Το Μέτρο και η Διάσταση Hausdorff

Γεωργακόπουλος Νίκος
Τερεζάκης Αλέξης

Περίληψη

Αναπτύσσουμε τη θεωρία του μέτρου και της διάστασης Hausdorff με εφαρμογές στον υπολογισμό διαστάσεων συνόλων fractal (Θεώρημα 2.10). Η κύρια δυσκολία στους υπολογισμούς είναι η εύρεση κάτω φράγματος για τη διάσταση Hausdorff. Οι δύο γενικές μέθοδοι που περιγράφονται έχουν ένα χρήσιμο αντίστροφο, το Λήμμα του Frostman 4.1. Τέλος, η θεωρία του μέτρου Hausdorff αναπτύσσεται περαιτέρω στην τελευταία παράγραφο.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Η έννοια της διάστασης είναι θεμελιώδης στα μαθηματικά, παρόλο που δεν υπάρχει ενιαίος ορισμός της· για κάθε κατηγορία αντικειμένων υπάρχει μια διαφορετική κατάλληλη έννοια διάστασης. Στις περισσότερες περιπτώσεις, όπως στους διανυσματικούς χώρους και στις πολλαπλότητες, η διάσταση ενός χώρου μπορεί να πάρει μόνο θετικές ακέραιες τιμές. Η διάσταση Hausdorff διαφέρει σε αυτό το σημείο, καθώς σε αυτή δε γίνεται διαφοροποίηση μεταξύ ακέραιων και μη ακέραιων τιμών, και ενδείκνυται για τη μελέτη αυτοόμοιων συνόλων όπως fractal. Ακόμα, βασίζεται στο μέτρο Hausdorff, επιτρέποντας τη χρήση μετρο-θεωρητικών τεχνικών.
Ακολουθούμε κυρίως τις πηγές[1–3] και χρησιμοποιούμε διάφορες έννοιες και αποτελέσματα γενικής Θεωρίας Μέτρου, όπως τα μέτρα Radon, τα Θεωρήματα του Καραθεοδωρή, Lebesgue,Vitali και Riesz. Τα θέματα αυτά αναπτύσσονται στα[1,3,4] .
Το σύμβολο ♠ δηλώνει το τέλος μιας απόδειξης. Το X δηλώνει έναν μετρικό χώρο με μετρική d, και το p είναι ένας μη αρνητικός πραγματικός αριθμός.

Ορισμοί και Βασικές Ιδιότητες

Ορισμός 1.1. Για $0 < \delta \leq +\infty$ και $A \subseteq X$ ορίζουμε

$$H^p_\delta(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} (\operatorname{diam} A_n)^p : A \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \ , \ \operatorname{diam} A_n < \delta \right\} \tag{1.1}$$

και

$$H^p(A) = \lim_{\delta \to 0} H^p_\delta(A) = \sup_{\delta > 0} H^p_\delta(A) \tag{1.2}$$

Το H^p είναι το p-διάστατο εξωτερικό μέτρο Hausdorff στο X.

Παρατήρηση 1.2.

1. Προκειμένου ο ορισμός του H^p_δ να έχει νόημα, χρειαζόμαστε το X να είναι δυνατόν να καλυφθεί από αριθμήσιμα σύνολα αυθαίρετα μικρής διαμέτρου. Κάτι τέτοιο επιτυγχάνεται αν υποθέσουμε ότι ο X είναι ένας διαχωρίσιμος μετρικός χώρος, και στο εξής θα θεωρούμε δεδομένη αυτή την υπόθεση.
2. Στον ορισμό του $H^p_\delta(A)$, τα σύνολα A_n μπορούν να υποτεθούν κλειστά ή ανοιχτά. Πράγματι, αρκεί να αντικαταστήσουμε τα A_n με τα $\overline{A_n}$ ($\operatorname{diam} A_n = \operatorname{diam} \overline{A_n}$) ή με τα $U_n = \left\{ x : d(x, A_n) < \epsilon 2^{-n-1} \right\}$ ($\operatorname{diam}(U_n) \leq \operatorname{diam}(A_n) + \epsilon 2^{-n}$) αντίστοιχα.
3. Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι το H^p_δ είναι ένα εξωτερικό μέτρο. Αφήνοντας $\delta \to 0$ δείχνει ότι και το H^p είναι εξωτερικό μέτρο.
4. Για $p = 0$ χρησιμοποιούμε τη σύμβαση $0^0 = 1$. Το H^0 είναι τότε το απαριθμητικό μέτρο. Πράγματι, αν A έχει n στοιχεία τότε καλύπτοντας με μονοσύνολα έχουμε ότι $H^0(A) \leq n$, και αντίστροφα, επιλέγοντας δ μικρότερο των αποστάσεων των στοιχείων του A δείχνει ότι $H^0_\delta(A) \geq n$ άρα $H^0(A) = n$. Λόγω αριθμήσιμης προσθετικότητας, τα απειροσύνολα έχουν άπειρο H^0.

Πρόταση 1.3. *Αν $A, B \subseteq X$ έχουν θετική απόσταση ($d(A,B) = \inf_{a\in A, b\in B} d(a,b) > 0$) τότε $H^p(A \cup B) = H^p(A) + H^p(B)$.*

Απόδειξη. Έστω $A, B \subseteq X$ με $d(A,B) > 0$ και έστω $0 < \delta < d(A,B)/2$. Αρκεί να δείξουμε ότι $H^p_\delta(A\cup B) \geq H^p_\delta(A) + H^p_\delta(B)$. Αν $A \cup B \subseteq \cup_n E_n$ και $\operatorname{diam} E_n < \delta$ τότε κάθε E_n είτε τέμνει το A είτε το B. Άρα, $A \subseteq \cup_{i\in I} E_i$ και $B \subseteq \cup_{j\notin I} E_j$ για κάποιο $I \subseteq \mathbb{N}$ οπότε,

$$\sum_n (\operatorname{diam} E_n)^p = \sum_{i\in I} (\operatorname{diam} E_i)^p + \sum_{i\notin I} (\operatorname{diam} E_i)^p \geq H^p_\delta(A) + H^p_\delta(B) \tag{1.3}$$

Παίρνοντας infimum πάνω σε όλες τις καλύψεις E_n δίνει ότι $H^p_\delta(A \cup B) \geq H^p_\delta(A) + H^p_\delta(B)$. ♠

Τα εξωτερικά μέτρα μ^* για τα οποία ισχύει $d(A,B) > 0 \implies \mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$ λέγονται μετρικά εξωτερικά μέτρα. Σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση, το H^p είναι μετρικό εξωτερικό μέτρο.

Πρόταση 1.4. *Κάθε μετρικό εξωτερικό μέτρο είναι μέτρο Borel.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι τα κλειστά υποσύνολα του X είναι μ^*-μετρήσιμα, αφού παράγουν τη Borel σ-άλγεβρα. Έστω λοιπόν F ένα κλειστό υποσύνολο του X και E τυχόν υποσύνολο του X, θα δείξουμε ότι

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap F) + \mu^*(E \cap F^c) \tag{1.4}$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\mu^*(E) < +\infty$. Τα κλειστά σύνολα $F_n = \{x \in E : d(x,F) \geq n\}$ αυξάνουν στο $\cup_n F_n = E \setminus F$ και ισχύει $d(F, F_n) > 0$. Επίσης, $d(F_n, F \cap E) > 0$ άρα

$$\mu^*(E) \geq \mu^*([F_n \cup F] \cap E) = \mu^*(F_n) + \mu^*(E \cap F) \tag{1.5}$$

απ'όπου έπεται ότι,

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap F) + \lim_n \mu^*(F_n) \tag{1.6}$$

Έστω $C_n = F_{n+1} \setminus F_n$. Τα C_n είναι ξένα ανά δύο και $d(C_{n+1}, F_n) \geq 1/n(n+1) > 0$. Οπότε,

$$\mu^*(F_{n+1}) \geq \mu^*(C_n) + \mu^*(F_{n-1}) \tag{1.7}$$

και τελικά,

$$\mu^*(F_{n+1}) + \mu^*(F_n) \geq \sum_{k=1}^{n} \mu^*(C_k) \tag{1.8}$$

Το αριστερό μέλος της ανίσωσης είναι $\leq 2\mu^*(E) < +\infty$ έτσι η σειρά στα δεξιά συγκλίνει. Άρα,

$$\mu^*(E \cap F^c) = \mu^*\left(\bigcup_n F_n\right) \leq \mu^*(F_m) + \mu^*\left(\bigcup_{n>m} C_n\right) \leq \mu^*(F_m) + \sum_{n>m} \mu^*(C_n) \to \lim_m \mu^*(F_m) \tag{1.9}$$

Η (1.4) έπεται από τις (1.6) και (1.9). ♠

Ο περιορισμός του H^p στα σύνολα Borel είναι το p-διάστατο μέτρο Hausdorff.

Πρόταση 1.5. *Το H^p είναι αναλλοίωτο ως προς τις ισομετρίες και ιδιαιτέρως, ως προς τις μεταφορές.*

Απόδειξη. Αν $f : X \to X$ είναι μία ισομετρία τότε προφανώς, $H^p_\delta(f(A)) = H^p_\delta(A)$ αφού οι ισομετρίες δεν επηρεάζουν την διάμετρο. ♠

Θεώρημα 1.6. *Στον $\mathbb{R}^d$, $H^d = c_d\lambda_d$ για θετική σταθερά $c_d > 0$, όπου λ_d είναι το d-διάστατο μέτρο Lebesgue, περιορισμένο στη Borel σ-άλγεβρα.*

Απόδειξη. Το H^d είναι μέτρο Borel αναλλοίωτο προς τις μεταφορές, οπότε από ένα αποτέλεσμα της γενικής θεωρίας μέτρου[1] αρκεί να δείξουμε ότι $0 < H^d(I) < +\infty$ όπου $I = (0,1)^d$.
$H^d(I) < +\infty$: Για κάθε $\delta > 0$ διαμερίζουμε το I σε n^d ορθογώνια I_s διαμέτρου $\leq \frac{d}{n}$, όπου $n > d/\delta$. Τότε, $\operatorname{diam} I_s < \delta$ και $\sum_s (\operatorname{diam} I_s)^d \leq d^d$ άρα $H^d_\delta(I) \leq d^d \implies H^d(I) \leq d^d < +\infty$.
$H^d(I) > 0$: Έστω $\delta, \epsilon > 0$ και τα E_n να καλύπτουν το I με $\operatorname{diam} E_n < \delta$ και

$$\sum_n (\operatorname{diam} E_n)^d \leq H^d_\delta(I) + \epsilon \leq H^d(I) + \epsilon \tag{1.10}$$

Υπάρχουν κλειστές μπάλες B_n με $E_n \subseteq B_n$ και $\operatorname{diam} B_n = 2 \operatorname{diam} E_n$. Επειδή $\lambda_d(B(x,r)) = \lambda_d(B(0,1))r^d = c(\operatorname{diam} B/2)^d$ όπου $c = \lambda_d(B(0,1))$, συμπεραίνουμε:

$$1 = \lambda_d(I) \leq \sum_n \lambda_d(B_n) = c\sum_n \left(\frac{\operatorname{diam} B_n}{2}\right)^d = c\sum_n (\operatorname{diam} E_n)^d \leq c(H^d(I) + \epsilon) \tag{1.11}$$

Αφήνοντας το $\epsilon \to 0$ δίνει ότι $H^d(I) > 0$. ♠

Παρατήρηση 1.7. Μπορεί να αποδειχθεί[5] ότι

$$c_d = \lambda_d\Big(B\Big(0, \frac{1}{2}\Big)\Big) = \frac{\pi^{d/2}}{2^d\Gamma(\frac{d}{2}+1)} \tag{1.12}$$

όπου $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx$ είναι η συνάρτηση Γάμμα.

Πρόταση 1.8. *1. Αν $H^p(A) < +\infty$ τότε $H^q(A) = 0$ για κάθε $q > p$.*

2. Αν $H^p(A) > 0$ τότε $H^q(A) = +\infty$ για κάθε $q < p$.

Απόδειξη. Πρώτα υποθέτουμε ότι $H^p(A) < +\infty$. Τότε για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει μία κάλυψη $\cup_n A_n \supseteq A$ τέτοια ώστε $\operatorname{diam} A_n < \delta$ και $\sum_n (\operatorname{diam} A_n)^p \leq H^p_\delta(A) + 1 \leq H^p(A) + 1$. Αν $q > p$ τότε

$$H^q_\delta(A) \leq \sum_n (\operatorname{diam} A_n)^q < \delta^{q-p}\sum_n (\operatorname{diam} A_n)^p = \delta^{q-p}(H^p(A) + 1) \tag{1.13}$$

Αφήνοντας το $\delta \to 0$ παίρνουμε $H^q(A) = 0$. Ο δεύτερος ισχυρισμός προκύπτει εύκολα από τον πρώτο. ♠

Ορισμός 1.9. Ορίζουμε την διάσταση Hausdorff του συνόλου A ως:

$$\dim_H(A) = \inf\{p \geq 0 : H^p(A) = 0\} = \sup\{p \geq 0 : H^p(A) = +\infty\} \tag{1.14}$$

Σημειώνουμε ότι αν $p = \dim_H(A)$ δεν χρειάζεται να ισχύει $0 < H^p(A) < +\infty$, όπως δείχνει η επόμενη πρόταση. Όταν $0 < H^p(A) < +\infty$, λέμε ότι το A έχει γνήσια διάσταση Hausdorff p.

Πρόταση 1.10. $\dim_H(\mathbb{R}^d) = d$ *παρόλο που* $H^d(\mathbb{R}^d) = +\infty$. *Γενικά, κάθε ανοιχτό υποσύνολο του* $\mathbb{R}^d$ *έχει διάσταση Hausdorff ίση με* d

Απόδειξη. Αρχικά, από το Θεώρημα 1.6 έχουμε $H^d(\mathbb{R}^d) = +\infty$ άρα $\dim_H(\mathbb{R}^d) \geq d$. Έστω $p > d$, θα δείξουμε ότι $H^p(\mathbb{R}^d) = 0$. Από το Θεώρημα 1.6, αν I ένα ορθογώνιο στον $\mathbb{R}^d$, $H^d(I) < +\infty$ οπότε $H^p(I) = 0$. Ο $\mathbb{R}^d$ είναι αριθμήσιμη ένωση τέτοιων ορθογωνίων, άρα από την προσθετικότητα του H^p έχουμε ότι $H^p(\mathbb{R}^d) = 0$.
Τέλος, αν U ανοιχτό στον $\mathbb{R}^d$ τότε πάλι από το Θεώρημα 1.6, $0 < H^d(U)$ και αν $p > d$, $H^p(U) \leq H^p(\mathbb{R}^d) = 0$. ♠

Υπολογισμός Διάστασης Συνόλων Fractal

Ορισμός 2.1. Ένα similarity με ratio $0 < r < 1$ είναι μια συνάρτηση $S : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ τέτοια ώστε

$$|S(x) - S(y)| = r\,|x - y| \tag{2.1}$$

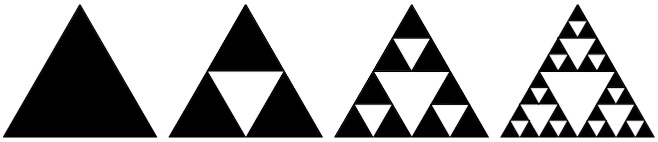
Τέτοιες συναρτήσεις είναι συστολές και συνεπώς συνεχείς. Αν $S = \{S_1, ..., S_n\}$ είναι μία οικογένεια αποτελούμενη από similarities με κοινή ratio $0 < r < 1$ και $E \subseteq \mathbb{R}^d$ ορίζουμε $S(E) = \cup_i S_i(E)$ και αναδρομικά, $S^k(E) = S(S^{k-1}(E))$.
Αν $S(E) = E$ τότε το E είναι αναλλοίωτο από την S. Αν για $p = \dim_H(E)$ ισχύει $H^p(S_i(E) \cap S_j(E)) = 0$ για $i \neq j$ τότε το E ονομάζεται self-similar.

Παράδειγμα 2.2. Το σύνολο του Cantor: Θεωρούμε τα similarities $S_1(x) = x/3$ και $S_2 = 1 - 2x/3$ για $x \in [0,1]$. Το $C = \cap_n S^n([0,1])$ είναι το γνωστό σύνολο του Cantor. Ισχύει $S_i(C) \cap S_j(C) = \emptyset$ και αφού S 1-1 συνάρτηση,

$$S(C) = \bigcup_i S_i(C) = \bigcup_i \bigcap_n S_i(S^n([0,1])) = \bigcap_n \bigcup_i S_i(S^n([0,1])) = \bigcap_n S^{n+1}([0,1]) = C \tag{2.2}$$

δηλαδή το σύνολο του Cantor είναι self-similar.

Το τρίγωνο του Sierpinski: Παίρνουμε ένα τρίγωνο $\Delta \subseteq \mathbb{R}^2$ το οποίο είναι η κυρτή θήκη των κορυφών $(0,0), (1,0), (1/2,1)$ και $S = \{S_1, S_2, S_3\}$, $S_i(x) = 1/2x + b_i$ όπου $b_1 = (0,0), b_2 = (1/2,0), b_3 = (1/4,1/2)$. Το τρίγωνο του Sierpinski είναι το self-similar $\cap_n S^n(\Delta)$



Στο εξής, S θα είναι μία οικογένεια από n similarities $\{S_1, ..., S_n\}$ με κοινό ratio $r \in (0, 1)$. Είναι εύκολο να δώσουμε ένα άνω φράγμα για τη διάσταση αναλλοίωτων συνόλων.

Πρόταση 2.3. *Αν $p = -\log n / \log r$ τότε κάθε αναλλοίωτο E από την S έχει $H^p(E) < +\infty$ δηλαδή $\dim_H(E) \leq p$*

Απόδειξη. Από τον ορισμό του, το $E = S^k(E)$ είναι ένωση n^k συνόλων της μορφής $E_{i_1...i_k} = S_{i_1} \circ ... \circ S_{i_k}(E)$ όπου $(i_1, ..., i_k)$ μετάθεση του $\{1, ..., n\}$, και κάθε ένα από αυτά έχει διάμετρο $r^k \operatorname{diam}(E)$. Συνεπώς για τυχόν $\delta > 0$ και μεγάλο k ώστε $\delta \geq r^k \operatorname{diam}(E)$ ισχύει,

$$H^p_\delta(E) = \sum_{1 \leq i_1,..,i_m \leq n} (\operatorname{diam} E_{i_1...i_k})^p \leq n^k r^{pk} \operatorname{diam}(E)^p = \operatorname{diam}(E)^p \implies H^p(E) \leq \operatorname{diam}(E)^p \quad (2.3)$$

♠

Το $-\log n / \log r$ είναι ίσο με τη διάσταση του αναλλοίωτου συνόλου, εφόσον έχουμε την ακόλουθη συνθήκη

Ορισμός 2.4. Ένα ανοιχτό και φραγμένο σύνολο U είναι separating σύνολο της S αν ικανοποιείται η συνθήκη ανοιχτού συνόλου: $S(U) \subseteq U$ και $S_i(U) \cap S_j(U) = \emptyset$ για $i \neq j$.

Παράδειγμα 2.5. Το σύνολο του Cantor και το τρίγωνο του Sierpinski ικανοποιούν την συνθήκη του ανοιχτού συνόλου. Για το πρώτο παίρνουμε $U = (0, 1)$ και για το δεύτερο παίρνουμε το εσωτερικό του αρχικού τριγώνου Δ.

Για να δείξουμε ότι το $-\log n / \log r$ φράσσει από κάτω τη διάσταση Hausdorff των αναλλοίωτων συνόλων της S θα χρειαστούμε αρκετά ενδιάμεσα βήματα. Αρχίζουμε με κάποιους συμβολισμούς

Συμβολισμός 2.6. Αν $(i_1, ..., i_n)$ είναι μία μετάθεση των $1, .., n$ τότε, συμβολίζουμε $S_{i_1...i_k} = S_{i_1} \circ ... \circ S_{i_k}$, $x_{i_1...i_k} = S_{i_1...i_k}(x)$, $E_{i_1...i_k} = S_{i_1...i_k}(E)$, $\mu_{i_1...i_k}(A) = \mu(S^{-1}_{i_1...i_k}(A))$ όπου x, E, μ είναι οποιοδήποτε σημείο, σύνολο και μέτρο αντίστοιχα.

Πρόταση 2.7. *Αν η S έχει separating σύνολο U τότε το $E = \cap_n S^n(\bar{U})$ είναι το μοναδικό συμπαγές μη κενό σύνολο αναλλοίωτο από την S.*

Απόδειξη. Από την συνθήκη του ανοιχτού συνόλου, έχουμε ότι $\bar{U} \supseteq S(\bar{U}) \supseteq ...$. Αυτά τα σύνολα είναι συμπαγή από την συνέχεια των similarities, έτσι η τομή τους E είναι ένα μη κενό συμπαγές σύνολο με $S(E) = E$ (όπως στην (2.2)). Για να αποδείξουμε την μοναδικότητα έστω F ένα άλλο τέτοιο σύνολο. Ορίζουμε $\rho(A, B) = \max_{x \in A} d(x, B)$ για $A, B \subseteq X$. Τότε $\rho(S_i(E), S_i(F)) = r\rho(E, F)$ και $E = \cup_{i=1}^n S_i(E)$ άρα $\rho(E, F) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \rho(S_i(E), F) \leq r\rho(E, F)$. Κατά συνέπεια, $\rho(E, F) = 0$ και από την συμπάγεια, $E \subseteq F$. Συμμετρικά, $F \subseteq E$ και τελικά $E = F$. ♠

Θα δείξουμε στο Θεώρημα 2.10 ότι το E είναι self similar.

Θεώρημα 2.8. *Αν E αναλλοίωτο από την S τότε υπάρχει ένα μέτρο Borel μ με $\mu(\mathbb{R}^d) = \mu(E) = 1$ και για κάθε $k \in \mathbb{N}$,*

$$\mu = n^{-k} \sum_{1 \le i_1,..,i_k \le n} \mu_{i_1 \dots i_k} \tag{2.4}$$

Απόδειξη. Για σταθερό $x \in E$ ορίζουμε ένα μέτρο πιθανότητας στο δυναμοσύνολο του E:

$$\mu^k = n^{-k} \sum_{1 \le i_1,..,i_k \le n} (\delta_x)_{i_1 \dots i_k} \tag{2.5}$$

όπου δ_x είναι το μέτρο Dirac στο x. Με άλλα λόγια, για μια συνεχή $f : E \to \mathbb{C}$,

$$\int f \, d\mu^k = n^{-k} \sum_{1 \le i_1,..,i_k \le n} f(x_{i_1 \dots i_k}) \tag{2.6}$$

Θα αποδείξουμε ότι η ακολουθία $k \mapsto \int f \, d\mu^k$ είναι ακολουθία Cauchy. Πράγματι, από την συνέχεια της f, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει ένα $K > 0$ τέτοιο ώστε

$$y, z \in E \ , \ |y - z| < r^K \operatorname{diam} E \implies |f(y) - f(z)| < \epsilon \tag{2.7}$$

Αν $l > k$ τότε $x_{i_1 \dots i_l} \in E_{i_1 \dots i_k}$ και $\operatorname{diam} E_{i_1 \dots i_k} = r^k \operatorname{diam} E$. Έτσι, αν $k \ge K$,

$$\left| f(x_{i_1 \dots i_k}) - f(x_{i_1 \dots i_l}) \right| < \epsilon \tag{2.8}$$

Αθροίζοντας πάνω από τα $i_1, ..., i_k, ..., i_l$ παίρνουμε ότι

$$\left| n^{l-k} \sum_{1 \le i_1,..,i_k \le n} f(x_{i_1 \dots i_k}) - \sum_{1 \le i_1,..,i_l \le n} f(x_{i_1 \dots i_l}) \right| < \epsilon n^l \tag{2.9}$$

και διαιρώντας με το n^l,

$$\left| \int f \, d\mu^k - \int f \, d\mu^l \right| < \epsilon \tag{2.10}$$

Συνεπώς, το $\int f \, d\mu^k$ συγκλίνει σε ένα όριο I_f, ορίζοντας έτσι μια συνάρτηση $f \mapsto I_f$. Το I είναι προφανώς ένα θετικό γραμμικό συναρτησοειδές στον $C(E)$, τον χώρο των συνεχών απεικονίσεων από το E στο $\mathbb{C}$, άρα από το Θεώρημα Αναπαράστασης των Riesz-Kakutani[1] , υπάρχει μέτρο Radon μ ορισμένο στη Borel σ-άλγεβρα του E ώστε

$$\lim_{k \to +\infty} \int f \, d\mu^k = I_f = \int f \, d\mu \ , \ f \in C(E) \tag{2.11}$$

Από τον ορισμό του μ^k,

$$\mu^{k+l} = n^{-k} \sum_{1 \le i_1,..,i_k \le n} \mu^l_{i_1 \dots i_k} \tag{2.12}$$

έτσι αν $f \in C(E)$,

$$\int f \, d\mu^{k+l} = n^{-k} \sum_{1 \le i_1,..,i_k \le n} \int f \, d\mu^l_{i_1 \dots i_k} \tag{2.13}$$

Όμως
$$\int_E f\,d\mu^l_{i_1\ldots i_k} = \int_{E_{i_1\ldots i_k}} f\circ S_{i_1\ldots i_k}\,d\mu^l \to \int_{E_{i_1\ldots i_k}} f\circ S_{i_1\ldots i_k}\,d\mu = \int_E f\,d\mu_{i_1\ldots i_k} \tag{2.14}$$
(οι ισότητες έπονται από αλλαγή μεταβλητής[1]). Επομένως,
$$\int f\,d\mu = n^{-k}\sum_{1\le i_1,..,i_k\le n}\int f\,d\mu_{i_1\ldots i_k}\ ,\ f\in C(E) \tag{2.15}$$
Σε χώρους μέτρων Radon, οι συνεχείς συναρτήσεις προσεγγίζουν στις p νόρμες τις ολοκληρώσιμες συναρτήσεις[1] , επομένως η εξίσωση (2.15) ισχύει για κάθε ολοκληρώσιμη f. Ειδικότερα, ισχύει για χαρακτηριστικές συναρτήσεις άρα
$$\mu = n^{-k}\sum_{1\le i_1,..,i_k\le n}\mu_{i_1\ldots i_k} \tag{2.16}$$
Τελικά, επεκτείνουμε το μ στα Borel υποσύνολα A του $\mathbb{R}^d$ ορίζοντας $\mu(A)=\mu(A\cap E)$. Το μ έχει όλες τις ζητούμενες ιδιότητες ♠

Το τελευταίο που θα χρειαστούμε είναι ένα απλό λήμμα:

Λήμμα 2.9. *Έστω $c, C, \delta > 0$. Αν $U_i \subseteq \mathbb{R}^d$ είναι ξένα ανά δύο μεταξύ τους ανοιχτά σύνολα, όπου το καθένα περιέχει μια μπάλα ακτίνας $c\delta$ και περιέχεται σε μια μπάλα ακτίνας $C\delta$, τότε δεν υπάρχει μπάλα ακτίνας δ που να τέμνει πάνω από $N = c^{-d}(1+2C)^d$ το πλήθος σύνολα από τα $\bar{U}_i$.*

Απόδειξη. Αν η μπάλα $B = B(x,\delta)$ τέμνει το $\bar{U}_i$ τότε $\bar{U}_i \subseteq B(x,(1+2C)\delta)$. Επομένως, αν n από τα $\bar{U}_i$ τέμνουν το B, υπάρχουν n ξένες μπάλες ακτίνας $c\delta$ οι οποίες περιέχονται σε μία μπάλα ακτίνας $(1+2C)\delta$. Τότε όμως από την προσθετικότητα του μέτρου Lebesgue έχουμε, $nc^d\delta^d \le (1+2C)^d\delta^d \implies n \le c^{-d}(1+2C)^d = N$. ♠

Θεώρημα 2.10. *Αν η S έχει separating σύνολο U και E αναλλοίωτο από την S τότε το E είναι self-similar και έχει (γνήσια) διάσταση Hausdorff $\dim_H(E) = -\log n/\log r$*

Απόδειξη. Έστω $p = -\log n/\log r \iff n = r^{-p}$. Θα αποδείξουμε ότι $H^p(E) > 0$ (το $H^p(E) < +\infty$ έχει δειχθεί στην Πρόταση 2.3).
Επιλέγουμε $c, C > 0$ τέτοια ώστε το U να περιέχει μια μπάλα ακτίνας c/r, να περιέχεται σε μια μπάλα ακτίνας C και έστω $N = (1+2C)^n c^{-n}$. Αρκεί να δείξουμε ότι αν τα B_i είναι μπάλες που καλύπτουν το E ακτίνας $\le \delta$, τότε $\sum_i \operatorname{diam} B_i \ge N^{-1}$. Αν το μ είναι το μέτρο στο Θεώρημα 2.8, αρκεί να δείξουμε ότι κάθε μπάλα B ακτίνας $\rho \le 1$ έχει μέτρο $\mu(B) \le N\rho^p$, γιατί τότε
$$1 = \mu(E) \le \sum_i \mu(B_i) \le N\sum_i(\operatorname{diam} B_i)^p \tag{2.17}$$
Για να το αποδείξουμε αυτό επιλέγουμε k τέτοιο ώστε $r^k < \rho \le r^{k-1}$. Επειδή $E \subseteq \bar{U}$ και $\mu(A) = 0$ αν $A\cap E = \emptyset$, $\mu_{i_1\ldots i_k}(B) = 0$ εκτός αν B τέμνει το $\bar{U}_{i_1\ldots i_k}$. Από τη συνθήκη ανοιχτού συνόλου, τα $U_{i_1\ldots i_k}$ είναι ξένα, περιέχουν μια μπάλα ακτίνας $cr^{k-1} \ge c\rho$ και περιέχονται

σε μια μπάλα ακτίνας $Cr^k < C\rho$. Από το Λήμμα 2.9, το B τέμνει N το πολύ από τα $\bar{U}_{i_1\ldots i_k}$ άρα

$$\mu(B) = n^{-k} \sum_{1\leq i_1,\ldots,i_k\leq n} \mu_{i_1\ldots i_k}(B) \leq n^{-k}N = r^{kp}N \leq \rho^p N \tag{2.18}$$

Τέλος, δείχνουμε ότι το E είναι self-similar δηλαδή $H^p(S_i(E) \cap S_j(E)) = 0$ για $i \neq j$. Πράγματι,

$$H^p(S_i(E)) = r^p H^p(E) = n^{-1} H^p(E) \implies H^p(E) = \sum_{i=1}^{n} H^p(S_i(E)) \tag{2.19}$$

Όμως $E = \cup_{i=1}^{n} S_i(E)$ άρα $H^p(S_i(E) \cap S_j(E)) = 0$ για $i \neq j$. ♠

Παράδειγμα 2.11. Σύμφωνα με τα παραδείγματα 2.5, το σύνολο του Cantor έχει διάσταση $\log 2/\log 3$ και το τρίγωνο του Sierpinski $\log 3/\log 2$.

Κατανομή Μάζας και Ενέργειες

Για να υπολογίσουμε την διάσταση Hausdorff ενός $A \subseteq X$ αρκεί να αποδείξουμε ότι $0 < H^p(A) < +\infty$ για κάποιο $p \geq 0$. Το να αποδείξουμε ότι $H^p(A) < +\infty$ είναι γενικά απλό, αρκεί να βρούμε μία αρκετά οικονομική κάλυψη του A. Ωστόσο, όπως έχουμε ήδη δει, το να αποδείξουμε ότι $H^p(A) > 0$ είναι αρκετά δυσκολότερο (βλέπε Θεώρημα 2.10). Υπάρχει μια γενική πρόταση που μας επιτρέπει να το συμπεράνουμε αυτό, η Αρχή κατανομής της Μάζας

Ορισμός 3.1. Ένα μέτρο Borel μ στο X λέγεται κατανομή μάζας αν $0 < \mu(X) < +\infty$. Μπορούμε να κανονικοποιήσουμε το μ, ώστε να είναι μέτρο πιθανότητας, διαιρώντας με $\mu(X)$.

Στο υπόλοιπο της παραγράφου, μ είναι μια κατανομή μάζας στο X.

Αρχή Κατανομής της Μάζας 3.2. *Αν υπάρχουν σταθερές $C, \delta > 0$ τέτοιες ώστε για κάθε κλειστό $F \subseteq X$,*

$$\operatorname{diam} F \leq \delta \implies \mu(F) \leq C(\operatorname{diam} F)^p \tag{3.1}$$

τότε

$$H^p(X) \geq \frac{\mu(X)}{C} > 0 \tag{3.2}$$

Ιδιαιτέρως, $\dim_H(X) \geq p$.

Απόδειξη. Έστω κάλυψη του X από κλειστά σύνολα F_n με διάμετρο $< \delta$. Τότε

$$\sum_n (\operatorname{diam} F_n)^p \geq \frac{1}{C} \sum_n \mu(F_n) \geq \frac{\mu(X)}{C} \implies H^p(X) \geq H^p_\delta(X) \geq \frac{\mu(X)}{C} \tag{3.3}$$

♠

Το αντίστροφο της Αρχής Κατανομής της Μάζας είναι αληθές για κάθε X κλειστό στον $\mathbb{R}^d$ (το λήμμα του Frostman 4.1). Αυτό μπορεί να γενικευτεί για συμπαγείς μετρικούς χώρους X[3] αλλά και για Borel υποσύνολα $X \subseteq \mathbb{R}^d$[6] αλλά είναι πιο τεχνική η απόδειξη.

Θα αναπτύξουμε τώρα μια άλλη τεχνική, που αντικαθιστά την συνθήκη (3.1) με μια συνθήκη πεπερασμένης ενέργειας.

Ορισμός 3.3. Η p-ενέργεια της κατανομής μάζας μ δίνεται από τον τύπο

$$I_p(\mu) = \iint \frac{d\mu(y)d\mu(x)}{[d(x,y)]^p} \tag{3.4}$$

Μέθοδος της Ενέργειας 3.4. *Αν $\delta > 0$ τότε*

$$H^p_\delta(X) \geq \mu(X)^2 \left(\iint_{d(x,y)<\delta} \frac{d\mu(y)d\mu(x)}{[d(x,y)]^p} \right)^{-1} \tag{3.5}$$

Αν επιπλέον $I_p(\mu) < +\infty$ τότε $H^p(X) = +\infty$ δηλαδή $\dim_H(X) \geq p$.

Απόδειξη. Για τυχόν $\epsilon > 0$ καλύπτουμε το X από ανα 2 ξένα σύνολα X_n διαμέτρου $< \delta$ με

$$H^p_\delta(X) \geq \sum_n (\operatorname{diam} X_n)^p - \epsilon \tag{3.6}$$

Έχουμε,

$$\iint_{d(x,y)<\delta} \frac{d\mu(y)d\mu(x)}{[d(x,y)]^p} \geq \sum_n \iint_{X_n \times X_n} \frac{d\mu(y)d\mu(x)}{[d(x,y)]^p} \geq \sum_n \frac{\mu(X_n)^2}{(\operatorname{diam} X_n)^p} \tag{3.7}$$

από την ανισότητα Cauchy-Schwarz,

$$\mu(X)^2 \leq \left(\sum_n \mu(X_n) \right)^2 \leq \sum_n \frac{\mu(X_n)^2}{(\operatorname{diam} X_n)^p} \sum_n (\operatorname{diam} X_n)^p \leq \iint_{d(x,y)<\delta} \frac{d\mu(y)d\mu(x)}{[d(x,y)]^p} (H^p_\delta(X) + \epsilon)$$

Αφήνοντας το $\epsilon \to 0$ δίνει την ανισότητα (3.5). Αν $I_p(\mu) < +\infty$, τότε αφήνοντας $\delta \to 0$ δίνει ότι το ολοκλήρωμα τείνει στο 0 (από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης), άρα $H^p(X) = +\infty$. ♠

Ορισμός 3.5. Η κατά Riesz p χωρητικότητα του X ορίζεται από

$$\operatorname{Cap}_p(X) = \sup \left\{ I_p^{-1}(\mu) : \mu \text{ είναι κατανομή μάζας στον } X \text{ με } \mu(X) = 1 \right\} \tag{3.8}$$

Θεώρημα 3.6. *Αν F κλειστό στον $\mathbb{R}^d$ τότε,*

$$\dim_H(F) = \sup \left\{ p \geq 0 : \operatorname{Cap}_p(F) > 0 \right\} \tag{3.9}$$

Απόδειξη. Αν $\operatorname{Cap}_p(F) > 0$, τότε από τη Μέθοδο της Ενέργειας 3.4, $\dim_H(F) \geq p$ και άρα $\dim_H(F) \geq \sup \left\{ p : \operatorname{Cap}_p(F) > 0 \right\}$. Για την αντίστροφη ανισότητα θα χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα του Frostman 4.1. Αρκεί να δείξουμε ότι αν $p < \dim_H(F)$ τότε υπάρχει κατανομή μάζας μ με $\mu(X) = 1$ ώστε $I_p(\mu) < +\infty$. Επειδή $p < \dim_H(F)$, για κάποιο $q > p$ έχουμε

$H^q(F) = +\infty$. Από το Λήμμα του Frostman, υπάρχει μέτρο Borel μ με $\mu(F) = \mu(\mathbb{R}^d) = 1$ και σταθερά $C > 0$ ώστε $\mu(D) \leq C(\operatorname{diam} D)^q$ για Borel D. Για σταθερό $x \in F$ θεωρούμε τα $S_n(x) = \left\{y : 2^{-n} \leq d(x,y) < 2^{-n+1}\right\}$. Τότε,

$$\begin{aligned}\int_{\cup_n S_n(x)} \frac{d\mu(y)}{[d(x,y)]^p} &= \sum_n \int_{S_n(x)} \frac{d\mu(y)}{[d(x,y)]^p} \leq \sum_n \mu(S_n(x))2^{np} \leq \\ &\leq C\sum_n (\operatorname{diam}(S_n(x)))^q 2^{np} \leq C2^{2q}\sum_n 2^{n(p-q)}\end{aligned}$$

και

$$\int_{(\cup_n S_n(x))^c} \frac{d\mu(y)}{[d(x,y)]^p} \leq \int_{(\cup_n S_n(x))^c} d\mu(y) \leq \mu(F) = 1$$

Επομένως,

$$I_p(\mu) \leq C2^{2q}\sum_n 2^{n(p-q)} + 1 < +\infty \tag{3.10}$$

♠

Το Λήμμα του Frostman

Λήμμα του Frostman 4.1. *Αν $F \subseteq \mathbb{R}^d$ είναι κλειστό και $H^p(F) > 0$ τότε υπάρχει Borel μέτρο μ με $\mu(F) = \mu(\mathbb{R}^d) = 1$ και σταθερά $C > 0$ ώστε $\mu(E) \leq C(\operatorname{diam} E)^p$ για κάθε Borel E.*

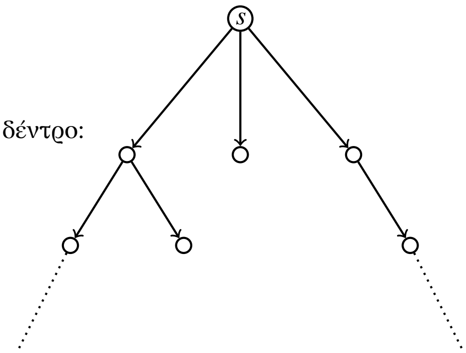
Θα το αποδείξουμε χρησιμοποιώντας την θεωρία των άπειρων Δέντρων.

Ορισμός 4.2. Ένα αριθμήσιμο κατευθυνόμενο γράφημα είναι το ζεύγος (V, E) όπου V ένα αριθμήσιμο σύνολο και $E \subseteq V \times V$. Το V είναι το σύνολο των κορυφών και το E το σύνολο των (κατευθυνόμενων) ακμών. Ένα μονοπάτι P που αρχίζει στο $v \in V$ είναι μια άπειρη ή πεπερασμένη ακολουθία διαφορετικών ανα 2 κορυφών v_i με $v_1 = v$ και $(v_i, v_{i+1}) \in E$ για κάθε i. Το μονοπάτι τελειώνει στο $w \in V$ αν αυτό είναι η τελευταία κορυφή στην ακολουθία.
Ένα δέντρο T με πηγή (ή ρίζα) s είναι ένα $T = (V, E)$ με

1. $s \in V$
2. Για κάθε $v \in V \setminus \{s\}$ το σύνολο $\{w \in V : (w, v) \in E\}$ περιέχει ακριβώς ένα σημείο $\bar{v}$, τον γονιό του v. Το s δεν έχει γονιό.
3. Για κάθε $v \in V$ υπάρχει μοναδικό μονοπάτι που το συνδέει με την πηγή s. Ο αριθμός των ακμών στο μονοπάτι αυτό καλείται η τάξη $|v|$ του v. Η τάξη της ακμής $e = (v, w)$ είναι η τάξη της w και συμβολίζεται με $|e|$.
4. Για κάθε $v \in V$ το σύνολο $\{w \in V : (v, w) \in E\}$ είναι πεπερασμένο και τα στοιχεία του ονομάζονται τα παιδιά του v.

Κάθε άπειρο μονοπάτι που ξεκινά από την πηγή λέγεται ημιευθεία, το σύνολο όλων των ημιευθειών συμβολίζεται με ∂T. Αν R, S ημιευθείες, τότε το $R \wedge S$ είναι το σημείο τομής τους με τη μέγιστη τάξη. Ένα τέτοιο σημείο πάντα υπάρχει από τη συνθήκη 3., εκτός και αν $R = S$. Σε κάθε περίπτωση, το $|R \wedge S|$ είναι ο αριθμός των κοινών τους ακμών. Η απόσταση τους τότε είναι το $\rho(R, S) = 2^{-|R \wedge S|}$.

Ένα δέντρο:



Για το υπόλοιπο της παραγράφου, $T = (V, E)$ είναι ένα άπειρο δέντρο

Πρόταση 4.3. *Ο $(\partial T, \rho)$ είναι συμπαγής μετρικός χώρος.*

Απόδειξη. Η τριγωνική ανισότητα: Για ημιευθείες R, S, L έστω $R \wedge S = a$, $R \wedge L = b$ και $S \wedge L = c$, θα δείξουμε ότι $d(R, S) \leq d(R, L) + d(L, S)$. Αυτό είναι τετριμμένο αν $|a| \geq |b|$ ή $|a| \geq |c|$ άρα έστω $|a| < |b| \leq |c|$. Τότε οι S, L τέμνονται στα a και c, χωρίς να ταυτίζονται στο ενδιάμεσο κομμάτι, άτοπο.
Η συμπάγεια: Έστω R_n ακολουθία (χωρίς βλάβη της γενικότητας διαφορετικών) ημιευθειών. Θα κατασκευάσουμε ημιευθεία R και υπακολουθία R_{k_n} ώστε $\left|R_{k_n} \wedge R\right| \to +\infty$. Αρχικά, όλες οι R_n αρχίζουν στην πηγή s. Η s έχει πεπερασμένα το πλήθος παιδιά, οπότε τουλάχιστον έναν από αυτά, έστω ο v_1, θα τον επισκέπτονται άπειρες ημιευθείες από τις R_n, από τις οποίες επιλέγουμε μία, την R_{k_1}. Όπως πριν, τα παιδιά τις v_1 είναι πεπερασμένα στο πλήθος άρα έχει παιδί v_2 τον οποίον επισκέπτονται άπειρες R_n, μια εκ των οποίων είναι η R_{k_2}. Επαγωγικά, ορίζουμε ακολουθία σημείων $s, v_1, v_2, \ldots$ και ημιευθειών R_{k_n} ώστε οι R_{k_n} να έχουν αρχικό τμήμα $s, v_1, \ldots, v_n$. Αν η R είναι η $R = (s, v_1, v_2, ..)$ τότε $\left|R_{k_n} \wedge R\right| = |v_n| = n \to +\infty$. ♠

Ορισμός 4.4. Μια συνάρτηση χωρητικότητας στο δέντρο T είναι μια απεικόνιση $C : E \to [0, +\infty]$. Το $C(e)$ ονομάζεται η χωρητικότητα της ακμής $e \in E$. Μια ροή χωρητικότητας C είναι μια συνάρτηση $\varphi : E \to [0, +\infty)$ ώστε

1. Για κάθε $v \in V \setminus \{s\}$ που έχει παιδιά, $\sum_{\bar{w}=v} \varphi(v, w) = \varphi(\bar{v}, v)$ (Διατήρηση Ροής).
2. $\varphi(e) \leq C(e)$ (Περιορισμός Χωρητικότητας)

Η ισχύς της ροής είναι το $|\varphi| = \sum_{\bar{w}=s} \varphi(s, w)$, δηλαδή η αρχική ροή στην πηγή. Τέλος, ένα σύνολο Π ακμών είναι ένα cut-set αν κάθε μονοπάτι και ημιευθεία περιέχει κάποια ακμή του Π.

Το πρόβλημα της μέγιστης ροής είναι να μεγιστοποιηθεί το $|\varphi|$, δεδομένης C. Η απάντηση δίνεται στο Θεώρημα Max-flow Min-cut[7] . Θα αποδείξουμε μια ειδική περίπτωση αυτού του θεωρήματος, αυτή των άπειρων δέντρων.

Θεώρημα Max-flow Min-cut 4.5. *Αν C συνάρτηση χωρητικότητας στο δέντρο T τότε*

$$\max \{|\varphi| : \varphi \text{ είναι ροή χωρητικότητας } C\} = \inf \left\{ \sum_{e \in \Pi} C(e) : \Pi \text{ είναι cut-set} \right\} \tag{4.1}$$

Απόδειξη. Έστω

$$A = \{|\varphi| : \varphi \text{ είναι ροή χωρητικότητας } C\} \text{ και } B = \left\{ \sum_{e \in \Pi} C(e) : \Pi \text{ είναι cut-set} \right\} \tag{4.2}$$

Βήμα 1. Το A έχει μέγιστο στοιχείο. Αν $c = \sup A$ και φ_n ροές χωρητικότητας C ώστε $|\varphi_n| \to c$, τότε για κάθε ακμή $e \in E$, το $\varphi_n(e)$ φράσσεται από το $C(e)$, άρα περνώντας σε υπακολουθία, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το $\varphi(e) = \lim_n \varphi_n(e)$ υπάρχει. Εύκολα αποδεικνύεται ότι η φ είναι ροή χωρητικότητας C, και προφανώς $c = |\varphi|$ άρα $c = \max A$.

Βήμα 2. Κάθε cut-set Π περιέχει πεπερασμένο υποσύνολο που είναι cut-set. Αλλιώς, από τον ορισμό θα υπήρχε ακολουθία ημιευθειών $R_n = e_1^n e_2^n ...$ με $e_i^n \notin \Pi$ για $i \leq n$. Τότε για κάθε $m \in \mathbb{N}$, άπειρες ημιευθείες R_n θα συμφωνούσαν στη θέση m, δηλαδή θα υπήρχε ημιευθεία $R = e_1^{n_1} e_2^{n_2} ...$ που θα απέφευγε το Π, άτοπο.

Βήμα 3. $\max A \leq \inf B$. Έστω ροή φ χωρητικότητας C και Π cut-set, το οποίο από το προηγούμενο βήμα μπορεί να επιλεχθεί πεπερασμένο. Τότε

$$|\varphi| = \sum_{\bar{w}=s} \varphi(s, w) \leq \sum_{e \in \Pi} \varphi(e) \leq \sum_{e \in \Pi} C(e) \tag{4.3}$$

όπου η δεύτερη ισότητα προκύπτει με επαγωγή στη μέγιστη τάξη των ακμών του Π.

Βήμα 4. $\max A \geq \min B$ για πεπερασμένα δέντρα (δηλαδή για δέντρα με πεπερασμένο σύνολο κορυφών V). Έστω η φ με τη μέγιστη ισχύ. Αν υπάρχουν διαδοχικές ακμές $e_1, ..., e_k$ με $\varphi(e_i) < C(e_i)$ τότε μπορούμε να αυξήσουμε τη ροή σε κάθε e_i με ένα μικρό $\epsilon > 0$, και άρα την ισχύ της ροής, άτοπο. Άρα υπάρχει cut-set Π με $\varphi(e) = C(e)$ για κάθε $e \in \Pi$, και επιλέγουμε ελάχιστο τέτοιο Π. Τότε

$$|\varphi| = \sum_{\bar{w}=s} \varphi(s, w) = \sum_{e \in \Pi} \varphi(e) = \sum_{e \in \Pi} C(e) \tag{4.4}$$

και άρα $|\varphi| \geq \min B$.

Βήμα 5. $\max A \geq \inf B$ για άπειρα δέντρα. Εφαρμόζοντας το Βήμα 4 για το δέντρο T_n με κορυφές αυτές του T τάξης $\leq n$ (και τις αντίστοιχες ακμές του T), έχουμε ότι υπάρχει ροή φ_n ώστε

$$|\varphi_n| = \min \left\{ \sum_{e \in \Pi_n} C(e) : \Pi_n \text{ είναι cut-set του } T_n \right\} \geq \inf B \tag{4.5}$$

Περνώντας σε υπακολουθία υποθέτουμε ότι το $\varphi_n(e)$ συγκλίνει σε κάποιο $\varphi(e)$. Τότε η φ είναι ροή χωρητικότητας C με $|\varphi| = \lim_n |\varphi_n| \geq \inf B$. ♠

Το τελικό βήμα για την απόδειξη του Λήμματος του Frostman είναι ο εμπλουτισμός του ∂T με ένα μέτρο:

Θεώρημα 4.6. *Έστω ροή φ στο T και για κάθε $e \in E$, το σύνολο R_e που αποτελείται από όλες τις ημιευθείες που περιέχουν την e. Τότε υπάρχει ένα μέτρο ν ορισμένο στη σ-άλγεβρα που παράγεται από την οικογένεια $\mathcal{E} = \cup_{e \in E} R_e$, ώστε*

$$\nu(R_e) = \varphi(e) \tag{4.6}$$

Απόδειξη. Εύκολα αποδεικνύεται ότι η $\mathcal{E}$ είναι ημι-άλγεβρα, δηλαδή ότι $A, B \in \mathcal{E} \implies A \cap B \in \mathcal{E}$ και $A \in \mathcal{E} \implies A^c = \cup_i A_i$ για κάποια $A_i \in \mathcal{E}$. Αν ορίσουμε το ν στην $\mathcal{E}$ από την (4.6), τότε λόγω της διατήρησης της ροής, το ν είναι ένα premeasure (δηλαδή είναι αριθμήσιμα προσθετικό στην $\mathcal{E}$ και $\nu(\emptyset) = 0$). Επομένως από το Θεώρημα Επέκτασης του Καραθεοδωρή [1] το ν μπορεί να επεκταθεί σε μέτρο στην παραγόμενη σ-άλγεβρα του $\mathcal{E}$, και μάλιστα μοναδικά. ♠

Λήμμα του Frostman 4.7. *Αν $F \subseteq \mathbb{R}^d$ είναι κλειστό και $H^p(F) > 0$ τότε υπάρχει Borel μέτρο μ με $\mu(F) = \mu(\mathbb{R}^d) = 1$ και σταθερά $C > 0$ ώστε $\mu(E) \leq C(\operatorname{diam} E)^p$ για κάθε Borel E.*

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, το F είναι συμπαγές (αλλιώς δουλεύουμε με το $F_n = F \cap [-n, n]^d$ για αρκετά μεγάλο n) οπότε έστω $F \subseteq [0, 1]^d$.
Θα κατασκευάσουμε ένα δέντρο με βάση τους συμπαγείς κύβους $[a, b]^d$ του $\mathbb{R}^d$. Κάθε τέτοιος κύβος πλευράς s είναι η ένωση 2^d μη επικαλυπτόμενων υποκύβων πλευράς $s/2$. Για να κατασκευάσουμε το δέντρο, θεωρούμε το $[0, 1]^d$ ως πηγή, και τους 2^d υποκύβους του ως τα παιδιά του. Κάθε τέτοιος κύβος έχει 2^d υποκύβους ως παιδιά κ.τ.λ. Τέλος, αφαιρούμε τις κορυφές που είναι κύβοι που δεν τέμνουν το F (και τις αντίστοιχες ακμές). Το δέντρο που κατασκευάστηκε συμβολίζεται με T.
Οι ημιευθείες του T αντιστοιχούν σε φθίνουσες ακολουθίες κύβων που τέμνουν το F. Μάλιστα, αντιστοιχώντας κάθε ημιευθεία στην τομή της αντίστοιχης ακολουθίας κύβων, παίρνουμε μια επί απεικόνιση $\Phi : \partial T \to F$.
Αν Π είναι ένα cut-set τότε οι κορυφές απ′ όπου αρχίζουν οι ακμές του, αποτελούν ένα κάλυμμα του F. Πράγματι, αν R μια ημιευθεία τότε περιλαμβάνει μια τέτοια κορυφή v, η οποία με τη σειρά της περιέχει το $\Phi(R)$. Άρα, $\cup_v v \supseteq \cup_{R \in \partial T} \Phi(R) = F$.
Ορίζουμε μια συνάρτηση χωρητικότητας ως $C : E \to [0, +\infty)$, $C(e) = (\sqrt{d} 2^{-n})^p$, όπου n είναι η τάξη της e στο δέντρο. Τότε από την προηγούμενη παρατήρηση,

$$\inf \left\{ \sum_{e \in \Pi} C(e) : \Pi \text{ είναι cut-set} \right\} \geq \inf \left\{ \sum_i (\operatorname{diam}(A_i))^p : F \subseteq \cup_i A_i,\ A_i \in V \right\} \tag{4.7}$$

όπου V το σύνολο κορυφών του δέντρου. Επειδή $H^p(F) > 0$, το αριστερό μέλος είναι θετικό. Άρα από το Θεώρημα Max-flow Min-cut, υπάρχει ροή φ χωρητικότητας C και θετικής ισχύος. Αν ν είναι το μέτρο στο Θεώρημα 4.6, τότε το $\mu = \nu \circ \Phi^{-1}$ είναι μέτρο Borel στο F, το οποίο επεκτείνουμε σε όλα τα Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$ ορίζοντας $\mu(F^c) = 0$. Προφανώς, $\mu(C) = \varphi(e)$ αν C κύβος από τον οποίο αρχίζει η e, ιδιαιτέρως $0 < \mu(F) < +\infty$. Τέλος έστω Borel σύνολο E, θα δείξουμε ότι $\mu(E) \leq C(\operatorname{diam}(E))^p$ για κάποιο $C > 0$. Αυτό είναι τετριμμένο αν $\operatorname{diam}(E \cap F) = 0$, οπότε υποθέτουμε το αντίθετο και επιλέγουμε n

με $2^{-n} < \text{diam}(E \cap [0,1]^d) < 2^{-n+1}$. Τότε $E \cap [0,1]^d$ μπορεί να καλυφθεί από 3^d κύβους πλευράς 2^{-n} άρα

$$\mu(E) \leq 3^d d^{p/2} 2^{-np} \leq C(\text{diam}(E))^p \tag{4.8}$$

χρησιμοποιώντας ότι $\varphi(e) \leq C(e)$. Μένει να κανονικοποιήσουμε το μ ώστε να είναι μέτρο πιθανότητας. ♠

Πυκνότητες του Μέτρου Hausdorff

Ορισμός 5.1. Για κάθε Borel $E \subseteq X$ και $x \in X$, ορίζουμε τις άνω και κάτω πυκνότητες $\mathfrak{D}^{*p}(x, E)$ και $\mathfrak{D}^p_*(x, E)$ αντίστοιχα, ως:

$$\mathfrak{D}^{*p}(x, E) = \limsup_{r \to 0} \frac{H^p(E \cap B(x, r))}{(2r)^p} \tag{5.1}$$

και

$$\mathfrak{D}^p_*(x, E) = \liminf_{r \to 0} \frac{H^p(E \cap B(x, r))}{(2r)^p} \tag{5.2}$$

Όταν $\mathfrak{D}^{*p}(x, E) = \mathfrak{D}^p_*(x, E)$ τότε η κοινή τιμή είναι η p-διάστατη πυκνότητα $\mathfrak{D}^p(x, E)$.

Στο εξής, E είναι ένα Borel σύνολο στον $\mathbb{R}^d$ (ή γενικότερα, H^p μετρήσιμο σύνολο). Για ακέραιες διαστάσεις, η πυκνότητα υπολογίζεται πολύ εύκολα

Πρόταση 5.2. *Ισχύει ότι*

$$\mathfrak{D}^d(x, E) = \begin{cases} 1 & \text{για σχεδόν όλα τα } x \in E \\ 0 & \text{για σχεδόν όλα τα } x \in \mathbb{R}^d \setminus E \end{cases} \tag{5.3}$$

Απόδειξη. Προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα Παραγώγισης του Lebesgue[1] και από το Θεώρημα 1.6. ♠

Ο δεύτερος κλάδος της (5.3) επεκτείνεται και σε μη ακέραιες διαστάσεις. Πριν το αποδείξουμε αυτό, ας κάνουμε μια σημαντική παρατήρηση:

Πρόταση 5.3. *Αν $H^p(E) < +\infty$ τότε το H^p περιορισμένο στο E είναι μέτρο Radon: Για κάθε Borel σύνολο $A \subseteq E$ και $\epsilon > 0$ υπάρχουν ανοιχτά και συμπαγή U, K αντίστοιχα ώστε $K \subseteq A \subseteq U$ και*

$$H^p(E \cap U \setminus K) < \epsilon \tag{5.4}$$

Απόδειξη. Για κάθε $\delta > 0$ έχουμε μια κάλυψη του A από ανοιχτά U_n με διάμετρο $< \delta$ ώστε

$$\sum_n (\text{diam}\, U_n)^p \leq H^p_\delta(A) + \epsilon \tag{5.5}$$

Θέτοντας $U = \cup_n U_n$ έχουμε ότι

$$H^p_\delta(U) \leq \sum_n (\text{diam}\, U_n)^p \tag{5.6}$$

Αντικαθιστώντας το A με το $E \setminus A$, βρίσκουμε ένα ανοιχτό V ώστε $E \setminus A \subseteq V$ και $H^p(V) \leq H^p(E \setminus A) + \epsilon$. Θέτοντας $K = E \setminus V$ έχουμε ότι το K είναι κλειστό, $K \subseteq A$ και $H^p(A) \leq H^p(K) + \epsilon$. Το K μπορεί να υποτεθεί συμπαγές, τέμνοντας το εν ανάγκη με κάποιο ορθογώνιο μεγάλης διαμέτρου. ♠

Στο εξής, ο όρος 'σχεδόν παντού' και οι σχετικοί όροι, χρησιμοποιούνται αναφερόμενοι στο μέτρο H^p. Για παράδειγμα, μια ιδιότητα P ισχύει για σχεδόν όλα τα x αν $H^p(A) = 0$ όπου $A = \{x : P(x) \text{ δεν αληθεύει}\}$

Θεώρημα 5.4. *Αν $H^p(E) < +\infty$ τότε $\mathfrak{D}^p(x, E) = 0$ για σχεδόν όλα τα $x \in \mathbb{R}^d \setminus E$.*

Απόδειξη. Για τυχόν $t > 0$ θεωρούμε το

$$E'_t = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \setminus E : \mathfrak{D}^{*p}(x, E) > \frac{1}{t} \right\} \tag{5.7}$$

Θα δείξουμε ότι $H^p(E'_t) = 0$. Από την Πρόταση 5.3, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει συμπαγές $K \subseteq E$ τέτοιο ώστε $H^p(E \setminus K) \leq \epsilon$. Έστω $U = \mathbb{R}^d \setminus K$, $\delta > 0$, και

$$\mathcal{F} = \left\{ B(x, r) \subseteq U : r < \delta/2 \text{ και } \frac{H^p(E \cap B(x, r))}{(2r)^p} > \frac{1}{t} \right\} \tag{5.8}$$

Από το Θεώρημα Κάλυψης του Vitali [5] υπάρχει μια αριθμήσιμη οικογένεια ξένων ανά δύο μπάλων $B(x_n, r_n)$ στο $\mathcal{F}$ ώστε:

$$E'_t \subseteq \textstyle\bigcup_{n=1}^{\infty} B(x_n, 5r_n) \tag{5.9}$$

Έτσι έχουμε ότι:

$$H^p_{5\delta}(E'_t) \leq \sum_{n=1}^{\infty} (10r_n)^p \leq 5^p t \sum_{n=1}^{\infty} H^p(E \cap B(x_n, r_n)) \leq 5^p t H^p(E \cap U) = 5^p t H^p(E \setminus K) \leq 5^p t \epsilon$$

Αφήνοντας $\delta \to 0$ δίνει ότι $H^p(E'_t) \leq 5^p \epsilon t$ και τελικά $H^p(E'_t) = 0$ για κάθε $t > 0$. ♠

Δεν ισχύει πάντα ότι $\mathfrak{D}^p(x, E) = 1$ για σχεδόν όλα τα $x \in E$ [3] . Μπορούμε να δώσουμε όμως τα εξής φράγματα:

Θεώρημα 5.5. *Αν $H^p(E) < +\infty$ τότε $2^{-p} \leq \mathfrak{D}^{*p}(x, E) \leq 1$ για σχεδόν όλα τα $x \in E$.*

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι $\mathfrak{D}^{*p}(x, E) \leq 1$. Έστω $\epsilon, \delta > 0$, $0 < t < 1$. Αρκεί να δείξουμε ότι τα σύνολα

$$E_t = \left\{ x \in E : \mathfrak{D}^{*p}(x, E) > \frac{1}{t} \right\} \tag{5.10}$$

έχουν p-διάστατο μέτρο Hausdorff ίσο με 0. Από την Πρόταση 5.3 υπάρχει ένα ανοιχτό σύνολο U που περιέχει το E_t και:

$$H^p(E \cap U) \leq H^p(E_t) + \epsilon \tag{5.11}$$

Ορίζουμε την οικογένεια $\mathcal{F}$ όπως στην (5.8)· πάλι λόγω του Θεωρήματος του Vitali υπάρχει μια αριθμήσιμη οικογένεια ξένων ανά δύο μπάλων $B(x_n, r_n)$ στο $\mathcal{F}$ ώστε:

$$E_t \subset \bigcup_{n=1}^{k} B(x_n, r_n) \cup \bigcup_{n=k+1}^{\infty} B(x_n, 5r_n) \tag{5.12}$$

για κάθε $k = 1, 2, ...$ Τότε:

$$\begin{aligned} H_{5\delta}^p(E_t) &\leq \sum_{n=1}^{k} (2r_n)^p + \sum_{n=k+1}^{\infty} (10r_n)^p \\ &\leq t \sum_{n=1}^{k} H^p(E \cap B(x_n, r_n)) + 5^p t \sum_{n=k+1}^{\infty} H^p(E \cap B(x_n, r_n)) \\ &\leq tH^p(E \cap U) + 5^p t H^p \left(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} E \cap B(x_n, r_n) \right) \end{aligned} \tag{5.13}$$

Αφήνοντας το $k \to \infty$ συμπεραίνουμε ότι:

$$H_{5\delta}^p(E_t) \leq tH^p(E \cap U) \leq t(H^p(E_t) + \epsilon) \tag{5.14}$$

και στη συνέχεια αφήνοντας $\delta, \epsilon \to 0$ έχουμε ότι

$$H^p(E_t) \leq tH^p(E_t) \tag{5.15}$$

Αφού $H^p(E_t) \leq H^p(E) < \infty$ και $t < 1$, $H^p(E_t) = 0$.
Για την απόδειξη του $2^{-p} \leq \mathfrak{D}^{*p}(x, E)$ αρκεί να δείξουμε ότι αν $0 < t < 1$, τα σύνολα

$$A_t = \left\{ x \in E : \mathfrak{D}^{*p}(x, E) < \frac{t}{2^p} \right\} \tag{5.16}$$

έχουν μηδενικό p-διάστατο μέτρο Hausdorff. Αν για κάθε $k \in \mathbb{N}$ θεωρήσουμε τα

$$B_{t,k} = \left\{ x \in E : \frac{H^p(E \cap B(x, r))}{r^p} < t \ , \ 0 < r < \frac{1}{k} \right\} \tag{5.17}$$

τότε επειδή $A_t \subseteq \cup_k B_{t,k}$, αρκεί ότι $H^p(B_{t,k}) = 0$. Για τυχόν $\epsilon > 0$ υπάρχουν αριθμήσιμα το πλήθος E_m με $\operatorname{diam} E_m < 1/k$ ώστε $B_{t,k} \subseteq \cup_{m=1}^{\infty} E_m$, $B_{t,k} \cap E_m \neq \emptyset$, και

$$\sum_m (\operatorname{diam} E_m)^p \leq H^p(B_{t,k}) + \epsilon \tag{5.18}$$

Επιλέγουμε $x_m \in B_{t,k} \cap E_m$ για κάθε m. Τότε:

$$H^p(B_{t,k}) \leq \sum_m H^p(E_m) \leq \sum_m H^p(E \cap B(x_m, \operatorname{diam} E_m)) \leq \sum_m t(\operatorname{diam} E_m)^p \leq t(H^p(B_{t,k}) + \epsilon)$$

Αφήνοντας τώρα το $\epsilon \to 0$ δίνει ότι $H^p(B_{t,k}) \leq tH^p(B_{t,k})$ και άρα $H^p(B_{t,k}) = 0$.

♠

Αναφορές

[1] Gerald B. Folland. *Real Analysis and Modern Techniques*. Wiley-Interscience, 1999.

[2] Peter Morters and Yuval Peres. *Brownian Motion*. Cambridge University Press, 2010

[3] Pertti Mattila. *Geometry of Sets and Measures In Euclidean Spaces. Fractals and Rectifiability*. Cambridge University Press, 1995

[4] Walter Rudin. *Real and Complex Analysis*. Mc-Graw Hill, 1987

[5] Lawrence C. Evans and Ronald F. Gariepy. *Measure Theory and Fine Properties of Functions*. CRC Press, 1992

[6] Lennart Carleson. *Selected Problems on Exceptional Sets*. Van Nostrand-Reinhold, 1967

[7] Lester R. Ford, Jr. and Delbert P. Fulkerson. *Maximal Flow Through a Network*. Canadian Journal of Mathematics **8**, 399-404, 1956