Ασκήσεις Ι: Σειρές Fourier

Παράδοση: Δευτέρα 26 Οκτωβρίου 2009

Άσκηση 1 Δείξτε ότι η οικογένεια συναρτήσεων $\{e_k : k \in \mathbb{Z}\}$, όπου $e_k(x) = e^{ikx}$, $x \in \mathbb{R}$, είναι γραμμικά ανεξάρτητη. Ίδια ερώτηση για την οικογένεια $\{f_n, g_m : n = 1, 2, \dots, m = 0, 1, \dots\}$ όπου $f_n(x) = \sin nx$ και $g_m(x) = \cos mx$.

Άσκηση 2 Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι 2π-περιοδική και

$$S(f, x) \equiv \frac{a_o(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx) \ , \qquad S_c(f, x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx}$$

δείξτε ότι (κατάλληλα) μερικά αθροίσματα των δύο αυτών σειρών ταυτίζονται.

Άσκηση 3 Αν μια ολοκληρώσιμη 2π-περιοδική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι άρτια, τότε η σειρά Fourier της είναι σειρά συνημιτόνων (δηλαδή $b_n = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$). Αν είναι περιττή, τότε η σειρά Fourier της είναι σειρά ημιτόνων (δηλαδή $a_n = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$). Αν η f παίρνει πραγματικές τιμές, τότε $c_{-k} = \overline{c_k}$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

Άσκηση 4 Να εξετασθεί αν συγκλίνει η τριγωνομετρική σειρά

$$\frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \right)$$

και να βρεθεί το όριό της, αν υπάρχει.

Άσκηση 5 Δίδονται οι συναρτήσεις

$$\begin{aligned} f_1 &: (0, 2\pi] \to \mathbb{R} \text{ με } f_1(t) = t, \qquad f_2 : [-\pi, \pi) \to \mathbb{R} \text{ με } f_2(t) = t, \\ f_3 &: [0, 2\pi) \to \mathbb{R} \text{ με } f_3(t) = t^2 - \pi^2, \quad f_4 : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R} \text{ με } f_4(t) = t^2 - \pi^2. \end{aligned}$$

Να επεκταθούν περιοδικά στο $\mathbb{R}$ και να βρεθούν οι σειρές Fourier τους. Να εξετασθεί αν οι σειρές αυτές συγκλίνουν και πού.

Άσκηση 6 Αν η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι ολοκληρώσιμη και 2π-περιοδική, τότε

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \int_I f(t) dt$$

όπου $I \subseteq \mathbb{R}$ οποιοδήποτε διάστημα μήκους 2π. Επομένως, $\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_I f(t) e^{-ikt} dt$.

Άσκηση 7 Αν είναι γνωστή η σειρά Fourier μιας 2π-περιοδικής συνάρτησης $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, να βρεθούν οι σειρές Fourier των συναρτήσεων $g_1(t) = g(t) - a$, $g_2(t) = g(t - b)$, $g_3(t) = e^{imt} g(t)$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$ και $m \in \mathbb{Z}$.

Άσκηση 8 Αν $D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}$ είναι ο λεγόμενος «πυρήνας του Dirichlet», δείξτε ότι υπάρχει σταθερά c ώστε

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt \geq c \log n.$$

[Υπόδειξη: $|D_n(x)| \geq c \frac{|\sin((N+1/2)x)|}{|x|}$.]

Άσκηση 9 Υποθέτουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ συγκλίνει *ομοιόμορφα* στο $[0, 2\pi]$ (ισοδύναμα, στο $\mathbb{R}$) και θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$. Να αποδειχθεί ότι $a_n(f) = 0 \, (n = 0, 1, \dots)$ και $b_m(f) = b_m \, (m = 1, 2, \dots)$. Δηλαδή, η f είναι ίση με τη σειρά Fourier της.
Δώστε ένα παράδειγμα μιας 2π-περιοδικής συνάρτησης g με συγκλίνουσα σειρά Fourier $S(g)$ που όμως $g \neq S(g)$.

Άσκηση 10 Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι 2π-περιοδική και δυο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη (γράφουμε $f \in C^2$) τότε οι f' και f'' είναι 2π-περιοδικές και φραγμένες. Επίσης (α) υπάρχει σταθερά c ώστε $|\hat{f}(k)| \leq \frac{c}{|k|}$ όταν $k \neq 0$ και άρα $\lim_{|k| \to \infty} \hat{f}(k) = 0$. (β) Υπάρχει σταθερά d ώστε $|\hat{f}(k)| \leq \frac{c}{|k|^2}$ όταν $k \neq 0$ και άρα η σειρά Fourier της f συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$. Μπορούμε να βρούμε το άθροισμα της σειράς;

Άσκηση 11 Αν $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sin kx$, εξετάστε αν η ακολουθία (s_n) συγκλίνει *ομοιόμορφα* στο $(0, 2\pi)$. (Σημειώστε ότι η (s_n) **είναι** ομοιόμορφα φραγμένη στο διάστημα αυτό.) !!
Μπορείτε να διατυπώσετε ένα γενικότερα συμπέρασμα για την ομοιόμορφη ή μη σύγκλιση μιάς ακολουθίας ομοιόμορφα συνεχών συναρτήσεων σ΄ ένα ανοικτό διάστημα;