8 Μετρήσιμες Συναρτήσεις

Ορισμός 8.1 ***Χώρος μέτρου*** *είναι μια τριάδα* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *όπου* X *είναι ένα σύνολο,* $\mathcal{M}$ *μια* σ*-άλγεβρα υποσύνόλων του* X *και* μ *ένα* σ*-προσθετικό (θετικό) μέτρο ορισμένο στην* $\mathcal{M}$.

Στα επόμενα σταθεροποιούμε έναν χώρο μέτρου $(X, \mathcal{M}, \mu)$. Θα μας απασχολήσει κυρίως το

Παράδειγμα 8.1 $X = \mathbb{R}^d$ *ή* $X = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $\mathcal{M} = \mathcal{M}(m)$ *και* $\mu = m$, *το μέτρο Lebesgue.*

Τα αποτελέσματα που ακολουθούν εφαρμόζονται όμως γενικότερα, όπως στο

Παράδειγμα 8.2 $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{M} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ *και* $m(A) = \#A$, *το πλήθος των στοιχείων του* A, *όταν είναι πεπερασμένο, και* $m(A) = \infty$, *όταν είναι άπειρο.*

Ορισμός 8.2 *Μια συνάρτηση* $s : X \to \mathbb{R}$ *λέγεται* ***απλή*** *αν το σύνολο τιμών της* $s(X)$ *είναι πεπερασμένο.*

Αν $s(X) = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ *τότε*

$$s = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k}$$

όπου $E_k = \{x \in X : s(x) = c_k\}$ *(η κανονική μορφή της* s*). Η οικογένεια* $\{E_1, E_2, \ldots E_n\}$ *είναι διαμέριση του* X.

Ορισμός 8.3 *Μια συνάρτηση* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *λέγεται* ***μετρήσιμη*** *αν για κάθε* $a \in \mathbb{R}$,

$$\{x \in X : f(x) > a\} \in \mathcal{M}.$$

Παρατηρήσεις 8.3 (ι) Αν $X = \mathbb{R}^d$ ή $X = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, κάθε συνεχής συνάρτηση είναι μετρήσιμη.

[Απόδειξη: Άσκηση.]

(ιι) Μια απλή συνάρτηση σε κανονική μορφή $s = \sum_k c_k \chi_{E_k}$ είναι μετρήσιμη αν και μόνον αν $E_k \in \mathcal{M}$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$.

Πράγματι αν υποθέσουμε ότι $c_1 < c_2 < \ldots < c_n$ και θεωρήσουμε βοηθητικά αριθμούς $b_1, \ldots, b_n$ με $c_1 < b_1 < c_2 < b_2 < \ldots < c_{n-1} < b_{n-1} < c_n$ τότε

$$\begin{aligned} E_n &= \{x \in X : s(x) > b_{n-1}\} \\ E_{n-1} &= \{x \in X : s(x) > b_{n-2}\} \setminus \{x \in X : s(x) > b_{n-1}\} \\ &\ldots \\ E_1 &= \{x \in X : s(x) > b_1\}^c. \end{aligned}$$

(ιιι) Επομένως αν οι s, t είναι απλές μετρήσιμες, το ίδιο ισχύει και για τις

$$s + t,\ s \cdot t,\ \max\{s, t\},\ \min\{s, t\},\ |s|,\ s^+,\ s^-.$$

[Απόδειξη: Άσκηση.]

Λήμμα 8.4 *Μια συνάρτηση $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι μετρήσιμη αν και μόνον αν για κάθε $a \in \mathbb{R}$ το σύνολο*

$$\{x \in X : h(x) \geq a\}$$

είναι μετρήσιμο, ισοδύναμα αν για κάθε $a \in \mathbb{R}$ το σύνολο

$$\{x \in X : h(x) < a\}$$

είναι μετρήσιμο.

Απόδειξη Παρατήρησε ότι αν η h είναι μετρήσιμη, τότε για κάθε $a \in \mathbb{R}$, αν $h(x) \geq a$ τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $h(x) > a - \frac{1}{n}$ και αντίστροφα, δηλαδή ισχύει η ισότητα

$$\{x \in X : h(x) \geq a\} = \bigcap_n \{x \in X : h(x) > a - \frac{1}{n}\}$$

και άρα το $\{x : h(x) \geq a\}$ ανήκει στην $\mathcal{M}$. Έπεται ότι το σύνολο

$$\{x \in X : h(x) < a\} = \{x : h(x) \geq a\}^c$$

ανήκει επίσης στην $\mathcal{M}$.

Αν τέλος για κάθε $b \in \mathbb{R}$ το σύνολο $\{x : h(x) < b\}$ ανήκει στην $\mathcal{M}$ τότε, επειδή

$$\{x \in X : h(x) > a\} = \left(\bigcap_n \{x \in X : h(x) < a + \frac{1}{n}\} \right)^c$$

για κάθε $a \in \mathbb{R}$, το σύνολο $\{x \in X : h(x) > a\}$ ανήκει στην $\mathcal{M}$, άρα η h είναι μετρήσιμη. $\square$

Πρόταση 8.5 *Αν (f_n) είναι ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων και οι f, g ορίζονται από τις σχέσεις $f(x) = \sup_n f_n(x)$ και $g(x) = \inf_n f_n(x)$ για κάθε $x \in X$ τότε οι f και g είναι μετρήσιμες.*

Απόδειξη (ι) Για κάθε $a \in \mathbb{R}$, αν $f(x) > a$ τότε υπάρχει n ώστε $f_n(x) > a$ και αντίστροφα, δηλαδή

$$\begin{aligned}\{x \in X : f(x) > a\} \subseteq \{x \in X : \exists n : \ f_n(x) > a\} &= \bigcup_n \{x \in X : f_n(x) > a\} \\ &\subseteq \{x \in X : f(x) > a\}\end{aligned}$$

άρα ισχύει η ισότητα

$$\{x \in X : f(x) > a\} = \bigcup_n \{x \in X : f_n(x) > a\}$$

και συνεπώς η f είναι μετρήσιμη.

(ιι) Ομοίως για κάθε $a \in \mathbb{R}$ ισχύει η ισότητα

$$\{x \in X : g(x) < a\} = \bigcup_n \{x \in X : f_n(x) < a\},$$

συνεπώς η g είναι μετρήσιμη.

Πρόταση 8.6 *Αν (f_n) είναι ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων και αν το όριο $f(x) = \lim_n f_n(x)$ υπάρχει για κάθε $x \in X$ τότε η f είναι μετρήσιμη.*

Απόδειξη Για κάθε $x \in X$ και $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$\begin{aligned}u_n(x) &= \sup\{f_k(x) : k \geq n\} = \sup\{f_n(x), f_{n+1}(x), \ldots\} \\ v_n(x) &= \inf\{f_k(x) : k \geq n\}.\end{aligned}$$

Από την προηγούμενη Πρόταση, οι u_n και v_n είναι μετρήσιμες.

Επειδή $\{f_k(x) : k \geq n\} \supseteq \{f_k(x) : k \geq n+1\}$, έχουμε $u_n(x) \geq u_{n+1}(x)$ και $v_n(x) \leq v_{n+1}(x)$. Επομένως οι ακολουθίες $(u_n(x))$ και $(v_n(x))$ συγκλίνουν. Ισχυρίζομαι ότι και οι δύο συγκλίνουν στο $f(x)$. Πράγματι, ας υποθέσουμε πρώτα ότι $f(x) \in \mathbb{R}$. Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_x \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $k \geq n_x$ να ισχύει

$$f(x) - \varepsilon < f_k(x) < f(x) + \varepsilon$$

άρα

$$f(x) - \varepsilon \le \inf\{f_k(x) : k \ge n_x\} \le \sup\{f_k(x) : k \ge n_x\} \le f(x) + \varepsilon$$
$$\text{δηλαδή} \quad f(x) - \varepsilon \le v_{n_x}(x) \le u_{n_x}(x) \le f(x) + \varepsilon.$$

Αλλά αν $n \ge n_x$, έχουμε $v_{n_x}(x) \le v_n(x)$ και $u_n(x) \le u_{n_x}(x)$ οπότε

$$f(x) - \varepsilon \le v_{n_x}(x) \le v_n(x) \le u_n(x) \le u_{n_x}(x) \le f(x) + \varepsilon$$
$$\text{άρα} \quad f(x) - \varepsilon \le v_n(x) \le u_n(x) \le f(x) + \varepsilon.$$

Στην περίπτωση $f(x) = +\infty$ η απόδειξη είναι ανάλογη: για κάθε $M > 0$ υπάρχει $n_x \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $k \ge n_x$ να ισχύει

$$M < f_k(x)$$

άρα
$$M \le \inf\{f_k(x) : k \ge n_x\} = v_{n_x}(x).$$

Αλλά για κάθε $n \ge n_x$ έχουμε $v_n(x) \ge v_{n_x}(x)$ άρα $v_n(x) \to +\infty$ οπότε $u_n(x) \to +\infty$ αφού $u_n(x) \ge v_n(x)$.

Με ανάλογο τρόπο χειριζόμαστε και την περίπτωση $f(x) = -\infty$.

Δείξαμε λοιπόν ότι

$$f(x) = \lim_n u_n(x) = \inf_n u_n(x) \quad \text{για κάθε } x \in X$$

(η (u_n) είναι φθίνουσα ακολουθία). Επειδή κάθε u_n είναι μετρήσιμη, από την προηγούμενη Πρόταση έπεται ότι και η $f = \inf_n u_n$ θα είναι μετρήσιμη. $\square$

Θεώρημα 8.7 *Έστω $f : X \to [0, +\infty]$ μια συνάρτηση. Τότε υπάρχει αύξουσα ακολουθία (s_n) απλών με $s_n(X) \subseteq [0, +\infty)$ για κάθε n τέτοια ώστε*

$$s_n(x) \to f(x) \qquad \textit{για κάθε } x \in X.$$

Αν f φραγμένη, μπορούμε να διαλέξουμε τις s_n ώστε $s_n \to f$ ομοιόμορφα στο X.

Η ιδέα της απόδειξης: Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτω

$$F_n = \{x \in X : f(x) \ge n\}$$

Χωρίζω το $[0, n)$ σε $n \cdot 2^n$ διαστήματα $[0, \frac{1}{2^n}), [\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}), \ldots, [\frac{n2^n - 1}{2^n}, \frac{n2^n}{2^n})$ και θεωρώ τις αντίστροφες εικόνες μέσω της f :

$$E_{n,i} = \left\{ x \in X : \frac{i-1}{2^n} \le f(x) < \frac{i}{2^n} \right\}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n2^n.$$

Ορίζω

$$s_n = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n}\chi_{E_{n,i}} + n\chi_{F_n}. \qquad \square$$

Θεώρημα 8.8 *Μια συνάρτηση $f :\to \overline{\mathbb{R}}$ είναι μετρήσιμη αν και μόνον αν είναι το όριο μιας ακολουθίας*[1] *(πραγματικών) μετρήσιμων απλών συναρτήσεων.*

Απόδειξη Αν $f(x) = \lim s_n(x)$ όπου s_n μετρήσιμη απλή τότε η f είναι μετρήσιμη από την Πρόταση 8.6.

Αντίστροφα, έστω f μετρήσιμη. Αν επιπλέον $f \geq 0$ τότε από το Θεώρημα 8.7 έχω $f(x) = \lim s_n(x)$ όπου

$$s_n = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n}\chi_{E_{n,i}} + n\chi_{F_n}$$

με τα $E_{n,i}$ και F_n όπως στο θεώρημα. Αφού η f είναι μετρήσιμη, κάθε $E_{n,i}$ και F_n είναι στην $\mathcal{M}$ και συνεπώς (Παρατήρηση 8.3 (ιι)) η s_n είναι μετρήσιμη.

Έπεται τώρα ότι γενικά αν $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι μετρήσιμη, τότε, επειδή οι f^+ και f^- είναι μετρήσιμες, υπάρχουν απλές μετρήσιμες συναρτήσεις g_n, h_n ώστε $f^+(x) = \lim g_n(x)$ και $f^-(x) = \lim h_n(x)$, και άρα $f(x) = \lim s_n(x)$ όπου $s_n = g_n - h_n$ είναι μετρήσιμη απλή συνάρτηση. $\square$

Συμπέρασμα Η κλάση των μετρησίμων συναρτήσεων περιέχει τις συνεχείς συναρτήσεις και επίσης είναι κλειστή ως προς τις αλγεβρικές πράξεις:

$$f, g \text{ μετρήσιμες } \;\Rightarrow\; f+g,\ f\cdot g,\ \max\{f,g\},\ \min\{f,g\},\ |f|,\ f^+,\ f^- \text{ μετρήσιμες}$$

καθώς και τα κατά σημείο όρια ακολουθιών

$$f_n\,(n \in \mathbb{N}) \text{ μετρήσιμες } \;\Rightarrow\; \sup_n f_n,\ \inf_n f_n,\ \lim_n f_n \text{ μετρήσιμες}$$

(αν το τελευταίο όριο υπάρχει).

---

[1] όχι κατ'ανάγκην μονότονης

9 Ολοκλήρωση

Ορισμός 9.1 *Έστω $s : (X, \mathcal{M}, \mu) \to \mathbb{R}$ απλή μετρήσιμη, $s(X) = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$,*

$$s = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k}.$$

Αν $E \in \mathcal{M}$, ορίζουμε

$$I_E(s) = \sum_{k=1}^{n} c_k \mu(E \cap E_k).$$

Ορισμός 9.2 *Αν $f \geq 0$ μετρήσιμη και $E \in \mathcal{M}$, ορίζουμε*

$$\int_E f d\mu = \int_E f(x) d\mu(x) = \sup\{I_E(s) : s \text{ απλή μετρήσιμη}, 0 \leq s \leq f\}.$$

Δεν αποκλείεται η περίπτωση $\int f d\mu = +\infty$.

Παρατήρηση 9.1 *Αν s απλή μετρήσιμη, τότε $\int_E s d\mu = I_E(s)$.*
[Απόδειξη: Άσκηση.]

Αν f μετρήσιμη και $E \in \mathcal{M}$, γράφω $f = f^+ - f^-$, και θεωρώ τα ολοκληρώματα $\int_E f^+ d\mu$ και $\int_E f^- d\mu$. Αν *κάποιο από τα δύο* είναι πεπερασμένο, έχει νόημα η διαφορά τους.

Ορισμός 9.3 *Έστω f μετρήσιμη και $E \in \mathcal{M}$. Αν κάποιο από τα $\int_E f^+ d\mu$ και $\int_E f^- d\mu$ (όπου $f^+ = \max\{f, 0\}$ και $f^- = -\min\{f, 0\}$) είναι πεπερασμένο, ορίζουμε*

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu.$$

Η f λέγεται ***(απολύτως) ολοκληρώσιμη ή αθροίσιμη*** *αν* και τα δύο *ολοκληρώματα $\int_E f^+ d\mu$ και $\int_E f^- d\mu$ είναι πεπερασμένα (ισοδύναμα αν $\int_E f d\mu \in \mathbb{R}$). Γράφουμε τότε $f \in \mathcal{L}(\mu)$ στο E ή $f \in \mathcal{L}(E, \mu)$.*

Παρατηρήσεις 9.2 ***(α)*** *Αν f μετρήσιμη, $E \in \mathcal{M}$, $\mu(E) < \infty$ και $f|_E$ φραγμένη, τότε $f \in \mathcal{L}(E, \mu)$.*

(β) *Αν f μετρήσιμη, $E \in \mathcal{M}$, $\mu(E) < \infty$ και $a \leq f(x) \leq b$ για κάθε $x \in E$, τότε*

$$a\mu(E) \leq \int_E f d\mu \leq b\mu(E).$$

(γ) *Αν $f, g \in \mathcal{L}(E,\mu)$ και $f(x) \le g(x)$ για κάθε $x \in E$, τότε*

$$\int_E f d\mu \le \int_E g d\mu.$$

(δ) *Αν $f \in \mathcal{L}(E,\mu)$ και $a \in \mathbb{R}$, τότε $af \in \mathcal{L}(E,\mu)$ και $\int_E af d\mu = a \int_E f d\mu$.*
(ϵ) *Αν f μετρήσιμη και $\mu(E) = 0$, τότε $f \in \mathcal{L}(E,\mu)$ και $\int_E f d\mu = 0$.*
(στ) *Αν $\mathcal{L}(E,\mu)$ και $A \in \mathcal{M}$, $A \subseteq E$, τότε $f \in \mathcal{L}(A,\mu)$.*

Σκιαγράφηση απόδειξης (α) Αν $|f| \le M$ στο E, τότε $f^+|_E \le M$ και $f^-|_E \le M$, άρα για κάθε απλή μετρήσιμη s με $0 \le s \le f^+$ έχουμε $0 \le s \le M$ στο E άρα $\int_E s d\mu \le M\mu(E)$. Έπεται ότι $\int_E f^+ d\mu < \infty$. Ομοίως για την f^-.

(β) Ισχύει $a + f^- \le f^+ \le b + f^-$ στο E. Για κάθε απλή μετρήσιμη s με $0 \le s \le f^-$ έχουμε $0 \le a + s \le f^+$ στο E και η $a + s$ είναι απλή με ολοκλήρωμα $a\mu(E) + \int_E s d\mu$, άρα $a\mu(E) + \int_E s d\mu \le \int_E f^+ d\mu$. Συνεπώς $a\mu(E) + \int_E f^- d\mu \le \int_E f^+ d\mu$.

Ομοίως για κάθε απλή μετρήσιμη t με $0 \le t \le f^+$ έχουμε $0 \le t \le b + f^-$ στο E άρα $\int_E t d\mu \le b\mu(E) + \int_E f^- d\mu$. Συνεπώς $\int_E f^+ d\mu \le b\mu(E) + \int_E f^- d\mu$.

Επειδή από το (α) όλα τα ολοκληρώματα είναι πεπερασμένα, το ζητούμενο αποδείχθηκε.

(γ) Υποθέτω πρώτα ότι $f \ge 0$ (οπότε και $g \ge 0$ στο E). Τότε για κάθε απλή μετρήσιμη s με $0 \le s \le f$ έχουμε $0 \le s \le g$ στο E άρα $\int_E s d\mu \le \int_E g d\mu$. Συνεπώς $\int_E f d\mu \le \int_E g d\mu$.

Στην γενική περίπτωση, παρατηρώ ότι $f^+ \le g^+$ και $f^- \ge g^-$. Πράγματι, αν $f^+(x) = 0$ τότε $f^+(x) = 0 \le g^+(x)$, και αν $f^+(x) > 0$ τότε $f^+(x) = f(x) \le g(x)$, άρα $g(x) > 0$ οπότε $g^+(x) = g(x) \ge f^+(x)$. Η ανισότητα $f^- \ge g^-$ προκύπτει ομοίως από τη σχέση $-g \le -f$.

Από την προηγούμενη παράγραφο έχουμε λοιπόν $\int_E f^+ d\mu \le \int_E g^+ d\mu$ και $\int_E f^- d\mu \ge \int_E g^- d\mu$ και επομένως

$$\int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu \le \int_E g^+ d\mu - \int_E g^- d\mu.$$

(δ) Η απόδειξη για $a \ge 0$ είναι εύκολη. Η σχέση $\int_E (-f) d\mu = -\int_E f d\mu$ αποδεικνύεται παρατηρώντας ότι $(-f)^+ = f^-$ και ότι $(-f)^- = f^+$.

Πρόταση 9.3 *Αν s απλή μετρήσιμη και $s \ge 0$, ορίζουμε*

$$\phi(A) = \int_A s d\mu \qquad (A \in \mathcal{M}).$$

Τότε η $\phi : \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι σ-προσθετική συνολοσυνάρτηση.

Θα δείξουμε αργότερα ότι το συμπέρασμα ισχύει για οποιαδήποτε $f \in \mathcal{L}(\mu)$.

Απόδειξη της Πρότασης Αν $A_1, A_2, \ldots$ είναι ξένα ανά δύο μετρήσιμα σύνολα και $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, πρέπει να δειχθεί ότι

$$\phi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi(A_n).$$

Έστω πρώτα $s = \chi_E$, όπου $E \in \mathcal{M}$. Τότε

$$\begin{aligned}\phi(A) &= \int_A \chi_E d\mu = I_A(\chi_E) = \mu(A \cap E) \\ &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap E)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \cap E) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi(A_n)\end{aligned}$$

από την σ-προσθετικότητα του μ.

Γενικότερα αν $s = \sum_{k=1}^{N} c_k \chi_{E_k}$ είναι σε κανονική μορφή τότε πάλι

$$\begin{aligned}\phi(A) &= \int_A s d\mu = I_A(s) = \sum_{k=1}^{N} c_k \mu(A \cap E_k) \\ &= \sum_{k=1}^{N} c_k \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \cap E_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{N} c_k \mu(A_n \cap E_k)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi(A_n). \quad \square\end{aligned}$$

Τα σημαντικότερα πλεονεκτήματα του ολοκληρώματος Lebesgue σε σχέση με το ολοκλήρωμα Riemann σχετίζονται με την εναλλαγή ορίου και ολοκληρώματος, δηλαδή με το ερώτημα, σε ποιές περιπτώσεις ισχύει ότι

$$\lim_n \int f_n d\mu = \int (\lim_n f_n) d\mu$$

(όταν το όριο $\lim_n f_n$ υπάρχει *κατά σημείο*).

Ας παρατηρήσουμε ότι η ισότητα αυτή δεν μπορεί να ισχύει ούτε για απλές συναρτήσεις (όπως θα δείξουμε με το επόμενο παράδειγμα) χωρίς κάποιες επιπλέον συνθήκες. Οι πιό σημαντικές τέτοιες συνθήκες είναι

(α) η ακολουθία (f_n) να είναι *μονότονη* (Θεώρημα 9.5 και Πόρισμα 9.10) ή

(β) η ακολουθία (f_n) να *κυριαρχείται* από μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση g, δηλαδή να ισχύει $|f_n| \leq g$ για κάθε n (Θεώρημα 9.13).

Παράδειγμα 9.4 *Έστω* $f_n = n\chi_{(0,\frac{1}{n}]}$*, δηλαδή* $f_n(x) = n$ *όταν* $0 < x \leq \frac{1}{n}$ *και* $f_n(x) = 0$ *αλλιώς. Εύκολα αποδεικνύεται ότι* $f_n(x) \to 0$ *για κάθε* $x \in \mathbb{R}$*, αλλά* $\int f_n(x)dx = 1$ *για κάθε* n*, άρα* $\int f_n(x)dx \nrightarrow 0$*.*

Παρατηρούμε ότι εδώ δεν ικανοποιείται ούτε η συνθήκη (α) ούτε η (β).

Θεώρημα 9.5 (Μονότονης Σύγκλισης) *Αν* (f_n) *ακολουθία μετρησίμων συναρτήσεων ώστε* $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \ldots$*, τότε*

$$\lim_n \int f_n d\mu = \int (\lim_n f_n) d\mu.$$

Απόδειξη Για κάθε $x \in X$ η ακολουθία $(f_n(x))$ είναι αύξουσα και συνεπώς έχει όριο $f(x) \in [0, +\infty]$. Από την Πρόταση 8.6 η f είναι μετρήσιμη, και συνεπώς το $\int f d\mu$ υπάρχει (μπορεί να είναι $+\infty$). Επειδή $f_n \leq f_{n+1} \leq f$, έχουμε $\int f_n d\mu \leq \int f_{n+1} d\mu \leq \int f d\mu$ (Παρατήρηση 9.2, (γ)). Επομένως το όριο $a \equiv \lim_n \int f_n d\mu$ υπάρχει (μπορεί να είναι ∞) και

$$a \leq \int f d\mu.$$

Μένει να δειχθεί η αντίστροφη ανισότητα. Από τον ορισμό του $\int f d\mu$ αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε απλή μετρήσιμη συνάρτηση s με $0 \leq s \leq f$ ισχύει

$$\int s d\mu \leq a.$$

Σταθεροποιούμε ένα $c \in (0, 1)$ και θα δείξουμε ότι

$$c \int s d\mu \leq a.$$

Θέτουμε

$$E_n = \{x \in X : f_n(x) \geq cs(x)\} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Παρατηρούμε ότι $E_n \in \mathcal{M}$ αφού η $f_n - cs$ είναι μετρήσιμη και $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots$ αφού $f_1 \leq f_2 \leq \ldots$.

Ισχυρισμός:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = X.$$

Πράγματι, έστω $x \in X$. Αν $f(x) = 0$ τότε $s(x) = 0$ άρα $x \in E_n$ για κάθε n. Αν πάλι $f(x) > 0$ τότε $f(x) \geq s(x) > cs(x)$, οπότε εφόσον $f_n(x) \nearrow f(x)$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $f_n(x) \geq cs(x)$, άρα $x \in E_n$. Ο ισχυρισμός αποδείχθηκε.

Θεωρούμε το μέτρο ν που ορίζεται από τη σχέση

$$\nu(E) = \int_E s d\mu, \quad E \in \mathcal{M}$$

Έχουμε

$$c\nu(E_n) = c\int_{E_n} s d\mu = \int_{E_n} cs d\mu \leq \int_{E_n} f_n d\mu \leq \int f_n d\mu.$$

Όταν $n \to \infty$, έχουμε $\nu(E_n) \to \nu(X) = \int s d\mu$ από την σ-προσθετικότητα του ν (Πρόταση 9.3 και Πρόταση 7.2). Επίσης $\int f_n d\mu \to a$. Συνεπώς $c\int s d\mu \leq a$. Αφού η ανισότητα αυτή ισχύει για κάθε $c \in (0,1)$, θεωρώντας $c \nearrow 1$ προκύπτει

$$\int s d\mu \leq a$$

για κάθε απλή μετρήσιμη συνάρτηση s με $0 \leq s \leq f$, και συνεπώς

$$\int f d\mu = \sup\left\{\int s d\mu : s \text{ απλή μετρήσιμη}, \ 0 \leq s \leq f\right\} \leq a$$

άρα τελικώς $\int f d\mu = a$. $\square$

Πόρισμα 9.6 *Αν f, g είναι μη αρνητικές και μετρήσιμες, τότε*

$$\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$

Απόδειξη Περίπτωση (ι) $f, g \geq 0$, απλές: Εδώ το ολοκλήρωμα είναι ένα απλό άθροισμα, κι έτσι το ζητούμενο προκύπτει από την αντίστοιχη ιδιότητα του αθροίσματος. Συγκεκριμένα: Αν

$$f = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i} \qquad g = \sum_{j=1}^{m} d_j \chi_{Fj}$$

όπου $\{E_i\}$ και $\{F_j\}$ είναι διαμερίσεις του X τότε

$$f = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_i \chi_{E_i \cap F_j} \qquad g = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} d_i \chi_{E_i \cap F_j}$$

$$\text{άρα} \qquad f + g = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} (c_i + d_j)\chi_{E_i \cap F_j}$$

και συνεπώς

$$\begin{aligned}\int (f+g)d\mu &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(c_i + d_j)\mu(E_i \cap F_j)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_i\mu(E_i \cap F_j) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} d_j\mu(E_i \cap F_j) = \int f d\mu + \int g d\mu.\end{aligned}$$

Περίπτωση (ιι) $f, g \geq 0$ **μετρήσιμες:** υπάρχουν τότε αύξουσες ακολουθίες από απλές μετρήσιμες μη αρνητικές συναρτήσεις $(s_n), (t_n)$ με $s_n \nearrow f$ και $t_n \nearrow g$ (Πρόταση 8.6). Από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης έχουμε $\int s_n d\mu \nearrow \int f d\mu$ και $\int t_n d\mu \nearrow \int g d\mu$. Επίσης $(s_n + t_n) \nearrow f + g$ οπότε $\int (s_n + t_n)d\mu \nearrow \int (f+g)d\mu$. Αλλά για κάθε n έχουμε $\int (s_n + t_n)d\mu = \int s_n d\mu + \int t_n d\mu$ από την Περίπτωση (ι), άρα

$$\int (f+g)d\mu = \lim \int (s_n + t_n)d\mu = \lim_n \left(\int s_n d\mu + \int t_n d\mu\right) = \int f d\mu + \int g d\mu.$$

Πρόταση 9.7 *Έστω $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ μετρήσιμη και $E \in \mathcal{M}$. Αν $f \in \mathcal{L}(E, \mu)$ τότε $|f| \in \mathcal{L}(E, \mu)$ και*

$$\left|\int_E f d\mu\right| \leq \int_E |f| d\mu.$$

Απόδειξη Έχουμε $f^+ = \max(f, 0)$ και $f^- = -\min(f, 0)$ οπότε $|f| = f^+ + f^-$. Αν $f \in \mathcal{L}(E, \mu)$ τότε $\int_E f^+ d\mu < +\infty$ και $\int_E f^- d\mu < +\infty$ άρα $\int_E f^+ d\mu + \int_E f^- d\mu < +\infty$. Αλλά από το Πόρισμα 9.6

$$\int_E |f| d\mu = \int (f^+ + f^-)d\mu = \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu < +\infty.$$

Επίσης,

$$-|f| \leq f \leq |f|$$

$$\text{άρα} \quad \int_E (-|f|)d\mu \leq \int_E f d\mu \leq \int_E |f| d\mu$$

από την Παρατήρηση 9.2 (γ). Όμως από την ίδια παρατήρηση έχουμε $\int_E (-|f|)d\mu = -\int_E |f|d\mu$ άρα τελικά

$$-\int_E |f|d\mu \leq \int_E f d\mu \leq \int_E |f|d\mu. \qquad \square$$

Πρόταση 9.8 *Έστω f μετρήσιμη, $E \in \mathcal{M}$, $g \in \mathcal{L}(E, \mu)$ και $|f| \leq g$. Τότε $f \in \mathcal{L}(E, \mu)$.*

Απόδειξη Αφού $g \in \mathcal{L}(E, \mu)$ και $|f| \leq g$ έχουμε

$$\int_E |f|d\mu \leq \int_E g d\mu < +\infty.$$

Εφόσον $f^+ \leq |f|$ έχουμε $\int_E f^+ d\mu \leq \int_E |f|d\mu < +\infty$ (Παρατήρηση 9.2 (γ)) και για τον ίδιο λόγο $\int_E f^- d\mu \leq \int_E |f|d\mu < +\infty$. Συνεπώς $f \in \mathcal{L}(E, \mu)$. $\square$

Θεώρημα 9.9 *Αν $f, g \in \mathcal{L}(\mu)$, τότε $f + g \in \mathcal{L}(\mu)$ και*

$$\int (f+g)d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$

Απόδειξη Αν $h = f + g$ έχουμε $|h| \leq |f| + |g|$ άρα, εφόσον

$$\int (|f| + |g|)d\mu = \int |f|d\mu + \int |g|d\mu < +\infty,$$

η συνάρτηση h είναι ολοκληρώσιμη. Γράφουμε

$$h = h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$$

$$\text{οπότε} \quad h^+ + f^- + g^- = f^+ + g^+ + h^-$$

όπου οι συναρτήσεις h^+, f^-, g^-, f^+, g^+, h^- είναι μη αρνητικές. Από το Πόρισμα 9.6,

$$\int h^+ d\mu + \int f^- d\mu + \int g^- d\mu = \int f^+ d\mu + \int g^+ d\mu + \int h^- d\mu.$$

Επειδή όλα τα ολοκληρώματα είναι πεπερασμένα (διότι $f, g, h \in \mathcal{L}(\mu)$), έπεται ότι

$$\int h^+ d\mu - \int h^- d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu + \int g^+ d\mu - \int g^- d\mu$$

$$\text{άρα} \qquad \int h d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$

Πόρισμα 9.10 *Αν (f_n) είναι μονότονη ακολουθία μετρησίμων συναρτήσεων με $f_n \in \mathcal{L}(\mu)$ και $f(x) = \lim_n f_n(x)$, τότε*

$$\lim_n \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

Απόδειξη Αν η (f_n) είναι αύξουσα, θέτω $g_n = f_n - f_1$. Αν είναι φθίνουσα, θέτω $g_n = f_1 - f_n$. Και στις δύο περιπτώσεις η (g_n) είναι αύξουσα ακολουθία μη αρνητικών ολοκληρώσιμων συναρτήσεων. Από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης έχουμε

$$\lim_n \int g_n d\mu = \int \lim_n g_n d\mu.$$

Στην πρώτη περίπτωση, χρησιμοποιώντας και το Θεώρημα 9.9 (εφόσον $f_n, f_1 \in \mathcal{L}(\mu)$) έπεται

$$\begin{aligned} \lim_n \left(\int f_n d\mu - \int f_1 d\mu \right) &= \lim_n \int (f_n - f_1) d\mu = \int \lim_n (f_n - f_1) d\mu \\ &= \int (f - f_1) d\mu = \int f d\mu - \int f_1 d\mu \end{aligned}$$

και στην δεύτερη περίπτωση

$$\lim_n \left(\int f_1 d\mu - \int f_n d\mu \right) = \int f_1 d\mu - \int f d\mu$$

άρα και στις δύο περιπτώσεις

$$\lim_n \int f_n d\mu = \int f d\mu. \qquad \square$$

Θεώρημα 9.11 (Beppo Levi) *Αν* $f_n \geq 0$ *μετρήσιμες και*[2] $f(x) \equiv \sum_n f_n(x)$, *τότε*

$$\int f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu.$$

Απόδειξη Θέτουμε $g_n = \sum_{k=1}^{n} f_n$. Τότε κάθε g_n είναι μη αρνητική και μετρήσιμη και η ακολουθία (g_n) αυξάνεται προς την f, άρα από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης,

$$\int g_n d\mu \to \int f d\mu.$$

Αλλά από το Πόρισμα 9.6 επαγωγικά έχουμε για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$\int g_n d\mu = \int \sum_{k=1}^{n} f_n d\mu = \sum_{k=1}^{n} \int f_n d\mu$$

και συνεπώς

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int f_n d\mu = \int f d\mu. \qquad \square$$

Πόρισμα 9.12 *Αν* f *μετρήσιμη και* $f \geq 0$ *ή* $f \in \mathcal{L}(X, \mu)$, *τότε η συνολοσυνάρτηση* ϕ *όπου*

$$\phi(A) = \int_A f d\mu, \quad A \in \mathcal{M}$$

είναι σ*-προσθετικό μέτρο.*

Απόδειξη Αν $A_1, A_2, \ldots$ είναι ξένα ανά δύο μετρήσιμα σύνολα και $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, πρέπει να δειχθεί ότι

$$\phi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi(A_n).$$

Θέτω $f_n = f\chi_{A_n}$, οπότε οι f_n είναι μετρήσιμες και $f = \sum_n f_n$ κατά σημείο. Παρατηρώ ότι

$$\int_X f_n d\mu = \int_{A_n} f d\mu.$$

[2] το όριο της σειράς υπάρχει στο $[0, +\infty]$ γιατί η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων είναι αύξουσα

Στην περίπτωση $f \geq 0$, εφαρμόζω το Θεώρημα Beppo Levi και έχω

$$\phi(A) = \int_X f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \phi(A_n).$$

Στην περίπτωση $f \in \mathcal{L}(X, \mu)$ οι συναρτήσεις f^+ και f^- έχουν και οι δύο πεπερασμένα ολοκληρώματα και εφαρμόζοντας το Θεώρημα Beppo Levi στις f^+ και f^- και το Θεώρημα 9.9 έχουμε

$$\begin{aligned}\phi(A) &= \int (f^+ - f^-) d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n^+ d\mu - \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n^- d\mu \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{A_n} f^+ d\mu - \int_{A_n} f^- d\mu \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi(A_n). \qquad \square\end{aligned}$$

Θεώρημα 9.13 (Κυριαρχημένης Σύγκλισης) *Έστω (f_n) ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων που συγκλίνει για κάθε $x \in X$ και έστω $f(x) = \lim_n f_n(x)$.*

Αν υπάρχει $g \in \mathcal{L}(\mu)$ ώστε[3] $|f_n| \leq g$ για κάθε n, τότε $f \in \mathcal{L}(\mu)$ και

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| d\mu = 0$$
$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

Απόδειξη Η f είναι μετρήσιμη διότι κάθε f_n είναι μετρήσιμη. Εφόσον $|f_n| \leq g$ και $g \in \mathcal{L}(\mu)$, έχουμε $f_n \in \mathcal{L}(\mu)$ (Πρόταση 9.8). Για τον ίδιο λόγο (εφόσον $|f| = \lim_n |f_n| \leq g$) έχουμε επίσης $f \in \mathcal{L}(\mu)$. Επομένως

$$\left| \int f_n d\mu - \int f d\mu \right| = \left| \int (f_n - f) d\mu \right| \leq \int |f_n - f| \, d\mu$$

όπου η πρώτη ισότητα προκύπτει από το θεώρημα 9.9 και η δεύτερη ανισότητα από την Πρόταση 9.7.

[3]υπενθυμίζουμε ότι η υπόθεση $|f_n| \leq g$ δεν μπορεί εν γένει να παραλειφθεί

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι

$$\int |f_n - f| \, d\mu \to 0.$$

Θέτουμε $h_n = |f_n - f|$ και παρατηρούμε ότι $0 \leq h_n \leq 2g$ και ότι $h_n(x) \to 0$ για κάθε x. Για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ με $n \geq m$ ορίζουμε

$$u_{n,m} = \max\{h_m, h_{m+1}, \ldots, h_n\}.$$

Οι συναρτήσεις αυτές είναι μετρήσιμες. Παρατηρούμε ότι για κάθε m έχουμε $u_{n,m} \leq u_{(n+1),m}$ άρα το όριο

$$u_m(x) = \lim_n u_{n,m}(x)$$

υπάρχει για κάθε x και ορίζει μετρήσιμη συνάρτηση. Επίσης από την σχέση $0 \leq h_n \leq 2g$ για κάθε n έπεται ότι $0 \leq u_{n,m} \leq 2g$ για κάθε $n \geq m$. Επομένως $u_{n,m} \in \mathcal{L}(\mu)$. Από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης,

$$\int u_m d\mu = \lim_n \int u_{n,m} d\mu.$$

Παρατηρούμε ότι $u_m = \sup\{h_m, h_{m+1}, \ldots\}$ άρα $u_m \geq u_{m+1}$ για κάθε m. Όπως στην απόδειξη της Πρότασης 8.6 βρίσκουμε[4] ότι $\lim_m u_m(x) = \lim_n h_m(x) = 0$ για κάθε $x \in X$. Εφαρμόζοντας πάλι το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης (για την ακρίβεια το Πόρισμα 9.10),

$$\lim_m \int u_m d\mu = \int (\lim_m u_m) d\mu = 0$$

Τελικά έχουμε

$$0 \leq h_m \leq u_m \qquad \text{άρα } \ 0 \leq \int h_m d\mu \leq \int u_m d\mu$$

για κάθε $m \in \mathbb{N}$ άρα η ακολουθία $\left(\int h_m d\mu\right)$ συγκλίνει στο $\lim_m \int u_m d\mu = 0$.

[4] Αν $0 \leq h_k(x) < \epsilon$ για κάθε $k \geq m_o$ τότε $0 \leq u_{m_o}(x) \leq \epsilon$ οπότε για κάθε $m \geq m_o$ έχουμε $0 \leq u_m(x) \leq u_{m_o}(x) \leq \epsilon$.

Σύνολα μέτρου μηδέν

Παρατήρηση 9.14 *Αν f μετρήσιμη και $f \geq 0$ ή $f \in \mathcal{L}(X,\mu)$, τότε για κάθε $A, B \in \mathcal{M}$ με $A \subseteq B$ και $\mu(B \setminus A) = 0$ ισχύει ότι*

$$\int_A f d\mu = \int_B f d\mu.$$

Απόδειξη Επειδή $B = A \cup (B \setminus A)$ και $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$, από το Πόρισμα 9.12 έχουμε

$$\int_B f d\mu = \int_A f d\mu + \int_{B\setminus A} f d\mu.$$

Αλλά $\mu(B \setminus A) = 0$, άρα $\int_{B\setminus A} f d\mu = 0$ από την Παρατήρηση 9.2 (ε). $\square$

Ορισμός 9.4 *Έστω $(X, \mathcal{M}, \mu)$ χώρος μέτρου και $E \in \mathcal{M}$. Θα λέμε ότι μια ιδιότητα $P(x)$ αληθεύει μ-**σχεδόν παντού στο** E **ή** μ-**σχεδόν για κάθε** $x \in E$ αν υπάρχει ένα μετρήσιμο υποσύνολο $A \subseteq E$ με $\mu(A) = 0$ ώστε η $P(x)$ να αληθεύει για κάθε $x \in E \setminus A$.*

Δύο μετρήσιμες συναρτήσεις f, g ταυτίζονται σχεδόν παντού αν και μόνον αν το σύνολο $\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$ έχει μέτρο μηδέν.

Σ'αυτή την περίπτωση η f είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνον αν η g είναι ολοκληρώσιμη, και τότε τα ολοκληρώματά τους είναι ίσα.

Δηλαδή το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης δεν μεταβάλλεται, αν αλλάξουμε τις τιμές της σ'ένα σύνολο μηδενικού μέτρου.

Παρατήρηση 9.15 *Αν η f είναι ολοκληρώσιμη και $\int_E |f| d\mu = 0$ τότε η f μηδενίζεται σχεδόν παντού στο E (και αντίστροφα).*

Απόδειξη Αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ονομάσω

$$F_n = \{x \in E : |f(x)| > \frac{1}{n}\},$$

τότε κάθε F_n είναι μετρήσιμο και

$$\int_E |f| d\mu \geq \int_{F_n} |f| d\mu \geq \frac{1}{n}\mu(F_n)$$

άρα $\mu(F_n) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επομένως $\mu(\cup_n F_n) = 0$. Αλλά

$$\bigcup_n F_n = \{x \in E : \text{υπάρχει } n \text{ ώστε } |f(x)| > \frac{1}{n}\} = \{x \in E : f(x) \neq 0\}$$

άρα η f μηδενίζεται σχεδόν παντού στο E. $\square$

Έπεται ότι δύο ολοκληρώσιμες συναρτήσεις ταυτίζονται σχεδόν παντού αν και μόνον αν $\int |f - g| d\mu = 0$.

Παρατηρούμε επίσης ότι μία μετρήσιμη συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνον αν παίρνει σχεδόν παντού πραγματικές τιμές, δηλαδή αν και μόνον αν το σύνολο $\{x \in X : f(x) = +\infty\} \cup \{x \in X : f(x) = -\infty\}$ έχει μέτρο μηδέν. [*Απόδειξη: Άσκηση.*]

Επειδή τα σύνολα μέτρου μηδέν δεν συνεισφέρουν στην ολοκλήρωση, και επειδή η ένωση *αριθμήσιμου πλήθους* συνόλων μέτρου μηδέν έχει μέτρο μηδέν, τα περισσότερα αποτελέσματα που αναφέρονται σε ολοκλήρωση εξακολουθούν να ισχύουν αν στις υποθέσεις τους η φράση «για κάθε x» αντικατασταθεί από την φράση «σχεδόν για κάθε x». Παραδείγματα αποτελούν τα Θεωρήματα Μονότονης σύγκλισης, Beppo Levi καθώς και το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης.