Ανάλυση Fourier και Ολοκλήρωμα Lebesgue – 13/6/2015

1. (1 μον.) Έστω $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$ τέτοια ώστε: υπάρχει ανοικτό $G \subseteq \mathbb{R}^d$ με $A \subseteq G$ και $G \cap B = \emptyset$. Αποδείξτε ότι

$$\lambda^*(A \cup B) = \lambda^*(A) + \lambda^*(B).$$

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω αποδείξτε ότι: αν $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$ και $\mathrm{dist}(A, B) > 0$ τότε

$$\lambda^*(A \cup B) = \lambda^*(A) + \lambda^*(B).$$

2. (1 μον.) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση και έστω ότι η f' είναι συνεχής. Αποδείξτε ότι: αν $E \subseteq \mathbb{R}$ και $\lambda(E) = 0$ τότε $\lambda(f(E)) = 0$.

3. (1.5 μον.) (α) Δείξτε ότι αν η $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και η $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι Borel μετρήσιμη, τότε η $h \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι Borel μετρήσιμη.

(β) Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση Cantor-Lebesgue, βρείτε μια συνεχή συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και μια Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε η $h \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ να μην είναι Lebesgue μετρήσιμη.

(γ) Δώστε παράδειγμα συναρτήσεων $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ οι οποίες ικανοποιούν το εξής: οι g και h είναι συνεχείς σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$ αλλά η $g \circ h$ είναι ασυνεχής σε κάθε $x \in \mathbb{R}$.

4. (1 μον.) Έστω (f_n), (g_n) και g στον $L_1(\mathbb{R}^d)$. Υποθέτουμε ότι $|f_n| \leqslant g_n$, $g_n \to g$ και ότι $\int g_n \, d\lambda \to \int g \, d\lambda$. Αν $f : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ και $f_n \to f$, αποδείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και ότι

$$\int f_n \, d\lambda \to \int f \, d\lambda.$$

[*Υπόδειξη.* Μιμηθείτε την απόδειξη του θεωρήματος κυριαρχημένης σύγκλισης.]

5. (1.5 μον.) (α) Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$, έστω $r \geqslant 1$ και έστω $f : E \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι

$$\int |f|^r = r \int_0^\infty t^{r-1} \lambda(\{x \in E : |f(x)| \geqslant t\}) \, dt.$$

(β) Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ με $0 < \lambda(E) < \infty$ και έστω $f : E \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $p > 1$ και σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε

$$\lambda(\{x \in E : |f(x)| \geqslant t\}) \leqslant \frac{C}{t^p}$$

για κάθε $t > 0$. Δείξτε ότι $f \in L_r(E)$ για κάθε $1 \leqslant r < p$.

6. (1.5 μον.) Έστω $s_1 < s_2 < \cdots < s_n < s_{n+1} < \cdots$ γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών. Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ με

$$f_m(x) = \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} e^{i s_n x}.$$

(α) Αποδείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f_{k^2}(x)|^2 d\lambda(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty.$$

(β) Αποδείξτε ότι: αν $k^2 \leqslant m < (k+1)^2$ τότε

$$\left| f_m(x) - \frac{k^2}{m} f_{k^2}(x) \right| \leqslant \frac{2}{\sqrt{m}}.$$

(γ) Αποδείξτε ότι $f_m(x) \to 0$ σχεδόν παντού.

7. (1 μον.) Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Αποδείξτε ότι:

(α) Αν $f(x+\pi) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε $\widehat{f}(k) = 0$ για κάθε περιττό ακέραιο k.

(β) Αν η f παίρνει πραγματικές τιμές τότε $\overline{\hat{f}(k)} = \hat{f}(-k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

8. (1.5 μον.) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση και έστω $\alpha \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $\alpha/\pi \notin \mathbb{Q}$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f(x+k\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t)\, dt$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. [*Υπόδειξη.* Αποδείξτε πρώτα το ζητούμενο για την $f_n(t) = e^{int}$, $n \in \mathbb{Z}$.]

9. (1 μον.) (α) Έστω $f \in L_\infty(\mathbb{T})$. Δείξτε ότι, για κάθε $x \in \mathbb{T}$ και $n \geqslant 2$ ισχύει

$$|s_n(f,x)| \leqslant C \cdot \ln n \, \|f\|_\infty,$$

όπου $C > 0$ απόλυτη σταθερά.

(β) Έστω $f \in L_\infty(\mathbb{T})$ και $A > 0$ με την ιδιότητα: $|k\widehat{f}(k)| \leqslant A$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Δείξτε ότι, για κάθε n και για κάθε $x \in \mathbb{T}$ ισχύει

$$|s_n(f,x)| \leqslant \|f\|_\infty + 2A.$$

[*Υπόδειξη.* Θεωρήστε την διαφορά $s_n(f,x) - \sigma_{n+1}(f,x)$.]

10. (1 μον.) Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = |x|$ και την ταυτότητα του Parseval, δείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96} \qquad \text{και} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Καλή Επιτυχία!