Καλώς ήρθατε στην Ολοκλήρωση Lebesgue χωρίς μέτρο

http://eclass.uoa.gr/courses/MATH121/

21 Ιανουαρίου 2010

Το ζεύγος $(C_{oo}(\mathbb{R}), \int)$

Ο *γραμμικός* χώρος:

$$C_{oo}(\mathbb{R}) \equiv \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : \text{συνεχής με συμπαγή φορέα}\}$$

Δηλαδή κάθε $f \in C_{oo}(\mathbb{R})$ *φέρεται* σε ένα συμπαγές διάστημα $[a(f), b(f)]$ με την έννοια ότι $t \notin [a(f), b(f)] \Rightarrow f(t) = 0$.
Αν $f \in C_{oo}(\mathbb{R})$ ορίζεται το ολοκλήρωμα Riemann

$$\int f \equiv \int_{a(f)}^{b(f)} f(t)dt.$$

Η απεικόνιση $\int : C_{oo}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C} : f \to \int f$
είναι γραμμική και *θετική*, δηλ. αν $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}_+$ τότε $\int f \in \mathbb{R}_+$.

Στόχος: Να την επεκτείνουμε σε ευρύτερη κλάση συναρτήσεων με μια *διαδικασία πλήρωσης*.

Η απεικόνιση $\|\cdot\|_1$

Πρόταση

Για κάθε $f \in C_{oo}(\mathbb{R})$,

$$\int |f| = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\int h_n : h_n \in C_{oo}(\mathbb{R}), h_n \geq 0, \sum_n h_n \geq |f|\right\}.$$

Η απόδειξη στηρίζεται σε ένα επιχείρημα συμπάγειας μέσω του Λήμματος

Λήμμα

Έστω $f_n, f \in C_{oo}(\mathbb{R})$ με $f, f_n \geq 0$ και $f_n \leq f_{n+1}$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $t \in \mathbb{R}$ έχουμε $f(t) \leq \lim_n f_n(t)$ (μπορεί νάναι $+\infty$). Τότε
(ι) Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $\sup\{f(t) - f_n(t) : t \in \mathbb{R}\} < \varepsilon$ και
(ιι) $\sup_n \int f_n \geq \int f$.

Η απεικόνιση $\|\cdot\|_1$

Ορισμός

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ τυχαία συνάρτηση. Ορίζουμε

$$\|f\|_1 \equiv \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \int h_n : h_n \in C_{oo}(\mathbb{R}), h_n \geq 0, \sum_n h_n \geq |f| \right\} \in [0, +\infty]$$

Παρατήρησε ότι δεχόμαστε άπειρα αθροίσματα.
Δείξαμε ότι αν $f \in C_{oo}(\mathbb{R})$ τότε $\|f\|_1 = \int |f|$.

Παρατηρήσεις

(α) Μπορεί μια $f \neq 0$ να έχει $\|f\|_1 = 0$. Π.χ. η $\chi_{\{0\}}$ ή η $\chi_{\mathbb{Q}}$.
(β) Μπορεί μια f να έχει $\|f\|_1 = +\infty$. Π.χ. $f(t) = t$ (στο $\mathbb{R}$).
(γ) $\|f\|_1 = \left\|\bar{f}\right\|_1 = \||f|\|_1$.

Η απεικόνιση $\|\cdot\|_1$

Πρόταση

Για κάθε $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ *και* $\lambda\in\mathbb{C}$,

- $(i)\ \|\lambda f\|_1 = |\lambda|\,\|f\|_1$ *(σύμβαση:* $0\cdot(+\infty)=0)$
- $(ii)\ \|f+g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$

Πρόταση

Αν για κάθε $t\in\mathbb{R}$, $|f(t)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(t)|$, *τότε* $\|f\|_1 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_1$.

Πόρισμα

Αν $|f| \leq |g|$ *τότε* $\|f\|_1 \leq \|g\|_1$.

Ο χώρος $\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$

Ορισμός

Μία $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ *ανήκει στον* $\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ *αν υπάρχει ακολουθία* (f_n) *με* $f_n\in C_{oo}(\mathbb{R})$ *ώστε* $\|f-f_n\|_1\to 0$.

Παρατηρήσεις

(α) $C_{oo}(\mathbb{R})\subseteq\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$.
(β) Ο $\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ *είναι γραμμικός χώρος και η* $f\to\|f\|_1$ *είναι ημινόρμα στον* $\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$, *δηλαδή*

$$(i)\ \|\lambda f\|_1=|\lambda|\,\|f\|_1$$
$$(ii)\ \|f+g\|_1\le\|f\|_1+\|g\|_1$$

(γ) Αν $f\in\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ *τότε* $\bar f,|f|\in\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ *και* $\|f\|_1=\left\|\bar f\right\|_1=\|\,|f|\,\|_1$.
(δ) Αν $f_1,\dots,f_n\in\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ *τότε*[1] $\max\{f_1,\dots,f_n\}\in\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$.
(ε) Αν $\|f\|_1=0$, *τότε* $f\in\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ *(πάρε* $f_n=0$ *για κάθε* n*).*

[1] η συνάρτηση $g=\max\{f_1,\dots,f_n\}$ ορίζεται βεβαίως κατά σημείο: $g(t)=\max\{f_1(t),\dots,f_n(t)\}$

Το ολοκλήρωμα στον $\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$

Έστω $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ και $f_n \in C_{oo}(\mathbb{R})$ με $\|f - f_n\|_1 \to 0$.

- Η $(\int f_n)_n$ είναι βασική στο $\mathbb{C}$, άρα συγκλίνει.
- Αν $g_n \in C_{oo}(\mathbb{R})$ με $\|f - g_n\|_1 \to 0$ τότε $\lim_n \int f_n = \lim \int g_n$.

Ορισμός (Το ολοκλήρωμα Lebesgue)

Για κάθε $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ ορίζουμε $I(f) \in \mathbb{C}$ ως εξής: επιλέγουμε $f_n \in C_{oo}(\mathbb{R})$ με $\|f - f_n\|_1 \to 0$ και θέτουμε

$$I(f) = \lim_n \int f_n.$$

Είναι καλά ορισμένο.

Άλλος συμβολισμός: $$I(f) = \int f dm = \int f(t) dm(t).$$

Το ολοκλήρωμα στον $\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$

Πρόταση

(α) Η απεικόνιση $I : \mathscr{L}^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ *είναι γραμμική και θετική.*
(άρα, αν $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *στον* $\mathscr{L}^1$ *με* $f \leq g$*, τότε* $I(f), I(g) \in \mathbb{R}$ *και* $I(f) \leq I(g)$*).*
(β) Αν $f \in C_{oo}(\mathbb{R})$ *τότε* $I(f) = \int f$*.*
(γ) Αν $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ *τότε* $\|f\|_1 = I(|f|)$*.*

Λήμμα

Αν $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ *τότε* $|f| \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ *και*

$$|I(f)| \leq I(|f|) = \|f\|_1 .$$

Επανάληψη

Ορισμός

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ *τυχαία συνάρτηση. Ορίζουμε*

$$\|f\|_1 \equiv \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\int h_n : h_n \in C_{oo}(\mathbb{R}), h_n \geq 0, \sum_n h_n \geq |f|\right\} \in [0,+\infty]$$

Ορισμός

Μία $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ *ανήκει στον* $\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ *αν υπάρχει ακολουθία* (f_n) *με* $f_n \in C_{oo}(\mathbb{R})$ *ώστε* $\|f-f_n\|_1 \to 0$.

Ορισμός

Για κάθε $f\in\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ *ορίζουμε* $I(f)\in\mathbb{C}$ *ως εξής:*
επιλέγουμε $f_n \in C_{oo}(\mathbb{R})$ *με* $\|f-f_n\|_1 \to 0$ *και θέτουμε*

$$I(f)=\lim_n \int f_n.$$

Τα βασικά Θεωρήματα

Θεώρημα (Πληρότητα)

Αν $f_n \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ *και για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει* $n_o \in \mathbb{N}$ *ώστε* $\|f_n - f_m\|_1 < \varepsilon$ *όταν* $n, m \geq n_o$,
τότε υπάρχει $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ *(μάλιστα υπάρχουν πολλές) ώστε* $\|f_n - f\|_1 \to 0$.

Θεώρημα (Μονότονη σύγκλιση)

Έστω $f_n \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ *με* $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \ldots$. *Υποθέτουμε ότι για κάθε* $t \in \mathbb{R}$ *το όριο* $f(t) = \lim_n f_n(t)$ *υπάρχει. Αν* $\sup_n I(f_n) < \infty$ *τότε* $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ *και*

$$I(\lim_n f_n) = \lim_n I(f_n).$$

Παράδειγμα

Αν $f = \chi_{\mathbb{Q}}$ *τότε* $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ *και* $I(f) = 0$.

Τα βασικά Θεωρήματα

Θεώρημα (Beppo Levi)

Έστω $g_n \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ *με* $g_n \geq 0$. *Υποθέτουμε ότι για κάθε* $t \in \mathbb{R}, \sum_n g_n(t) < \infty$. *Αν* $\sum_n I(g_n) < \infty$ *τότε* $\sum_n g_n \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ *και*

$$I(\sum_n g_n) = \sum_n I(g_n).$$

Η εναλλαγή ορίου και ολοκλήρωσης δεν ισχύει γενικά:

Παράδειγμα (το «καπέλο της μάγισσας»)

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ n^2(\frac{1}{n} - |x|), & 0 < |x| \leq \frac{1}{n} \\ 0, & |x| > \frac{1}{n} \end{cases}$$

Εδώ κάθε f_n *είναι Riemann-ολοκληρώσιμη και* $\lim_n f_n(x) = 0$ *για κάθε* x. *Όμως* $\int f_n = 1$ *για κάθε* n *άρα* $\lim_n \int f_n \neq 0$.

Τα βασικά Θεωρήματα

Θεώρημα (Κυριαρχημένη σύγκλιση)

Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f_n \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$. *Υποθέτουμε ότι υπάρχει* $g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ *ώστε* $|f_n| \le g$ *για κάθε* n. *Αν για κάθε* $t \in \mathbb{R}$ *το όριο* $f(t) = \lim_n f_n(t)$ *υπάρχει τότε* $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$,

$$I(\lim_n f_n) = \lim_n I(f_n) \;\; \textit{και} \quad \lim_n \|f_n - f\|_1 = 0.$$

Σύνολα μέτρου μηδέν

Ορισμός

Ένα $A \subset \mathbb{R}$ ***έχει μέτρο μηδέν*** *αν για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχουν διαστήματα* $J_n \subseteq \mathbb{R}$ *με* $\sum_n m(J_n) < \varepsilon$ *ώστε* $A \subseteq \bigcup_n J_n$.

Μια ιδιότητα ισχύει ***σχεδόν παντού*** *αν το σύνολο των σημείων που δεν ισχύει έχει μέτρο μηδέν.*

Πρόταση

Αν $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, *τότε:* $\|h\|_1 = 0 \iff h = 0$ *σχεδόν παντού.*
Στην περίπτωση αυτή $h \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$.

Πόρισμα

Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. *Τότε*

$$\|f - g\|_1 = 0 \iff f = g \text{ σχεδόν παντού.}$$

Στην περίπτωση αυτή η f *ανήκει στον* $\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ *αν και μόνον αν η* g *ανήκει στον* $\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$.

Ολοκλήρωμα Lebesgue και ολοκλήρωμα Riemann

Θεώρημα

Μια φραγμένη συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν και μόνον αν είναι σχεδόν παντού συνεχής, αν δηλαδή το σύνολο των ασυνεχειών της έχει μέτρο μηδέν.*

Τότε η f *είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη και τα δύο ολοκληρώματα συμπίπτουν, δηλαδή* $\int f(t)dm(t) = \int_a^b f(t)dt.$

Η απεικόνιση $f \to \|f\|_2$

Ορισμός

Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *θέτουμε*

$$\|f\|_2 = \left\|f^2\right\|_1^{1/2}$$

Πρόταση

Αν $f, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *και* $\lambda \in \mathbb{C}$ *έχουμε*

1. *αν* $\|f_1\|_2 < \infty$ *και* $\|f_2\|_2 < \infty$ *τότε* $\|f_1 f_2\|_1 \leq \|f_1\|_2 \|f_2\|_2 < \infty$
2. $\|\lambda f\|_2 = |\lambda| \, \|f\|_2$
3. *αν* $|f| \leq \sum\limits_n |f_n|$ *τότε* $\|f\|_2 \leq \sum\limits_n \|f_n\|_2$.

Πόρισμα

(α) $\|f_1 + f_2\|_2 \leq \|f_1\|_2 + \|f_2\|_2$.
(β) *Αν* $|f| \leq |g|$, *τότε* $\|f\|_2 \leq \|g\|_2$.

Ο χώρος $\mathscr{L}^2(\mathbb{R})$

Ορισμός

Μία $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ *ανήκει στον* $\mathscr{L}^2(\mathbb{R})$ *αν υπάρχει ακολουθία* (f_n) *με* $f_n\in C_{oo}(\mathbb{R})$ *ώστε* $\|f-f_n\|_2\to 0$.

Πρόταση

(α) *Ο* $\mathscr{L}^2(\mathbb{R})$ *είναι γραμμικός χώρος και η* $\|\cdot\|_2$ *είναι ημινόρμα στον* $\mathscr{L}^2(\mathbb{R})$.

(β) *Αν* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, *τότε* $\|f\|_2=0$ *αν και μόνον αν* $f(x)=0$ *σχεδόν για κάθε* x. *Σ΄ αυτήν την περίπτωση, η* f *ανήκει στον* $\mathscr{L}^2(\mathbb{R})$.

Πρόταση

Αν $f\in C_{oo}(\mathbb{R})$ *και* $g\in\mathscr{L}^2(\mathbb{R})$, *τότε* $f\in\mathscr{L}^2(\mathbb{R})$ *και* $fg\in\mathscr{L}^2(\mathbb{R})$, *μάλιστα* $\|fg\|_2\le\|f\|_\infty\|g\|_2$.
Δηλαδή $C_{oo}(\mathbb{R})\subseteq\mathscr{L}^2(\mathbb{R})$ *και* $C_{oo}(\mathbb{R})\mathscr{L}^2(\mathbb{R})\subseteq\mathscr{L}^2(\mathbb{R})$.

Παρατήρηση

(α) *Αν* $K \subseteq \mathbb{R}$ *είναι φραγμένο διάστημα*[2] *τότε* $\mathscr{L}^2(K) \subsetneqq \mathscr{L}^1(K)$ *(όπου* $\mathscr{L}^p(K)(p=1,2)$ *είναι ο χώρος των συναρτήσεων του* $\mathscr{L}^p(\mathbb{R})$ *που μηδενίζονται έξω από το* K*).*
(β) *Γενικά ούτε ο* $\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ *περιέχεται στον* $\mathscr{L}^2(\mathbb{R})$ *ούτε ο* $\mathscr{L}^2(\mathbb{R})$ *στον* $\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$*.*

Πρόταση

Αν $f,g \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R})$ *τότε* $fg \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$*.*

Ορισμός

Αν $f,g \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R})$ *ορίζουμε* $\langle f,g\rangle = \int f\bar{g}\,dm$*.*

---

[2] το συμπέρασμα ισχύει γενικότερα όταν το K είναι συμπαγές υποσύνολο

Ο χώρος $\mathscr{L}^2(\mathbb{R})$

Θεώρημα (πληρότητα)

Αν μια ακολουθία (f_n) *στοιχείων του* $\mathscr{L}^2(\mathbb{R})$ *είναι «βασική ως προς την* $\|\cdot\|_2$*», αν δηλαδή για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει* $n_o \in \mathbb{N}$ *ώστε* $\|f_n - f_m\|_2 < \varepsilon$ *για κάθε* $n, m \geq n_o$*, τότε υπάρχει (όχι μοναδική)* $f \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R})$ *ώστε* $\|f - f_n\|_2 \to 0$.

Λήμμα

Ο χώρος των τριγωνομετρικών πολυωνύμων (άρα και ο χώρος των 2π-*περιοδικών συνεχών συναρτήσεων) είναι πυκνός υπόχωρος του* $\mathscr{L}^2([-\pi, \pi])$ *ως προς την* $\|\cdot\|_2$.
Το ίδιο ισχύει για τον $(\mathscr{L}^1([-\pi, \pi]), \|\cdot\|_1)$.

Σειρές Fourier συναρτήσεων κλάσεως $\mathscr{L}^2$

Συμβολισμοί

$$\|f\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|dm(t), \quad \|g\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g(t)|^2 dm(t)$$

$$\langle g, h\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g\bar{h}dm,\ f \in \mathscr{L}^1([-\pi,\pi]),\ g, h \in \mathscr{L}^2([-\pi,\pi]).$$

Ορισμός (Συντελεστές Fourier)

Έστω $f \in \mathscr{L}^1([-\pi,\pi])$. *Ορίζουμε*

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f e_{-k} dm = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dm(t) \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dm(t),\ b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)dm(t) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

$$S_n(f,t) = \sum_{k=-n}^{k=n} \hat{f}(k)e^{ikt} \quad (n \in \mathbb{N},\ t \in [-\pi,\pi]).$$

Σειρές Fourier συναρτήσεων κλάσεως $\mathscr{L}^2$

Λήμμα (Βέλτιστης μέσης τετραγωνικής προσέγγισης)

Έστω $f \in \mathscr{L}^2([-\pi,\pi])$ και $n \in \mathbb{N}$. Τότε για κάθε τριγωνομετρικό πολυώνυμο p βαθμού το πολύ n ισχύει

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f-p|^2 dm \geq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f-S_n(f)|^2 dm$$

$$\text{δηλαδή } \|f-p\|_2 \geq \|f-S_n(f)\|_2 .$$

Ισότητα ισχύει αν και μόνον αν $p = S_n$.
Ειδικότερα αν $m \leq n$ τότε $\quad \|f-S_m(f)\|_2 \geq \|f-S_n(f)\|_2$.

Πρόταση

Αν η $f \in \mathscr{L}^2([-\pi,\pi])$, τότε $\qquad S_n(f) \xrightarrow{\|\cdot\|_2} f$ *δηλαδή*

$$\lim_n \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|S_n(f)-f|^2 dm = 0.$$

Σειρές Fourier συναρτήσεων κλάσεως $\mathscr{L}^2$

Θεώρημα (Μοναδικότητα)

Αν $f, g \in \mathscr{L}^2([-\pi,\pi])$ *και* $\hat{g}(k) = \hat{f}(k)$ *για κάθε* $k \in \mathbb{Z}$ *(ισοδύναμα* $a_n(f) = a_n(g)$ *και* $b_n(f) = b_n(g)$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$*), τότε* $f(t) = g(t)$ *σχεδόν για κάθε* $t \in [-\pi,\pi]$. [3]

Πρόταση

Αν $f, g \in \mathscr{L}^2([-\pi,\pi])$*, τότε*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\bar{g} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)\overline{\hat{g}(k)}$$

$$\text{και } \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2$$

(Ισότητα Parseval)

---

[3] ισοδύναμα, $[f] \equiv [g]$ στον $L^2([-\pi,\pi])$

Σειρές Fourier συναρτήσεων κλάσεως $\mathscr{L}^2$

Θεώρημα (Riemann - Lebesgue)

Αν $f \in \mathscr{L}^1([-\pi,\pi])$, *τότε*

$$\lim_{k \to +\infty} \hat{f}(k) = \lim_{k \to -\infty} \hat{f}(k) = 0.$$

Πρόταση

Αν $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 < +\infty$ *τότε υπάρχει* $f \in \mathscr{L}^2([-\pi,\pi])$ *ώστε* $\hat{f}(k) = c_k$ *για κάθε* $k \in \mathbb{Z}$. *Μάλιστα αν* $s_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}$ *ισχύει ότι* $\|f - s_n\|_2 \to 0$.

Πρόταση

Αν $f \in \mathscr{L}^1$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $-\hat{f}(-n) = \hat{f}(n) \geq 0$ τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \hat{f}(n) < \infty.$$

Κατά συνέπεια η $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin kt}{\log k}$ δεν είναι σειρά Fourier.

Πρόταση

Έστω $a_n \geq 0$, $a_n \to 0$ και $a_n \leq \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1})$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
Τότε υπάρχει $f \in \mathscr{L}^1([-\pi, \pi])$ με $\quad \hat{f}(k) = a_{|k|} \quad$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

Επομένως, η $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos kt}{\log k}$ είναι σειρά Fourier κάποιας συνάρτησης που ανήκει στον $\mathscr{L}^1([-\pi, \pi])$ (αλλα όχι στον $\mathscr{L}^2([-\pi, \pi])$).