605. Ανάλυση Fourier και Ολοκλήρωμα Lebesgue – 1/6/2018

1. (1.5μ) (α) Έστω (E_n) ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ με την ιδιότητα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) < \infty.$$

Αποδείξτε ότι $\lambda\big(\limsup_n E_n\big) = 0$.

[*Υπενθύμιση:* $\limsup_n E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$.]

(β) Θεωρούμε μια αρίθμηση $q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$ των ρητών αριθμών. Αποδείξτε ότι σχεδόν κάθε $x \in \mathbb{R}$ (ως προς το μέτρο Lebesgue) έχει την εξής ιδιότητα: υπάρχει $k = k(x) \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε για κάθε $n \geqslant k$ να ισχύει $|x - q_n| \geqslant 1/n^2$.

2. (1.5μ) (α) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Εξετάστε αν η f' είναι μετρήσιμη συνάρτηση.

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση και $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε: για κάθε $Z \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(Z) = 0$ το σύνολο $\phi^{-1}(Z)$ είναι μετρήσιμο. Αποδείξτε ότι η $f \circ \phi$ είναι μετρήσιμη.

3. (2μ) (α) Έστω $f \in L_1(\mathbb{R})$ και $t \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η $g(x) = f(x+t)$ είναι ολοκληρώσιμη και $\int g\, d\lambda = \int f\, d\lambda$.

(β) Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $M > 0$ και $p > 1$ τέτοια ώστε $\lambda(\{x : |f(x)| \geqslant t\}) \leqslant \frac{M}{t^p}$ για κάθε $t > 0$. Αποδείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη.

4. (1μ) Έστω $f : [0,1] \to [0,\infty)$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \sqrt[n]{f(x)}\, d\lambda(x) = \lambda(\{x : f(x) > 0\}).$$

5. (1.5μ) Έστω $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση με $f(x) = e^x$ στο $[-\pi, \pi)$. Αποδείξτε ότι η σειρά Fourier της f είναι η

$$S(f,x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k (e^{\pi} - e^{-\pi})}{2\pi(1-ik)}\, e^{ikx}$$

και χρησιμοποιώντας την ταυτότητα του Parseval αποδείξτε ότι

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2+1} = \frac{\pi(e^{\pi} + e^{-\pi})}{e^{\pi} - e^{-\pi}} = \pi \cdot \coth \pi.$$

6. (2μ) (α) Έστω $f, g \in L_2(\mathbb{R})$. Αποδείξτε ότι η συνέλιξη $f * g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ των f και g είναι φραγμένη και συνεχής συνάρτηση.

(β) Ορίζουμε $Q_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $Q_n(x) = \frac{1}{\gamma_n}(1-x^2)^n\, \chi_{[-1,1]}(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, όπου $\gamma_n = \int_{-1}^{1}(1-t^2)^n dt$. Αποδείξτε πλήρως ότι η $\{Q_n\}_{n\geqslant 1}$ είναι οικογένεια καλών πυρήνων και ότι $f * Q_n \longrightarrow f$ ομοιόμορφα για κάθε φραγμένη συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

7. (1.5μ) Έστω $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ Lipschitz συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\alpha > 0$ τέτοιος ώστε $|k\widehat{f}(k)| \leqslant \alpha$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Χρησιμοποιώντας αυτή την παρατήρηση αποδείξτε ότι $\sup_n \|s_n(f)\|_\infty < \infty$.

[*Υπόδειξη:* Για το δεύτερο ερώτημα αποδείξτε πρώτα ότι $\sup_n \|\sigma_n(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$.]

8. (1μ) Έστω $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση και $\alpha \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $\alpha/\pi \notin \mathbb{Q}$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f(x + k\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. [*Υπόδειξη.* Αποδείξτε πρώτα το ζητούμενο για την $f_n(t) = e^{int}$, $n \in \mathbb{Z}$.]

Καλή Επιτυχία!