605. Ανάλυση Fourier και Ολοκλήρωμα Lebesgue – 28/4/2018

1. (2μ) (α) Έστω $A \subseteq E \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$. Αν τα A, B είναι μετρήσιμα και $\lambda(B \setminus A) = 0$, αποδείξτε ότι το E είναι μετρήσιμο.

(β) Έστω E μη μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιος ώστε: αν B, C είναι μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ και $E \subseteq B$ και $\mathbb{R} \setminus E \subseteq C$ τότε $\lambda(B \cap C) \geqslant \delta$.

2. (2μ) (α) Έστω $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια αρίθμηση του $\mathbb{Q} \cap [0,1]$. Θεωρούμε το σύνολο

$$A := \bigcap_{k=1}^{\infty} \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(q_n - \frac{1}{2^n k}, q_n + \frac{1}{2^n k} \right) \right).$$

Αποδείξτε ότι το A είναι υπεραριθμήσιμο G_δ-υποσύνολο του $[0,1]$ το οποίο περιέχει το $\mathbb{Q} \cap [0,1]$, και ότι $\lambda(A) = 0$.

(β) Εξετάστε αν υπάρχει κλειστό υπεραριθμήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ το οποίο να μην περιέχει ρητούς.

3. (2μ) Εξετάστε αν ισχύουν τα εξής:

(α) Αν $f_n \in L_1[0,1]$ και $\|f_n\|_1 < \frac{1}{n^2}$ τότε $f_n \to 0$ σχεδόν παντού.

(β) Αν η $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη τότε $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$.

4. (2μ) (α) Έστω $f_n, f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις με $f_n \to f$ και $\int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι, για κάθε μετρήσιμο $E \subseteq \mathbb{R}$,

$$\lim_{n \to \infty} \int_E f_n \, d\lambda = \int_E f \, d\lambda.$$

(β) Έστω $g : [0,1] \to [0, \infty)$ μετρήσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε $A = \{x \in [0,1] : g(x) < 1\}$ και $B = \{x \in [0,1] : g(x) > 1\}$. Υπολογίστε το

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 \frac{g(x)^n}{1 + g(x)^n} \, d\lambda$$

συναρτήσει των $\lambda(A)$ και $\lambda(B)$.

5. (2μ) (α) Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $0 < \lambda(E) < \infty$. Ορίζουμε $f = \chi_E$ και για κάθε $t \in \mathbb{R}$ θεωρούμε την $f_t(x) = f(t + x)$, δηλαδή $f_t = \chi_{E-t}$. Αποδείξτε ότι

$$\|f - f_t\|_2^2 = 2(\lambda(E) - \lambda(E \cap (E - t))), \quad t \in \mathbb{R}.$$

(β) Θεωρώντας γνωστό το ότι $\lim\limits_{t \to 0} \|f - f_t\|_2 = 0$ αποδείξτε ότι το σύνολο $E - E = \{x - y : x, y \in E\}$ περιέχει ανοικτό διάστημα με κέντρο το 0.

6. (3μ) (α) Έστω $p > 1$ και $f_n \in L_p[0,1]$ τέτοιες ώστε $\|f_n\|_p \leqslant 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $E \subseteq [0,1]$ μετρήσιμο και $\lambda(E) < \delta$ τότε $\int_E |f_n| d\lambda < \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(β) Έστω $g : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι

$$\int_{\mathbb{R}} g \, d\lambda = \int_0^{\infty} \lambda(\{x : g(x) \geqslant t\}) \, dt.$$

(γ) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: υπάρχει $C_1 > 0$ ώστε $\lambda(\{x : |f(x)| \geqslant t\}) \leqslant \frac{C_1}{t^2}$ για κάθε $t > 0$. Αποδείξτε ότι: υπάρχει $C_2 > 0$ ώστε, για κάθε μετρήσιμο E με $0 < \lambda(E) < \infty$,

$$\int_E |f(x)| \, dx \leqslant C_2 \sqrt{\lambda(E)}.$$

Καλή Επιτυχία!