f$$

δηλαδή το ολοκλήρωμα Lebesgue της f συμπίπτει με το ολοκλήρωμα Riemann.

Αποδεικνύεται ότι αν το $x \in [a, b]$ δεν ανήκει σε κανένα από τα διαχωριστικά σημεία καμιάς από τις διαμερίσεις \mathcal{P}_n τότε η ισότητα $h(x) = f(x) = g(x)$ ισοδυναμεί με την συνέχεια της f στο x .

Επομένως, αν υπάρχει ένα σύνολο $M_1 \subseteq [a, b]$ μέτρου μηδέν ώστε $h(x) = f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in [a, b] \setminus M_1$ και αν ονομάσουμε M την ένωση του M_1 με το (αριθμήσιμο) σύνολο όλων των σημείων όλων των διαμερίσεων \mathcal{P}_n , $n \in \mathbb{N}$, τότε το M έχει μέτρο μηδέν και η f είναι συνεχής σε κάθε $x \in [a, b] \setminus M$, δηλαδή σχεδόν παντού. Αν αντίστροφα η f είναι συνεχής σχεδόν παντού, δηλαδή υπάρχει ένα σύνολο $N \subseteq [a, b]$ μέτρου μηδέν ώστε η f να είναι συνεχής σε κάθε $x \in [a, b] \setminus N$, τότε η ισότητα $h(x) = f(x) = g(x)$ ισχύει σε κάθε $x \in [a, b] \setminus N$ που δεν είναι σημείο καμιάς από τις διαμερίσεις \mathcal{P}_n , δηλαδή σχεδόν παντού. Έπεται τότε ότι $\int f dm = \int g dm$, και συνεπώς το ολοκλήρωμα Riemann της f στο $[a, b]$ υπάρχει.

Θεώρημα 10.1 *Μια φραγμένη συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν και μόνον αν είναι σχεδόν παντού συνεχής, αν δηλαδή το σύνολο των ασυνεχειών της έχει μέτρο μηδέν. Τότε η f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη και τα δύο ολοκληρώματα συμπίπτουν.*

Παρατήρηση 10.2 *Ας τονίσουμε τη διαφορά ανάμεσα στην έννοια «σχεδόν παντού συνεχής» και «σχεδόν παντού ίση με μια συνεχή συνάρτηση»:*

Για παράδειγμα η συνάρτηση Dirichlet, δηλαδή η χαρακτηριστική συνάρτηση των ρητών, δεν είναι πουθενά συνεχής, αλλά είναι σχεδόν παντού ίση με τη συνεχή συνάρτηση $f(t) = 0$. Αντίθετα η χαρακτηριστική συνάρτηση του $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$

¹για κάθε $c \in \mathbb{R}$, το σύνολο $\{x \in [a, b] : f(x) < c\}$ διαφέρει από το σύνολο $\{x \in [a, b] : h(x) < c\}$ κατά ένα σύνολο μέτρου μηδέν, άρα είναι μετρήσιμο, γιατί τα σύνολα μέτρου μηδέν ανήκουν στην $\mathcal{M}(m)$. [Πράγματι, (βλ. Παράγραφο 7.2) αν $m^*(A) = 0$, τότε από τον ορισμό του m^* για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει ένα σύνολο U που είναι αριθμήσιμη ένωση στοιχειωδών ανοικτών συνόλων, άρα μετρήσιμο, ώστε $A \subseteq U$ και $m(U) < \epsilon$, άρα $d(A, U) = m^*(A \Delta U) < \epsilon$.]

είναι σχεδόν παντού συνεχής (αφού είναι ασυνεχής μόνο στα σημεία $\frac{1}{3}$ και $\frac{2}{3}$), αλλά δεν μπορεί να είναι σχεδόν παντού ίση με μια συνεχή συνάρτηση, γιατί έχει άλμα στα δυο αυτά σημεία.

11 Ο χώρος $L^2([-\pi, \pi])$

11.1 Ολοκλήρωση μιγαδικών συναρτήσεων

Έστω (X, \mathcal{M}, μ) χώρος μέτρου. Μια συνάρτηση $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ θα λέγεται **μετρήσιμη** αν το πραγματικό και το φανταστικό της μέρος $u = \frac{1}{2}(f + \bar{f})$, $v = \frac{1}{2i}(f - \bar{f})$ είναι μετρήσιμες συναρτήσεις. Δεν είναι δύσκολο να αποδειχθεί ([Ru], Θεώρημα 11.18) ότι τότε η πραγματική συνάρτηση $|f|$ είναι μετρήσιμη.

Η f θα λέγεται **ολοκληρώσιμη** ($f \in \mathcal{L}(X, \mathcal{M}, \mu)$) αν οι u, v είναι ολοκληρώσιμες (αν δηλαδή $\int |u|d\mu < \infty$ και $\int |v|d\mu < \infty$). Τότε ορίζουμε

$$\int f d\mu = \int u d\mu + i \int v d\mu.$$

Από τις σχέσεις $|u| \leq |f|$, $|v| \leq |f|$ και $|f| \leq |u| + |v|$ φαίνεται ότι η f είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνον αν η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη. Ισχύει η ανισότητα

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu$$

Απόδειξη Κάθε μιγαδικός αριθμός z γράφεται $z = c|z|$ όπου $|c| = 1$. Γράφουμε λοιπόν

$$\int f d\mu = c \left| \int f d\mu \right|$$

όπου $|c| = 1$ και έχουμε

$$\left| \int f d\mu \right| = \bar{c} \int f d\mu = \int \bar{c} f d\mu.$$

Θέτουμε $\operatorname{Re} \bar{c} f = u$, $\operatorname{Im} \bar{c} f$ οπότε $\bar{c} f = u + iv$ και

$$\left| \int f d\mu \right| = \int \bar{c} f d\mu = \int u d\mu + i \int v d\mu = \int u d\mu$$

γιατί $\left| \int f d\mu \right| \in \mathbb{R}$. Όμως $|u| \leq |\bar{c} f| = |f|$ άρα $\int |u| d\mu \leq \int |f| d\mu$. Τελικά λοιπόν

$$\left| \int f d\mu \right| = \int u d\mu \leq \int |u| d\mu \leq \int |f| d\mu. \quad \square$$

11.2 Ο χώρος $L^2([-\pi, \pi])$

Ορισμός 11.1 Ο χώρος $\mathcal{L}^2(X, \mathcal{M}, \mu)$ αποτελείται από όλες τις μετρήσιμες συναρτήσεις $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ που ικανοποιούν

$$\int |f|^2 d\mu < \infty.$$

Παρατηρούμε ότι ο $\mathcal{L}^2(X, \mathcal{M}, \mu)$ είναι γραμμικός χώρος. Πράγματι αν $\int |f|^2 d\mu < \infty$ και $\int |g|^2 d\mu < \infty$ τότε για κάθε $c \in \mathbb{C}$ η συνάρτηση $|f + cg|^2$ είναι μετρήσιμη και

$$\begin{aligned} |f + cg|^2 &\leq 2|f|^2 + 2|cg|^2 \\ \text{άρα } \int |f + cg|^2 d\mu &\leq 2 \int |f|^2 d\mu + 2|c|^2 \int |g|^2 d\mu < \infty. \end{aligned}$$

Επίσης παρατηρούμε ότι αν $f, g \in \mathcal{L}^2(X, \mathcal{M}, \mu)$ τότε η συνάρτηση fg είναι ολοκληρώσιμη, γιατί $|fg| \leq |f|^2 + |g|^2$ άρα $\int |fg| d\mu \leq \int |f|^2 d\mu + \int |g|^2 d\mu < \infty$.

Άσκηση 11.1 Αν $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση $f(t) = t^{-1/2}$, εξετάστε αν η f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $(0, 1)$ και αν $f \in \mathcal{L}^2((0, 1), m)$.
(Υπόδειξη: Εφαρμόστε το Θεώρημα μονότονης σύγκλισης για την ακολουθία (f_n) όπου $f_n(t) = 0$ όταν $0 < t < \frac{1}{n}$ και $f_n(t) = f(t)$ όταν $\frac{1}{n} \leq t < 1$.)

Αν $f, g \in \mathcal{L}^2([-\pi, \pi], m)$ (όπου m το μέτρο Lebesgue) θέτουμε

$$d_2(f, g) \equiv \|f - g\|_2 \equiv \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f - g|^2 dm \right)^{1/2}.$$

(Στην περίπτωση που οι f, g είναι συνεχείς, το ολοκλήρωμα ταυτίζεται με το ολοκλήρωμα Riemann και ο ορισμός συμπίπτει με αυτόν που δώσαμε στην Παράγραφο 5).

Όπως στην Παράγραφο 5, αποδεικνύονται οι ιδιότητες

$$\begin{aligned} \|\lambda f\|_2 &= |\lambda| \cdot \|f\|_2 \quad (\lambda \in \mathbb{C}, f \in \mathcal{L}^2) \\ \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f \bar{g} dm \right| &\equiv |\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_2 \|g\|_2 \quad (f, g \in \mathcal{L}^2) \\ \|f + g\|_2 &\leq \|f\|_2 + \|g\|_2 \quad (f, g \in \mathcal{L}^2) \\ \|f\|_2 &\geq 0 \quad (f \in \mathcal{L}^2). \end{aligned}$$

Όμως, αν $\|f\|_2 = 0$ δεν προκύπτει $f(t) = 0$ για κάθε $t \in [-\pi, \pi]$, αλλά μόνον σχεδόν για κάθε t .

Άρα η d_2 δεν είναι μετρική στον χώρο $\mathcal{L}^2([-\pi, \pi], m)$. Για να έχουμε τη δομή μετρικού χώρου, πρέπει να «ταυτίσουμε» συναρτήσεις που διαφέρουν σε σύνολα μέτρου μηδέν. Με αυστηρή μαθηματική διατύπωση, αυτό ισοδυναμεί με το να θεωρούμε τον χώρο $L^2([-\pi, \pi], m)$ όλων των κλάσεων ισοδυναμίας συναρτήσεων του χώρου $\mathcal{L}^2([-\pi, \pi], m)$, όπου η κλάση ισοδυναμίας μιας $f \in \mathcal{L}^2([-\pi, \pi], m)$ αποτελείται από όλες τις $g \in \mathcal{L}^2([-\pi, \pi], m)$ που είναι σχεδόν παντού ίσες με την f (ισοδύναμα ικανοποιούν $d_2(f, g) = 0$).

Ορισμός 11.2 Ο χώρος $L^2(X, \mathcal{M}, \mu)$ αποτελείται από όλες τις κλάσεις ισοδυναμίας μετρήσιμων συναρτήσεων $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ (modulo ισότητα μ -σχεδόν παντού) που ικανοποιούν

$$\int |f|^2 d\mu < \infty.$$

Θεώρημα 11.2 (Riesz-Fischer) Ο χώρος $L^2(X, \mathcal{M}, \mu)$, εφοδιασμένος με την μετρική d_2 , είναι πλήρης μετρικός χώρος.

(Για την απόδειξη, δες την επόμενη παράγραφο.)

Πρόταση 11.3 Ο χώρος των απλών μετρήσιμων συναρτήσεων είναι πυκνός στον $L^2(X, \mathcal{M}, \mu)$ ως προς την d_2 , δηλαδή για κάθε $f \in L^2(X, \mathcal{M}, \mu)$ υπάρχει μια ακολουθία απλών μετρήσιμων συναρτήσεων (s_n) ώστε $\|f - s_n\|_2 \rightarrow 0$.

Απόδειξη Ας υποθέσουμε πρώτα ότι $f \geq 0$. Υπάρχει τότε μια αύξουσα ακολουθία (s_n) απλών μετρήσιμων συναρτήσεων ώστε $0 \leq s_n(t) \leq f(t)$ και $s_n(t) \rightarrow f(t)$ για κάθε t . Έπεται ότι $|f(t) - s_n(t)|^2 \rightarrow 0$ κατά σημείο. Εφόσον η ακολουθία $(|f - s_n|^2)$ είναι φθίνουσα, από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης έπεται ότι $\int |f - s_n|^2 d\mu \rightarrow 0$.

Για τη γενική περίπτωση, γράφουμε $f = u + iv = (u^+ - u^-) + i(v^+ - v^-)$ όπου οι u^+, u^-, v^+, v^- είναι μη αρνητικές μετρήσιμες και επομένως κάθε μια από αυτές προσεγγίζεται από μια ακολουθία απλών μετρήσιμων συναρτήσεων.

□

Θεώρημα 11.4 Ο χώρος των συνεχών 2π -περιοδικών συναρτήσεων είναι πυκνός υπόχωρος του $L^2([-\pi, \pi], m)$ ως προς την μετρική d_2 .

Δηλαδή για κάθε $f \in \mathcal{L}^2([-\pi, \pi], m)$ υπάρχει ακολουθία (g_n) συνεχών 2π -περιοδικών συναρτήσεων ώστε

$$\int_{[-\pi, \pi]} |f - g_n|^2 dm \rightarrow 0.$$

Απόδειξη Αφού οι απλές μετρήσιμες συναρτήσεις είναι πυκνές από την προηγούμενη Πρόταση, αρκεί να υποθέσουμε ότι η f είναι απλή μετρήσιμη. Αφού ο $L^2([-\pi, \pi], m)$ είναι γραμμικός χώρος, και κάθε απλή είναι γραμμικός συνδυασμός χαρακτηριστικών, αρκεί να υποθέσουμε ότι η f είναι η χαρακτηριστική ενός μετρήσιμου συνόλου.

(i) Έστω πρώτα $F \subseteq [-\pi, \pi]$ κλειστό. Θα βρούμε $g_n \in C([-\pi, \pi])$ με $g_n(-2\pi) = 1 = g_n(2\pi)$ ώστε $\|g_n - \chi_F\|_2 \rightarrow 0$. Έστω $F_1 = F \cup \{\pi, -\pi\}$ και

$$d(t) = \inf\{|t - s| : s \in F_1\} \quad (t \in [a, b])$$

η απόσταση του t από το F_1 . Είναι γνωστό (αφού το F_1 είναι κλειστό) ότι η d είναι συνεχής και ότι $d(t) = 0$ αν και μόνον αν $t \in F_1$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ορίζουμε

$$g_n(t) = \frac{1}{1 + nd(t)} \quad (t \in [a, b]).$$

Παρατηρούμε ότι αν $t \in F_1$ τότε $g_n(t) = 1$ για κάθε n και αν $t \notin F_1$ τότε $g_n(t) \rightarrow 0$. Δηλαδή $g_n(t) \rightarrow \chi_{F_1}(t)$ για κάθε t , άρα $g_n(t) \rightarrow \chi_F(t)$ σχεδόν για κάθε t . Επίσης $|g_n(t) - \chi_F(t)|^2 \leq 4$ για κάθε t , και η σταθερή συνάρτηση 4 είναι ολοκληρώσιμη στο $[-\pi, \pi]$ (γιατί $m([-\pi, \pi]) < \infty$). Έπεται ότι

$$\int |g_n - \chi_F|^2 dm \rightarrow 0$$

από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης.

(ii) Έστω τώρα $A \in \mathcal{M}$. Από την κανονικότητα του m για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει ένα κλειστό σύνολο $F_n \subseteq A$ ώστε $m(A \setminus F_n) < \frac{1}{n^2}$. Έχουμε

$$\int |\chi_A - \chi_{F_n}|^2 dm = \int |\chi_{A \setminus F_n}|^2 dm = m(A \setminus F_n) < \frac{1}{n^2}.$$

Από το (i), υπάρχει $g_n \in C([-\pi, \pi])$ 2π -περιοδική ώστε $\|g_n - \chi_{F_n}\|_2 < \frac{1}{n}$, οπότε

$$\|g_n - \chi_A\|_2 \leq \|g_n - \chi_{F_n}\|_2 + \|\chi_{F_n} - \chi_A\|_2 < \frac{2}{n}. \quad \square$$

Πόρισμα 11.5 Ο χώρος των τριγωνομετρικών πολυωνύμων είναι πυκνός στον $L^2([-\pi, \pi], m)$ ως προς την d_2 .

Απόδειξη Αν δοθεί $f \in \mathcal{L}^2([-\pi, \pi], m)$ και $\varepsilon > 0$, βρες μια 2π -περιοδική $g \in C([-\pi, \pi])$ ώστε $\|f - g\|_2 < \varepsilon$. Από το Θεώρημα του Féjer ξέρουμε ότι $\|g - \sigma_n(g)\|_\infty \rightarrow 0$, οπότε μπορούμε να διαλέξουμε ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο $\sigma_n(g)$ ώστε $\|g - \sigma_n(g)\|_\infty < \varepsilon$. Αλλά $\|g - \sigma_n(g)\|_2 \leq \|g - \sigma_n(g)\|_\infty$, οπότε θα έχουμε $\|f - \sigma_n(g)\|_2 < 2\varepsilon$. \square

Πόρισμα 11.6 Ο χώρος $C^\infty([-\pi, \pi])$ των απεριόριστα παραγωγίσιμων συναρτήσεων είναι πυκνός στον $L^2([-\pi, \pi], m)$ ως προς την d_2 .

Απόδειξη Τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα είναι απεριόριστα παραγωγίσιμες συναρτήσεις. \square

11.3 Σειρές Fourier συναρτήσεων κλάσεως \mathcal{L}^2

Έστω $f \in \mathcal{L}^2([-\pi, \pi], m)$. Αν $e_k(t) = e^{ikt}$ όπου k ακέραιος, παρατηρούμε ότι η e_k είναι συνεχής, άρα μετρήσιμη και $|e_k| = 1$ άρα η e_k ανήκει στον $\mathcal{L}^2([-\pi, \pi], m)$, οπότε η $f e_k$ είναι ολοκληρώσιμη.

Ορισμός 11.3 (Συντελεστές Fourier) Έστω $f \in \mathcal{L}^2([-\pi, \pi], m)$.

Ορίζουμε

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f e_{-k} dm = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dm(t) = \langle f, e_k \rangle \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dm(t), \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dm(t) \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$S_n(f, t) = \sum_{k=-n}^{k=n} \hat{f}(k) e^{ikt} \quad (n \in \mathbb{N}, t \in [-\pi, \pi]).$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $S_n(f)$ είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο, άρα συνεχής και 2π -περιοδική συνάρτηση, όποια κι αν είναι η $f \in \mathcal{L}^2([-\pi, \pi], m)$.

Λήμμα 11.7 (Βέλτιστης μέσης τετραγωνικής προσέγγισης)

Έστω $f \in \mathcal{L}^2([-\pi, \pi])$ και $n \in \mathbb{N}$. Τότε για κάθε τριγωνομετρικό πολυώνυμο p βαθμού το πολύ n ισχύει

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f - p|^2 dm \geq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f - S_n(f)|^2 dm.$$

Ισότητα ισχύει αν και μόνον αν $p = S_n$.

Η **Απόδειξη** είναι λέξη προς λέξη η ίδια με την απόδειξη του Λήμματος 5.3.

Πρόταση 11.8 Αν η $f \in \mathcal{L}^2([-\pi, \pi])$, τότε

$$S_n(f) \xrightarrow{d_2} f$$

δηλαδή

$$\lim_n \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |S_n(f) - f|^2 dm = 0.$$

Απόδειξη Από το Πρόσχημα 11.5 για κάθε $\epsilon > 0$ μπορώ να βρω ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο p ώστε $d_2(f, p) < \epsilon$. Αν n είναι ο βαθμός του p , από το προηγούμενο Λήμμα θα έχω $d_2(f, S_n(f)) \leq d_2(f, p) < \epsilon$. \square

Ας θυμηθούμε ότι με το Θεώρημα 4.8 είχαμε αποδείξει ότι αν δύο **συνεχείς** 2π -περιοδικές συναρτήσεις έχουν τους ίδιους συντελεστές Fourier, τότε είναι ίσες. Αυτό δεν ισχύει για Lebesgue ολοκληρώσιμες συναρτήσεις: μπορεί να διαφέρουν σε ένα σύνολο μέτρου μηδέν. Δεν μπορεί όμως να διαφέρουν σε ένα σύνολο θετικού μέτρου, δηλαδή ορίζουν το ίδιο στοιχείο του χώρου $L^2([-\pi, \pi])$:

Θεώρημα 11.9 (Μοναδικότητα) Αν $f, g \in \mathcal{L}^2([-\pi, \pi])$ και $\hat{g}(k) = \hat{f}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ (ισοδύναμα $a_n(f) = a_n(g)$ και $b_n(f) = b_n(g)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$), τότε $f(t) = g(t)$ σχεδόν για κάθε $t \in [-\pi, \pi]$, ισοδύναμα $f \equiv g$ στον $L^2([-\pi, \pi])$.

Απόδειξη Θεωρώντας την $f - g$ στη θέση της f , αρκεί να αποδείξω ότι

$$\text{Αν } f \in \mathcal{L}^2([-\pi, \pi]) \text{ και } \hat{f}(k) = 0 \text{ για κάθε } k \in \mathbb{Z}, \\ \text{τότε } f(t) = 0 \text{ σχεδόν για κάθε } t \in [-\pi, \pi].$$

Από την Πρόταση 11.8 έχουμε ότι

$$\lim_n \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |S_n(f) - f|^2 dm = 0.$$

Αν όμως $\hat{f}(k) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ τότε $S_n(f) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και συνεπώς $\int |f|^2 dm = 0$ άρα $f(t) = 0$ σχεδόν για κάθε t . \square

Πρόταση 11.10 (Ισότητα Parseval) Αν $f \in \mathcal{L}^2([-\pi, \pi])$, τότε

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2.$$

Απόδειξη Έπεται από την αντίστοιχη ισότητα για τριγωνομετρικά πολυώνυμα (Παρατήρηση 5.5) και από το γεγονός ότι $S_n(f) \xrightarrow{d_2} f$, ακριβώς όπως στην περίπτωση των συνεχών συναρτήσεων (Πόρισμα 5.8).

Θεώρημα 11.11 (Riemann - Lebesgue) Αν $f \in \mathcal{L}^2([-\pi, \pi])$, τότε

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \hat{f}(k) = \lim_{k \rightarrow -\infty} \hat{f}(k) = 0.$$

Απόδειξη Άμεση από το γεγονός ότι

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 < \infty. \quad \square$$

Από την ισότητα Parseval έπεται ότι για κάθε $f \in \mathcal{L}^2([-\pi, \pi])$ (άρα και για κάθε συνεχή και 2π -περιοδική συνάρτηση), η ακολουθία των συντελεστών Fourier της είναι τετραγωνικά αθροίσιμη.

Από την πληρότητα του χώρου $L^2([-\pi, \pi])$ ως προς την d_2 έπεται το ακόλουθο αντίστροφο της παρατήρησης αυτής.

Πρόταση 11.12 Αν $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 < +\infty$ και $s_n(t) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikt}$ τότε υπάρχει $f \in \mathcal{L}^2([-\pi, \pi])$ ώστε $\|f - s_n\|_2 \rightarrow 0$ και μάλιστα $\hat{f}(k) = c_k$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

Απόδειξη Στην ακολουθία $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ αντιστοιχούμε την τριγωνομετρική σειρά

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}.$$

(Δεν ενδιαφερόμαστε αν η σειρά αυτή συγκλίνει για κάθε t). Θα δείξουμε ότι η σειρά αυτή συγκλίνει ως προς την d_2 , οπότε ορίζει ένα στοιχείο του χώρου $L^2([-\pi, \pi])$. Από την πληρότητα του χώρου $L^2([-\pi, \pi])$ ως προς την d_2 , αρκεί να δείξουμε ότι τα μερικά αθροίσματα της σειράς αποτελούν βασική ακολουθία.

Έστω $\epsilon > 0$. Θέτω $a_n = \sum_{k=-n}^n |c_k|^2$. Αφού $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 < +\infty$, από το κριτήριο Cauchy έχουμε ότι υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$ με $m > n \geq n_o$ να ισχύει $|a_m - a_n| < \epsilon$ δηλαδή $\sum_{n < |k| \leq m} |c_k|^2 < \epsilon$.

Από την ισότητα Parseval έχουμε

$$\sum_{n < |k| \leq m} |c_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{n < |k| \leq m} c_k e^{ikt} \right|^2 dt.$$

Παρατηρούμε όμως ότι για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$ με $m > n$,

$$s_n = \sum_{|k| \leq n} c_k e_k \quad \text{άρα} \quad s_m - s_n = \sum_{n < |k| \leq m} c_k e_k.$$

άρα

$$\|s_m - s_n\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{n < |k| \leq m} c_k e^{ikt} \right|^2 dt = \sum_{n < |k| \leq m} |c_k|^2 < \epsilon.$$

Επομένως η ακολουθία (s_n) είναι βασική στον χώρο $L^2([-\pi, \pi])$. Υπάρχει λοιπόν $f \in L^2([-\pi, \pi])$ ώστε $d_2(s_n, f) \rightarrow 0$, δηλαδή

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - s_n(t)|^2 dm(t) \rightarrow 0.$$

Έπεται τώρα από την ανισότητα Cauchy-Schwarz ότι για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, αν $n > |k|$,

$$|\hat{f}(k) - c_k| = |\langle f, e_k \rangle - \langle s_n, e_k \rangle| \leq \|f - s_n\|_2 \|e_k\|_2$$

και επειδή $\|e_k\|_2 = 1$ και $\|f - s_n\|_2 \rightarrow 0$ έχουμε τελικά $|\hat{f}(k) - c_k| = 0$. \square

12 Το Θεώρημα Riesz-Fischer

Θεώρημα 12.1 (Riesz-Fischer) Έστω (f_n) μια ακολουθία συναρτήσεων στον $\mathcal{L}^2(X, \mathcal{M}, \mu)$ που είναι βασική ως προς την $\|\cdot\|_2$. Τότε υπάρχει $f \in \mathcal{L}^2(X, \mathcal{M}, \mu)$ ώστε $f_n \rightarrow f$ ως προς την $\|\cdot\|_2$. Μάλιστα η f είναι το όριο μ -σχεδόν παντού μιας υπακολουθίας της (f_n) .

Απόδειξη (ι) Εφόσον οι διαφορές $\|f_n - f_m\|_2$ «τείνουν στο 0», υπάρχει υπακολουθία (f_{n_k}) ώστε $\sum_k \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_2 < +\infty$. Θα δείξουμε ότι μια τέτοια υπακολουθία συγχλίνει μ -σ.π. σε μια $f \in \mathcal{L}^2(X, \mathcal{M}, \mu)$.

Συγκεκριμένα, επιλέγουμε επαγωγικά γνήσια αύξουσα ακολουθία (n_k) ώστε

$$\|f_m - f_n\|_2 < \frac{1}{2^k} \quad (m, n \geq n_k) \quad (*)$$

Για ευκολία θέτουμε $h_k = f_{n_k}$,

$$g_k = |h_2 - h_1| + \dots + |h_{k+1} - h_k|$$

και

$$g = \sup_k g_k = \lim_k g_k = \sum_{k=1}^{\infty} |h_{k+1} - h_k|.$$

Έστω $\phi \in \mathcal{L}^2(X, \mathcal{M}, \mu)$. Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε

$$\int |\phi(h_k - h_{k+1})| d\mu \leq \|\phi\|_2 \|h_k - h_{k+1}\|_2 < \frac{\|\phi\|_2}{2^k}$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$, άρα

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int |\phi(h_k - h_{k+1})| d\mu \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \|\phi\|_2 = \|\phi\|_2.$$

Τότε από το Θεώρημα B. Levi,

$$\int |\phi g| d\mu = \int \sum_{k=1}^{\infty} |\phi(h_{k+1} - h_k)| d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int |\phi(h_{k+1} - h_k)| d\mu \leq \|\phi\|_2 < \infty$$

άρα η ϕg είναι σ.π. πεπερασμένη. Έπεται ότι η g είναι σ.π. πεπερασμένη, γιατί αν $g(x) = +\infty$ σε ένα μετρήσιμο σύνολο E με θετικό (πεπερασμένο) μέτρο, θέτοντας $\phi = \chi_E$ θα βρίσκαμε $\int \phi g d\mu = +\infty$. Με άλλα λόγια, υπάρχει $A \in \mathcal{M}$ με $\mu(A^c) = 0$ ώστε για κάθε $x \in A$ η ακολουθία $(g_k(x))$ να συγκλίνει σε πεπερασμένο όριο. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $x \in A$, η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} (h_{k+1}(x) - h_k(x))$$

συγκλίνει απόλυτα, άρα συγκλίνει, σε πραγματικό αριθμό. Αλλά

$$h_{k+1}(x) = h_1(x) + (h_2(x) - h_1(x)) + \dots + (h_{k+1}(x) - h_k(x)),$$

άρα η $(h_k(x))$ συγκλίνει για κάθε $x \in A$, οπότε θέτοντας $f(x) = \lim_k h_k(x) = \lim_k f_{n_k}(x)$ για $x \in A$ και $f(x) = 0$ για $x \in A^c$ έχουμε μια μετρήσιμη συνάρτηση f στο X .

(ιι) Δείχνουμε τώρα ότι η f είναι το όριο ως προς την $\|\cdot\|_2$ ολόκληρης της ακολουθίας (f_n) .

Δοθέντος $\varepsilon > 0$, επιλέγουμε k_o ώστε $\frac{1}{2^{k_o}} < \varepsilon$ οπότε από την (*) έχουμε

$$\|f_m - f_n\|_2 < \varepsilon \quad (m, n \geq n_{k_o}).$$

Συνεπώς αν $k \geq k_o$ και $m \geq n_{k_o}$ τότε

$$\|f_m - f_{n_k}\|_2 < \varepsilon.$$

Σταθεροποιούμε $m \geq n_{k_o}$ και για κάθε $j \geq k_o$ θέτουμε

$$\phi_j = \inf\{|f_m - f_{n_k}|^2 : k \geq j\}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\phi_j \leq \phi_{j+1} \quad \text{και} \quad \phi_j \leq |f_m - f_{n_j}|^2 \quad \text{άρα} \quad \int \phi_j d\mu \leq \|f_m - f_{n_j}\|_2^2 < \varepsilon^2$$

για κάθε $j \geq k_o$. Επίσης εύκολα διαπιστώνουμε² ότι (εφόσον το όριο $\lim_k |f_m(x) - f_{n_k}(x)|^2$ υπάρχει σχεδόν για κάθε x) το όριο $\lim_k \phi_j(x)$ (υπάρχει αφού η ακολουθία είναι αύξουσα και) ισούται με $\lim_k |f_m(x) - f_{n_k}(x)|^2 = |f_m(x) - f(x)|^2$ σχεδόν για κάθε x .

Από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης έχουμε τώρα, για κάθε $m \geq n_{k_o}$,

$$\begin{aligned} \|f - f_m\|_2^2 &= \int_X |f - f_m|^2 d\mu = \int_X \lim_j \phi_j d\mu \\ &= \lim_j \int_X \phi_j d\mu \leq \varepsilon^2. \quad \square \end{aligned}$$

²Έστω $\phi(x) = \lim_j \phi_j(x)$. Εφόσον $\phi_j(x) \leq |f_m(x) - f_{n_j}(x)|^2$ και $\lim_k |f_m(x) - f_{n_k}(x)|^2 = |f_m(x) - f(x)|^2$, έχουμε $\phi(x) \leq |f_m(x) - f(x)|^2$. Από την άλλη μεριά, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει k_1 ώστε $|f_m(x) - f(x)|^2 - \varepsilon < |f_m(x) - f_{n_k}(x)|^2$ για κάθε $k \geq k_1$ οπότε $|f_m(x) - f(x)|^2 - \varepsilon \leq \phi_k(x)$ για κάθε $k \geq k_1$, άρα $|f_m(x) - f(x)|^2 - \varepsilon \leq \phi(x)$ οπότε τελικά $|f_m(x) - f(x)|^2 \leq \phi(x)$ αφού το $\varepsilon > 0$ είναι αυθαίρετο.