605. Ασκήσεις – Κεφάλαιο 2

Ολοκλήρωμα Lebesgue

27 Μαρτίου 2021

Φυλλάδιο 1 - Άσκηση 2

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι το A είναι Lebesgue μετρήσιμο αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει Lebesgue μετρήσιμο $E \subseteq \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\lambda^*(A \triangle E) < \varepsilon$.

Αν το A είναι Lebesgue μετρήσιμο, για κάθε $\varepsilon > 0$ θεωρούμε το $E = A$ το οποίο είναι Lebesgue μετρήσιμο και προφανώς ικανοποιεί την $\lambda(A \triangle E) = \lambda(\varnothing) = 0 < \varepsilon$.
Αντίστροφα, έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει Lebesgue μετρήσιμο $E \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda^*(A \triangle E) < \varepsilon$. Θεωρούμε $\varepsilon > 0$ και παίρνουμε ένα τέτοιο E. Τότε, $\lambda^*(A \cap E^c), \lambda^*(A^c \cap E) < \varepsilon$.
Έστω $X \subseteq \mathbb{R}$. Γράφουμε

$$\begin{aligned} \lambda^*(X \cap A) + \lambda^*(X \cap A^c) &= \lambda^*(X \cap A \cap E) + \lambda^*(X \cap A \cap E^c) \\ &\quad + \lambda^*(X \cap A^c \cap E) + \lambda^*(X \cap A^c \cap E^c) \\ &< \lambda^*(X \cap A \cap E) + \lambda^*(X \cap A^c \cap E^c) + 2\varepsilon \\ &\leqslant \lambda^*(X \cap E) + \lambda^*(X \cap E^c) + 2\varepsilon = \lambda^*(X) + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Τώρα αφήνουμε το $\varepsilon \to 0^+$.

Φυλλάδιο 1 - Άσκηση 2

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι το A είναι Lebesgue μετρήσιμο αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει Lebesgue μετρήσιμο $E \subseteq \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\lambda^*(A \triangle E) < \varepsilon$.

Αν το A είναι Lebesgue μετρήσιμο, για κάθε $\varepsilon > 0$ θεωρούμε το $E = A$ το οποίο είναι Lebesgue μετρήσιμο και προφανώς ικανοποιεί την $\lambda^*(A \triangle E) = \lambda^*(\varnothing) = 0 < \varepsilon$.
Αντίστροφα, έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει Lebesgue μετρήσιμο $E \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda^*(A \triangle E) < \varepsilon$. Για κάθε $k \geqslant 1$ μπορούμε να βρούμε Lebesgue μετρήσιμο $E_k \subseteq \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\lambda^*(A \triangle E_k) < \frac{1}{k^2}$. Ορίζουμε

$$E = \liminf_n E_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} E_k.$$

Το E είναι Lebesgue μετρήσιμο και ικανοποιεί τα εξής:

1. Για κάθε $n \geqslant 1$ και $k \geqslant n$ έχουμε

$$\lambda^*\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} E_k \setminus A\right) \leqslant \lambda^*(E_k \setminus A) \leqslant \lambda^*(A \triangle E_k) < \frac{1}{k^2},$$

άρα $\lambda^*\Big(\bigcap_{k=n}^{\infty} E_k \setminus A\Big) = 0$. Έπεται ότι

$$\lambda^*(E \setminus A) = \lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} E_k \setminus A\right) = \lambda^*\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}\Big(\bigcap_{k=n}^{\infty} E_k \setminus A\Big)\Big) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\lambda^*\Big(\bigcap_{k=n}^{\infty} E_k \setminus A\Big) = 0.$$

Δηλαδή, $\lambda(E \setminus A) = 0$.

2. Για κάθε $n \geqslant 1$ έχουμε

$$A \setminus E \subseteq A \setminus \bigcap_{k=n}^{\infty} E_k = \bigcup_{k=n}^{\infty}(A \setminus E_k),$$

άρα

$$\lambda^*(A \setminus E) \leqslant \sum_{k=n}^{\infty}\lambda^*(A \setminus E_k) < \sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^2}.$$

Όμως, $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^2} = 0$, άρα $\lambda(A \setminus E) = 0$.

Συνδυάζοντας τα παραπάνω παίρνουμε $\lambda(A \triangle E) = \lambda(A \setminus E) + \lambda(E \setminus A) = 0$.

Φυλλάδιο 1 - Άσκηση 4(α)

Σωστό ή λάθος; Αν $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μια φθίνουσα ακολουθία υποσυνόλων του $[0,1]$ τότε

$$\lim_{n\to\infty} \lambda^*(A_n) = \lambda^*\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big).$$

Στο (πρώτο) μάθημα ορίσαμε μια ακολουθία ξένων ανά δύο υποσυνόλων N_n του $[-1,2]$ με τις εξής ιδιότητες: (i) $[0,1] \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$, και (ii) κάθε $N_n = N + q_n$ όπου q_n ρητός του $[-1,1]$ και N συγκεκριμένο υποσύνολο του $[0,1]$ που ορίστηκε με χρήση του αξιώματος της επιλογής). Από αυτήν την κατασκευή είναι φανερό ότι $\lambda^*(N_n) = \lambda^*(N) > 0$ για κάθε $n \geqslant 1$, και ότι τα N_n είναι μη μετρήσιμα σύνολα. Ορίζουμε $B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} N_k$. Η $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι φθίνουσα ακολουθία υποσυνόλων του $[-1,2]$ και έχουμε $\lambda^*(B_n) \geqslant \lambda^*(N_n) = \lambda^*(N)$ για κάθε $n \geqslant 1$, άρα $\lim_{n\to\infty} \lambda^*(B_n) \geqslant \lambda^*(N) > 0$. Όμως $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \varnothing$, άρα

$$\lim_{n\to\infty} \lambda^*(B_n) > \lambda^*\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\Big).$$

Για να μεταφέρουμε αυτή την κατασκευή στο $[0,1]$ θεωρούμε τα σύνολα $A_n = \frac{1}{3}(1 + B_n) \subseteq [0,1]$.

Φυλλάδιο 1 - Άσκηση 9

Στο $[0,1]$ θεωρούμε τη σχέση ισοδυναμίας $x \sim y$ αν και μόνο αν $x - y \in \mathbb{Q}$ και στη συνέχεια ορίζουμε $N \subset [0,1]$ που περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο από κάθε κλάση ισοδυναμίας. Ορίζουμε επίσης $T = [0,1] \setminus N$. Αποδείξτε ότι $\lambda^*(T) = 1$ και συμπεράνατε ότι

$$\lambda^*(N) + \lambda^*(T) > \lambda^*(N \cup T).$$

- Υποθέτουμε ότι $\lambda^*(T) < 1$. Τότε υπάρχει ανοικτό $T \subseteq G \subseteq \mathbb{R}$ (ένωση ανοικτών διαστημάτων) με $\lambda(G) < 1$.
- Άρα υπάρχει $E \subseteq [0,1]$ με $\lambda(E) > 0$ και $E \cap T = \varnothing$. Δηλαδή, $E \subseteq N$.
- Τότε $E - E \subseteq N - N$ και το $E - E$ περιέχει διάστημα από το λήμμα του Steinhaus.
- Αυτό είναι άτοπο γιατί το $N - N$ δεν περιέχει ρητούς διαφορετικούς από τον 0.
- Τέλος, $\lambda^*(N) > 0$ διότι το N είναι μη μετρήσιμο.

Φυλλάδιο 1 - Άσκηση 10

Θεωρούμε το σύνολο $A := \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta_k}{k!} \mid \delta_k = 0 \text{ ή } 1 \right\}$. Αποδείξτε ότι το A είναι κλειστό σύνολο με κενό εσωτερικό και μέτρο $\lambda(A) = 0$.
Εξετάστε αν υπάρχει φυσικός αριθμός s τέτοιος ώστε το σύνολο

$$s \cdot A := A + A + \cdots + A = \{y_1 + \cdots + y_s \mid y_i \in A\}$$

να έχει θετικό μέτρο.

Υπόδειξη: Αποδείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το A καλύπτεται από 2^{n+1} διαστήματα μήκους $\frac{1}{n!}$.

Άσκηση 6

Έστω $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι αν το $B \subseteq \mathbb{R}$ είναι σύνολο Borel, τότε το $f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \in B\}$ είναι μετρήσιμο.

Θεωρούμε την κλάση $\mathcal{A} = \{B \subseteq \mathbb{R} \mid f^{-1}(B) \text{ μετρήσιμο}\}$. Θέλουμε να δείξουμε ότι η σ-άλγεβρα των Borel υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ περιέχεται στην $\mathcal{A}$. Γι' αυτό δείχνουμε διαδοχικά τα εξής:

(i) Η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα: Πράγματι· $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ μετρήσιμο, επομένως $\mathbb{R} \in \mathcal{A}$. Αν $B \in \mathcal{A}$ τότε $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus B) = \mathbb{R} \setminus f^{-1}(B)$ και εφόσον το $f^{-1}(B)$ είναι μετρήσιμο έπεται ότι το $\mathbb{R} \setminus f^{-1}(B)$ είναι μετρήσιμο. Τέλος, αν $\{B_n\}$ ακολουθία στην $\mathcal{A}$, τότε $f^{-1}(\cup_{n=1}^{\infty} B_n) = \cup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(B_n)$ είναι μετρήσιμο αφού κάθε $f^{-1}(B_n)$ είναι μετρήσιμο.

(ii) Δείχνουμε ότι η $\mathcal{A}$ περιέχει τα ανοικτά: Αφού f μετρήσιμη το $f^{-1}((a, b)) = \{f < b\} \cap \{f > a\}$ είναι μετρήσιμο, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. Δηλαδή, $(a, b) \in \mathcal{A}$. Όμως κάθε ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ γράφεται ως αριθμήσιμη (ξένη) ένωση ανοικτών διαστημάτων κι εφόσον η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα προκύπτει ότι περιέχει τα ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

Από τον ορισμό της Borel σ-άλγεβρας έπεται ότι $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{A}$. Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο.

Άσκηση 7

Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda(A) < \infty$ και έστω $f : A \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε $\omega_f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$\omega_f(t) = \lambda(\{x \in A : f(x) > t\}).$$

(α) Δείξτε ότι η ω_f είναι φθίνουσα και συνεχής από δεξιά. Σε ποιά σημεία είναι ασυνεχής;

(α) Είναι προφανές ότι η ω_f είναι φθίνουσα. Για να δείξουμε ότι είναι δεξιά συνεχής, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $t_n \downarrow t$ ισχύει $\omega_f(t_n) \to \omega_f(t)$. Ορίζουμε $A_n = \{x \in A : f(x) > t_n\}$. Τότε, $A_n \subseteq A_{n+1}$ και $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \in A : f(x) > t\}$. Επομένως, από την συνέχεια του μέτρου παίρνουμε:

$$\omega_f(t) = \lambda\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \lambda(A_n) = \lim_{n\to\infty} \omega_f(t_n).$$

Η ω_f είναι συνεχής αν και μόνον αν είναι συνεχής από τα αριστερά. Ισοδύναμα, αν για κάθε (t_n) με $t_n \uparrow t$ ισχύει $\omega_f(t_n) \to \omega_f(t)$. Δείχνουμε όπως πριν ότι

$$\lim_{n\to\infty} \omega_f(t_n) = \lim_{n\to\infty} \lambda(\{x \in A : f(x) > t_n\}) = \lambda(\{x \in A : f(x) \geqslant t\}),$$

όπου εδώ χρησιμοποιούμε την υποθέση $\lambda(A) < \infty$. Επομένως, η ω_f είναι αριστερά συνεχής αν και μόνον αν

$$\lambda(\{x : f(x) > t\}) = \lambda(\{x : f(x) \geqslant t\}) \iff \lambda(\{x : f(x) = t\}) = \lambda(f^{-1}(\{t\})) = 0.$$

Άσκηση 7

Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda(A) < \infty$ και έστω $f : A \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε $\omega_f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$\omega_f(t) = \lambda(\{x \in A : \ f(x) > t\}).$$

(β) Αν οι $f_k, f : A \to \mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμες και $f_k \uparrow f$, δείξτε ότι $\omega_{f_k} \uparrow \omega_f$.

(β) Είναι προφανές ότι για κάθε t έχουμε $\omega_{f_k}(t) \leqslant \omega_{f_{k+1}}(t)$. Έστω $t \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε $B_k = \{x \in A : f_k(x) > t\}$. Τότε, $B_k \subseteq B_{k+1}$ και $\cup_{k=1}^{\infty} B_k = \{x \in A : f(x) > t\}$. Άρα, μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} \omega_{f_k}(t) &= \lim_{k\to\infty} \lambda(\{x \in A : f_k(x) > t\}) = \lim_{k\to\infty} \lambda(B_k) \\ &= \lambda\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\Big) = \lambda(\{x \in A : f(x) > t\}) = \omega_f(t).\end{aligned}$$

Άσκηση 10

Υποθέτουμε ότι f και f_n, $n \in \mathbb{N}$, είναι μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις, $f_n \searrow f$, και υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $\int f_k < \infty$. Δείξτε ότι

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n.$$

Θεωρούμε την ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων $\{f_k - f_n\}_{n=k}^{\infty}$. Αφού η $\{f_n\}$ είναι φθίνουσα, συμπεραίνουμε ότι η $\{f_k - f_n\}_{n=k}^{\infty}$ είναι αύξουσα. Αφού $f_n \searrow f$, έχουμε $f_k - f_n \nearrow f_k - f$. Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης παίρνουμε

$$\int (f_k - f_n) \to \int (f_k - f).$$

Παρατηρούμε ότι $0 \leqslant f_k - f \leqslant f_k$, άρα

$$\int (f_k - f_n) \leqslant \int (f_k - f) \leqslant \int f_k < \infty$$

για κάθε n. Δηλαδή, η $f_k - f$ και όλες οι $f_k - f_n$ είναι ολοκληρώσιμες. Από την γραμμικότητα του ολοκληρώματος,

$$\int f_n = \int f_k - \int (f_k - f_n) \to \int f_k - \int (f_k - f) = \int f.$$

Άσκηση 11

Έστω f μετρήσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $f > 0$ $\sigma.\pi.$ Αν $\int_E f = 0$ για κάποιο μετρήσιμο σύνολο E, δείξτε ότι $\lambda(E) = 0$.

Υποθέτουμε πρώτα ότι $f > 0$ παντού στο E, δηλαδή $f(x) > 0$ για κάθε $x \in E$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $E_n = \{x \in E : f(x) > 1/n\}$. Παρατηρούμε ότι

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n,$$

διότι $f(x) > 0$ αν και μόνο αν υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $f(x) > 1/n$. Από την ανισότητα του Markov,

$$\frac{1}{n}\lambda(E_n) \leqslant \int_{E_n} f \leqslant \int_E f = 0,$$

άρα $\lambda(E_n) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έπεται ότι

$$\lambda(E) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) = 0.$$

Αυτό το επιχείρημα καλύπτει και την περίπτωση όπου $f > 0$ $\sigma.\pi.$: αν $Z = \{x \in E : f(x) = 0\}$ τότε $\lambda(Z) = 0$ και $\int_{E\setminus Z} f = 0$. Μπορούμε λοιπόν να δουλέψουμε με το $E \setminus Z$: αν δείξουμε ότι $\lambda(E \setminus Z) = 0$, θα έχουμε και $\lambda(E) = 0$.

Άσκηση 12

Έστω f μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} f = \lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n} f = \lim_{n\to\infty}\int_{\{f\geqslant 1/n\}} f.$$

Ορίζουμε $g_n(x) = f(x)\chi_{[-n,n]}(x)$. Παρατηρούμε ότι η $\{g_n\}$ είναι αύξουσα και, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε τελικά $x \in [-n, n]$ άρα $g_n(x) = f(x) \to f(x)$. Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης παίρνουμε

$$\int_{-n}^{n} f = \int f\chi_{[-n,n]} = \int g_n \to \int f.$$

Για το δεύτερο ερώτημα, ορίζουμε $h_n(x) = f(x)\chi_{\{f\geqslant 1/n\}}(x)$. Παρατηρούμε ότι η $\{h_n\}$ είναι αύξουσα διότι $\{f \geqslant 1/n\} \subseteq \{f \geqslant 1/(n+1)\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $f(x) > 0$ έχουμε τελικά $f(x) \geqslant 1/n$ άρα $h_n(x) = f(x) \to f(x)$, ενώ αν $f(x) = 0$ έχουμε $h_n(x) = 0$ για κάθε n, οπότε πάλι $h_n(x) \to 0 = f(x)$. Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης παίρνουμε

$$\int_{\{f\geqslant 1/n\}} f = \int f\chi_{\{f\geqslant 1/n\}} = \int h_n \to \int f.$$

Άσκηση 13

Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} f = \lim_{n\to\infty} \int_{\{f\leqslant n\}} f.$$

Ορίζουμε $g_n(x) = f(x)\chi_{\{f\leqslant n\}}(x)$. Παρατηρούμε ότι η $\{g_n\}$ είναι αύξουσα διότι $\{f \leqslant n\} \subseteq \{f \leqslant n+1\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $f(x) < \infty$ έχουμε τελικά $f(x) \leqslant n$ άρα $g_n(x) = f(x) \to f(x)$. Δηλαδή, αν $E = \{f < \infty\}$, έχουμε $g_n\chi_E \nearrow f\chi_E$. Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης παίρνουμε

$$\int_{\{f\leqslant n\}} f = \int f\chi_{\{f\leqslant n\}} = \int g_n = \int g_n\chi_E \to \int f\chi_E.$$

Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη, γνωρίζουμε ότι $\lambda(E^c) = 0$ και $\int f\chi_{E^c} = 0$. Έπεται ότι

$$\int f = \int f\chi_E + \int f\chi_{E^c} = \int f\chi_E = \lim_{n\to\infty} \int_{\{f\leqslant n\}} f.$$

Άσκηση 16

Έστω $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει μετρήσιμο σύνολο E με $\lambda(E) < \infty$, ώστε

$$\int_E f > \int f - \varepsilon.$$

Επιπλέον, δείξτε ότι το E μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε η f να είναι φραγμένη στο E.

Ορίζουμε $g_n(x) = f(x)\chi_{\{1/n \leqslant f \leqslant n\}}(x)$. Παρατηρούμε ότι η $\{g_n\}$ είναι αύξουσα διότι $\{1/n \leqslant f \leqslant n\} \subseteq \{1/(n+1) \leqslant f \leqslant n+1\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $0 < f(x) < \infty$ έχουμε τελικά $f(x) \geqslant 1/n$ και $f(x) \leqslant n$, άρα $g_n(x) = f(x) \to f(x)$, ενώ αν $f(x) = 0$ έχουμε $g_n(x) = 0$ για κάθε n, οπότε πάλι $g_n(x) \to 0 = f(x)$. Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης παίρνουμε

$$\int_{\{1/n \leqslant f \leqslant n\}} f = \int f\chi_{\{1/n \leqslant f \leqslant n\}} = \int g_n \to \int f.$$

Συνεπώς, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε, αν θέσουμε $E = \{1/n \leqslant f \leqslant n\}$ τότε $\int_E f > \int f - \varepsilon$. Παρατηρούμε ότι η f είναι φραγμένη (από n) στο E. Τέλος, από την ανισότητα του Markov,

$$\lambda(E) \leqslant \lambda(\{f \geqslant 1/n\}) \leqslant n \int f < +\infty.$$

Άσκηση 18

Έστω $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν $\lambda(E) < \delta$ τότε $\int_E f < \varepsilon$.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε την συνάρτηση $f_n(x) = \min\{f(x), n\}$. Παρατηρήστε ότι $f_n \leqslant n$. Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f$$

(η $\{f_n\}$ είναι αύξουσα και $f_n \to f$). Έστω $\varepsilon > 0$. Μπορούμε να βρούμε $n \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\int (f - f_n) = \int f - \int f_n < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Επιλέγουμε $\delta = \frac{\varepsilon}{2n}$. Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(E) < \delta$. Γράφουμε

$$\int_E f = \int_E f_n + \int_E (f - f_n) \leqslant \int_E f_n + \int (f - f_n) \leqslant n\lambda(E) + \frac{\varepsilon}{2} < n\frac{\varepsilon}{2n} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Άσκηση 20

Έστω (f_n) μια ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων. Είναι σωστό ότι

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n \leqslant \int \left(\limsup_{n\to\infty} f_n\right);$$

Αν προσθέσουμε την υπόθεση ότι η (f_n) είναι ομοιόμορφα φραγμένη;

Όχι. Αν $f_n = \frac{1}{n}\chi_{[0,n]}$, τότε $f_n(x) \to 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επίσης, η $\{f_n\}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη ($0 \leqslant f_n \leqslant 1$). Παρατηρήστε ότι

$$\int \limsup_{n\to\infty} f_n = \int \lim_{n\to\infty} f_n = 0,$$

αλλά $\int f_n = \frac{1}{n}\lambda([0,n]) = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n = 1.$$

Άσκηση 22

Έστω f και f_n, $n \in \mathbb{N}$, μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις με $f_n \to f$ και $\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f < \infty$. Δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} \int_E f_n = \int_E f$ για κάθε μετρήσιμο σύνολο E.

Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Από το Λήμμα του Fatou παίρνουμε

$$\int_E f \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n \quad \text{και} \quad \int_{E^c} f \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_{E^c} f_n$$

δηλαδή

$$\int f - \int_E f \leqslant \liminf_{n\to\infty} \left(\int f_n - \int_E f_n \right).$$

Αφού

$$-\int f = \lim_{n\to\infty} \left(-\int f_n \right),$$

προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε

$$-\int_E f \leqslant \liminf_{n\to\infty} \left(-\int_E f_n \right) = -\limsup_{n\to\infty} \int_E f_n.$$

Δηλαδή,

$$\limsup_{n\to\infty} \int_E f_n \leqslant \int_E f \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n.$$

Συνεπώς, $\int_E f_n \to \int_E f$.

Άσκηση 25

Υπολογίστε το $\lim_{n\to\infty} \int_0^n (1-(x/n))^n e^{x/2} dx$.

Θεωρούμε την ακολουθία $f_n(x) = (1-x/n)^n e^{x/2} \chi_{[0,n]}$. Οι f_n είναι μετρήσιμες συναρτήσεις και $|f_n(x)| \leqslant e^{-x/2}\chi_{[0,\infty)}$. Η συνάρτηση $g(x) = e^{-x/2}\chi_{[0,\infty)}$ είναι ολοκληρώσιμη, οπότε από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έπεται ότι $\lim_n \int f_n = \int \lim_n f_n$. Αλλά, $\lim_n f_n(x) = 0$ για κάθε $x < 0$ ενώ αν $x \geqslant 0$ εχουμε

$$\lim_n f_n(x) = \lim_n \left[\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{x/2} \right] = e^{-x} e^{x/2} = e^{-x/2}.$$

Συνεπώς, έχουμε

$$\lim_n \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{-x/2}\, dx = \int_0^\infty e^{-x/2}\, dx = 2.$$

Άσκηση 59

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Υπολογίστε το

$$\lim_{n\to\infty} n \int_{\mathbb{R}} \ln\left(1 + \frac{|f(x)|^2}{n^2}\right) \, d\lambda(x).$$

Παρατηρούμε ότι $1 + \frac{|f(x)|^2}{n^2} \leqslant \left(1 + \frac{|f(x)|}{n}\right)^2$, άρα

$$n \ln\left(1 + \frac{|f(x)|^2}{n^2}\right) \leqslant 2n \ln\left(1 + \frac{|f(x)|}{n}\right) \leqslant 2|f(x)|,$$

αν χρησιμοποιήσουμε και την $\ln\left(1 + \frac{|f(x)|}{n}\right) \leqslant \frac{|f(x)|}{n}$. Δηλαδή, αν θεωρήσουμε τις $g_n(x) = n \ln\left(1 + \frac{|f(x)|^2}{n^2}\right)$, έχουμε $|g_n| \leqslant 2|f|$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
Η f είναι ολοκληρώσιμη, άρα $|f(x)| < \infty$ σχεδόν παντού. Συνεπώς,

$$|g_n(x)| = n \ln\left(1 + \frac{|f(x)|^2}{n^2}\right) \leqslant n \frac{|f(x)|^2}{n^2} = \frac{|f(x)|^2}{n} \to 0$$

σχεδόν παντού. Δηλαδή, $g_n \to 0$ σχεδόν παντού. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έπεται ότι

$$\int_{\mathbb{R}} n \ln\left(1 + \frac{|f(x)|^2}{n^2}\right) d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} g_n(x) d\lambda(x) \to 0.$$

Άσκηση 30

Έστω (f_n), (g_n) και g ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι $|f_n| \leqslant g_n$, $f_n \to f$, $g_n \to g$ (όλα αυτά σχεδόν παντού) και ότι $\int g_n \to \int g$. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και ότι $\int f_n \to \int f$.

Οι υποθέσεις εξασφαλίζουν ότι οι f, g και οι f_n, g_n παίρνουν πεπερασμένες τιμές σχεδόν παντού. Από την $|f_n| \leqslant g_n$ έχουμε $-g_n \leqslant f_n \leqslant g_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή

$$f_n + g_n \geqslant 0 \quad \text{και} \quad g_n - f_n \geqslant 0.$$

Αφού $f_n + g_n \to f + g$ και $g_n - f_n \to g - f$, το Λήμμα του Fatou μας δίνει:

$$\int f + \int g = \int (f+g) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int (f_n + g_n) = \liminf_{n\to\infty} \int f_n + \int g$$

(χρησιμοποιήσαμε την $\int g_n \to \int g$). Άρα, $\int f \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int f_n$. Πάλι από το Λήμμα του Fatou,

$$\int g - \int f = \int (g - f) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int (g_n - f_n) = \int g - \limsup_{n\to\infty} \int f_n,$$

δηλαδή, $\limsup_{n\to\infty} \int f_n \leqslant \int f$. Έπεται ότι $\limsup_{n\to\infty} \int f_n = \liminf_{n\to\infty} \int f_n = \int f$. Άρα,

$$\int f_n \to \int f.$$

Άσκηση 31

Έστω (f_n), f ολοκληρώσιμες και έστω ότι $f_n \to f$ σχεδόν παντού. Δείξτε ότι $\int |f_n - f| \to 0$ αν και μόνο αν $\int |f_n| \to \int |f|$.

($\Longrightarrow$) Έχουμε

$$\left| \int |f_n| - \int |f| \right| \leqslant \int \big| |f_n| - |f| \big| \leqslant \int |f_n - f| \to 0.$$

Άρα,

$$\int |f_n| \to \int |f|.$$

($\Longleftarrow$) Έχουμε $\big| |f_n - f| - |f_n| \big| \leqslant |f|$. Η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη και $|f_n - f| - |f_n| \to -|f|$. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης,

$$\int (|f_n - f| - |f_n|) \to \int (-|f|).$$

Έχουμε υποθέσει ότι

$$\int |f_n| \to \int |f|.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη, παίρνουμε

$$\int |f_n - f| \to 0.$$

Άσκηση 56

Έστω $f, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t) - f_n(t)| \, d\lambda(t) \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

Δείξτε ότι $f_n \to f$ σχεδόν παντού.

Από το θεώρημα Beppo Levi έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(t) - f(t)| \, d\lambda(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n(t) - f(t)| \, d\lambda(t) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Άρα, η συνάρτηση $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n - f|$ είναι ολοκληρώσιμη. Έπεται ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(t) - f(t)|$$

συγκλίνει σχεδόν παντού. Ειδικότερα, $f_n(t) - f(t) \to 0$ σχεδόν παντού.

Άσκηση 34

Έστω $f_n : E \to \mathbb{R}$ ακολουθία ολοκληρώσιμων συναρτήσεων με $\sum_{n=1}^{\infty} \int_E |f_n| < +\infty$. Δείξτε ότι:

(α) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ συγκλίνει σχεδόν για κάθε $x \in E$.

(α) Από το θεώρημα Beppo–Levi έχουμε ότι $\int_E \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E |f_n| < +\infty$, δηλαδή η συνάρτηση $F = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ είναι ολοκληρώσιμη, άρα πεπερασμένη σχεδόν παντού. Άρα, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ συγκλίνει (απόλυτα) σχεδόν για κάθε $x \in E$.

Άσκηση 34

Έστω $f_n : E \to \mathbb{R}$ ακολουθία ολοκληρώσιμων συναρτήσεων με $\sum_{n=1}^{\infty} \int_E |f_n| < +\infty$. Δείξτε ότι: (β) Η συνάρτηση $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ είναι ολοκληρώσιμη και $\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n$.

(β) Έστω $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, η οποία ορίζεται σχεδόν για κάθε $x \in E$. Τότε, σχεδόν για κάθε $x \in E$ ισχύει

$$|f(x)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| = F(x).$$

Η F είναι ολοκληρώσιμη, από υπόθεση, άρα η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη. Θεωρούμε την ακολουθία ολοκληρωσίμων συναρτήσεων $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ και παρατηρούμε ότι σχεδόν για κάθε $x \in E$ ισχύει

$$|s_n(x)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |f_k(x)| \leqslant F(x).$$

Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έχουμε:

$$\int_E \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) = \int_E \lim_n s_n = \lim_n \int_E s_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n.$$

Άσκηση 36

Έστω $k, n \in \mathbb{N}$ με $k \leqslant n$ και $E_1, \ldots, E_n$ μετρήσιμα υποσύνολα του $[0,1]$ με την εξής ιδιότητα: κάθε $x \in [0,1]$ ανήκει σε τουλάχιστον k από τα $E_1, E_2, \ldots, E_n$. Δείξτε ότι υπάρχει $i \leqslant n$ ώστε $\lambda(E_i) \geqslant k/n$.

Θεωρούμε την $f = \sum_{i=1}^n \chi_{E_i}$. Αφού κάθε $x \in [0,1]$ ανήκει σε τουλάχιστον k από τα $E_1, \ldots, E_n$, έχουμε

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \chi_{E_i}(x) \geqslant k$$

για κάθε $x \in [0,1]$. Συνεπώς,

$$\sum_{i=1}^n \lambda(E_i) = \sum_{i=1}^n \int_{[0,1]} \chi_{E_i}(x)\, d\lambda(x) = \int_{[0,1]} f\, d\lambda \geqslant k.$$

Έπεται ότι

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n} \lambda(E_i) \geqslant \frac{k}{n}.$$

Δηλαδή, υπάρχει $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ με την ιδιότητα $\lambda(E_{i_0}) \geqslant \frac{k}{n}$.

Άσκηση 49

Έστω A Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $0 < \lambda(A) < \infty$. Αν $f : A \to \mathbb{R}$ είναι μια γνησίως θετική μετρήσιμη συνάρτηση, δείξτε ότι: για κάθε $t > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε, αν E είναι Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του A με $\lambda(E) > t$ τότε $\int_E f\, d\lambda \geqslant \delta$.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $A_n = \left\{x \in A : f(x) < \frac{1}{n}\right\}$. Η (A_n) είναι φθίνουσα ακολουθία μετρήσιμων υποσυνόλων του A, και $\bigcap_n A_n = \varnothing$ διότι η f είναι γνησίως θετική. Αφού $\lambda(A) < \infty$, συμπεραίνουμε ότι $\lim_n \lambda(A_n) = 0$.
Έστω $t > 0$. Επιλέγουμε $n(t)$ ώστε $\lambda(A_{n(t)}) < \frac{t}{2}$. Τότε, για κάθε μετρήσιμο $E \subseteq A$ με $\lambda(E) > t$, έχουμε

$$\lambda(E \setminus A_{n(t)}) \geqslant \lambda(E) - \lambda(A_{n(t)}) \geqslant \frac{t}{2}.$$

Συνεπώς,

$$\int_E f\, d\lambda \geqslant \int_{E \setminus A_{n(t)}} f\, d\lambda \geqslant \frac{1}{n(t)} \lambda(E \setminus A_{n(t)}) \geqslant \frac{t}{2n(t)}.$$

Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο, με $\delta = \delta(t) = \frac{t}{2n(t)}$.

Άσκηση 57

Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις που ικανοποιούν τα εξής:

(α) Υπάρχει μη αρνητική ολοκληρώσιμη $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ ώστε: για κάθε n ισχύει $|f_n| \leqslant h$ σχεδόν παντού.

(β) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ ισχύει $\int_{[0,1]} f_n g \, d\lambda \to 0$.

Δείξτε ότι: για κάθε Borel σύνολο $A \subset [0,1]$, $\int_A f_n \, d\lambda \to 0$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η h είναι ολοκληρώσιμη, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε: αν E είναι μετρήσιμο υποσύνολο του $[0,1]$ και $\lambda(E) < \delta$, τότε $\int_E h \, d\lambda < \varepsilon$.
Έστω A Borel υποσύνολο του $[0,1]$. Μπορούμε να βρούμε συμπαγές K και ανοικτό $U \subset [0,1]$ ώστε $K \subseteq A \subseteq U$ και $\lambda(U \setminus K) < \delta$. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα του Urysohn βρίσκουμε συνεχή συνάρτηση $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $0 \leqslant g \leqslant 1$, $g(x) = 1$ για κάθε $x \in K$ και $g(x) = 0$ για κάθε $x \in [0,1] \setminus U$. Τώρα γράφουμε

$$\int_A f_n \, d\lambda = \int_{[0,1]} f_n \chi_A \, d\lambda = \int_{[0,1]} f_n g \, d\lambda + \int_{[0,1]} f_n(\chi_A - g) \, d\lambda.$$

Έχουμε γράψει

$$\int_A f_n \, d\lambda = \int_{[0,1]} f_n \chi_A \, d\lambda = \int_{[0,1]} f_n g \, d\lambda + \int_{[0,1]} f_n(\chi_A - g) \, d\lambda,$$

και παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\left|\int_{[0,1]} f_n(\chi_A - g) \, d\lambda\right| &\leqslant \int_{[0,1]} |f_n| \, |\chi_A - g| \, d\lambda \leqslant \int_{[0,1]} h \, |\chi_A - g| \, d\lambda \\ &= \int_{U\setminus K} h \, |\chi_A - g| \, d\lambda \leqslant \int_{U\setminus K} h \, d\lambda < \varepsilon,\end{aligned}$$

διότι $\chi_A - g \equiv 0$ στο K και στο $[0,1] \setminus U$, $|\chi_A - g| \leqslant 1$ στο $U \setminus K$, και $\lambda(U \setminus K) < \delta$. Έπεται ότι

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\int_A f_n \, d\lambda\right| \leqslant \lim_{n\to\infty} \left|\int_{[0,1]} f_n g \, d\lambda\right| + \varepsilon = \varepsilon,$$

διότι $\int_{[0,1]} f_n g \, d\lambda \to 0$ από την υπόθεση. Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\int_A f_n \, d\lambda\right| = 0.$$

Άσκηση 58

Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε $f_n \to 0$ σχεδόν παντού, και $\int_{[0,1]} |f_n(x)|^2 d\lambda(x) \leqslant 10$ για κάθε n. Δείξτε ότι $\int_{[0,1]} |f_n(x)|\, d\lambda(x) \to 0$.

Θεωρούμε τυχόν $\delta \in (0,1)$. Από το θεώρημα Egorov υπάρχει κλειστό $F_\delta \subseteq [0,1]$ τέτοιο ώστε $f_n \to 0$ ομοιόμορφα στο F_δ και για το $E_\delta := [0,1] \setminus F_\delta$ να έχουμε $\lambda(E_\delta) < \delta$. Τότε, για κάθε n έχουμε

$$\int_{E_\delta} |f_n|\, d\lambda = \int_{[0,1]} \chi_{E_\delta} |f_n|\, d\lambda \leqslant \sqrt{\delta} \left(\int_{[0,1]} |f_n|^2 d\lambda \right)^{1/2} \leqslant \sqrt{10\delta}$$

και

$$\int_{F_\delta} |f_n|\, d\lambda \longrightarrow 0,$$

άρα

$$\limsup \int_{[0,1]} |f_n|\, d\lambda \leqslant \sqrt{10\delta}.$$

Αφήνοντας το $\delta \to 0^+$ έχουμε το ζητούμενο.

Άσκηση 37

(α) Δείξτε ότι αν η $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και η $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι Borel μετρήσιμη, τότε η $h \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι Borel μετρήσιμη.

(α) Έστω $a \in \mathbb{R}$. Τότε, $(h \circ g)^{-1}((a, +\infty)) = g^{-1}(h^{-1}(a, +\infty))$. Όμως, η h είναι Borel μετρήσιμη, άρα το $B = h^{-1}(a, +\infty)$ είναι Borel. Έπεται ότι το $g^{-1}(B)$ είναι επίσης Borel αφού g συνεχής.

Άσκηση 37

(β) Χρησιμοποιώντας την συνάρτηση Cantor–Lebesgue βρείτε μια συνεχή συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και μια Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε η $h \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ να μην είναι Lebesgue μετρήσιμη.

(β) Έστω $\phi : [0,1] \to [0,1]$ η συνάρτηση Cantor–Lebesgue και ξαναλέμε ϕ την επέκτασή της σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$ με $\phi(x) = 1$ αν $x > 1$ ενώ $\phi(x) = 0$ αν $x < 0$. Ορίζουμε $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x + \phi(x)$. Έχουμε δει ότι $\lambda(f(C)) = 1$, άρα υπάρχει $V \subseteq f(C)$ μη μετρήσιμο. Επίσης, το $A = f^{-1}(V)$ είναι μετρήσιμο. Παρατηρήστε ότι ορίζεται η $g = f^{-1}$, η οποία είναι συνεχής, και έστω $h = \chi_A$ η οποία είναι μετρήσιμη. Τότε, η $h \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δεν είναι μετρήσιμη αφού $\{x \mid (h \circ g)(x) > 0\} = V$.

Άσκηση 43

Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ χωριστά συνεχής συνάρτηση: για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η $f_x(y) := f(x, y)$ είναι συνεχής και για κάθε $y \in \mathbb{R}$ η $f^y(x) := f(x, y)$ είναι συνεχής. Δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη.

Ορίζουμε $f_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ως εξής. Αν $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ τότε υπάρχει μοναδικός $m = m_x \in \mathbb{Z}$ ώστε $x \in \left[\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}\right)$. Θέτουμε $f_n(x, y) = f\left(\frac{m_x}{n}, y\right)$. Δείχνουμε ότι η f_n είναι μετρήσιμη: παρατηρήστε ότι, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$E_n(\alpha) : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f_n(x, y) > \alpha\} = \bigcup_{m=-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}\right) \times \{y \in \mathbb{R} : f(m/n, y) > \alpha\}\right].$$

Για κάθε $m \in \mathbb{Z}$, αφού η $f_{m/n}$ είναι συνεχής συνάρτηση, το σύνολο $\{y \in \mathbb{R} : f(m/n, y) > \alpha\}$ είναι ανοικτό, άρα το σύνολο $\left[\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}\right) \times \{y \in \mathbb{R} : f(m/n, y) > \alpha\}$ είναι μετρήσιμο. Έπεται ότι το $E_n(\alpha)$ είναι μετρήσιμο για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, και αυτό δείχνει ότι η f_n είναι μετρήσιμη.
Στη συνέχεια δείχνουμε ότι $f_n(x, y) \to f(x, y)$ για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Πράγματι, παρατηρούμε ότι $\frac{m_x}{n} \to x$ καθώς το $n \to \infty$ και αφού η f^y είναι συνεχής έχουμε

$$f_n(x, y) = f(m_x/n, y) = f^y(m_x/n) \to f^y(x) = f(x, y).$$

Από τα παραπάνω έπεται ότι η f είναι μετρήσιμη συνάρτηση ως κατά σημείο όριο μιας ακολουθίας μετρήσιμων συναρτήσεων.

Άσκηση 48

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x^{-1/2}$ αν $0<x<1$ και $f(x)=0$ αλλιώς. Θεωρούμε μια αρίθμηση $\{q_n : n\in\mathbb{N}\}$ των ρητών, και θέτουμε $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(x-q_n)}{2^n}$.
(α) Δείξτε ότι η g είναι ολοκληρώσιμη. Ειδικότερα, $0\leqslant g<\infty$ σχεδόν παντού.

(α) Από το θεώρημα Beppo Levi έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(x-q_n)}{2^n}\,d\lambda(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\int_{\mathbb{R}}f(x-q_n)\,d\lambda(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\int_{q_n}^{q_n+1}\frac{1}{\sqrt{x-q_n}}\,d\lambda(x)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{t}}\,d\lambda(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\,2\sqrt{t}\Big|_0^1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2^n}=2<\infty.$$

Άρα,

$$\int_{\mathbb{R}}g(x)\,d\lambda(x)<\infty,$$

δηλαδή η g είναι ολοκληρώσιμη. Ειδικότερα, $0\leqslant g(x)<\infty$ σχεδόν παντού.

Άσκηση 48

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^{-1/2}$ αν $0 < x < 1$ και $f(x) = 0$ αλλιώς. Θεωρούμε μια αρίθμηση $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ των ρητών, και θέτουμε $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(x-q_n)}{2^n}$.
(β) Δείξτε ότι η g είναι ασυνεχής σε κάθε σημείο και δεν είναι φραγμένη σε κανένα διάστημα. Τα παραπάνω ισχύουν ακόμα κι αν μεταβάλλουμε τις τιμές της g σε οποιοδήποτε σύνολο μηδενικού μέτρου Lebesgue.

(β) Έστω (a, b) ένα διάστημα και έστω $M > 0$. Θεωρούμε ένα ρητό $q_m \in (a, b)$ και βρίσκουμε $\epsilon > 0$ ώστε $(q_m, q_m + \epsilon) \subset (a, b)$. Παρατηρούμε ότι

$$g(x) \geqslant \frac{f(x - q_m)}{2^m} = \frac{1}{2^m\sqrt{x - q_m}} > M$$

για κάθε $x \in (q_m, q_m + \delta)$, όπου $\delta = \min\left\{\frac{1}{2^m M}, \epsilon\right\}$. Αφού το $(q_m, q_m + \delta)$ είναι υποδιάστημα του (a, b), έπεται ότι

$$\lambda(\{x \in (a, b) : g(x) > M\}) > 0$$

και το ίδιο θα ισχύει για κάθε συνάρτηση h που είναι ίση με την g σχεδόν παντού. Αυτό αποδεικνύει ότι κάθε τέτοια h δεν είναι φραγμένη στο (a, b).
Έπεται επίσης ότι η g δεν είναι συνεχής σε κανένα $x \in \mathbb{R}$. Αν $g(x) = +\infty$ δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε, ενώ αν $g(x) < \infty$ παρατηρούμε ότι αν η g ήταν συνεχής στο x τότε θα υπήρχε κάποιο διάστημα $(x - \eta, x + \eta)$ στο οποίο η g θα ήταν φραγμένη, κάτι που είδαμε ότι δεν μπορεί να συμβεί.

Άσκηση 48

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x^{-1/2}$ αν $0<x<1$ και $f(x)=0$ αλλιώς. Θεωρούμε μια αρίθμηση $\{q_n : n\in\mathbb{N}\}$ των ρητών, και θέτουμε $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(x-q_n)}{2^n}$.
(γ) Δείξτε ότι $g^2<\infty$ σχεδόν παντού, αλλά η g^2 δεν είναι ολοκληρώσιμη σε κανένα διάστημα.

(γ) Θεωρούμε τυχόν διάστημα $(a,b)\subset\mathbb{R}$. Υπάρχει ρητός q_m τέτοιος ώστε $q_m<b<q_m+1$. Αφού

$$g(x)\geqslant \frac{f(x-q_m)}{2^m}\geqslant 0,$$

έχουμε

$$\int_{(a,b)} g^2(x)\,d\lambda(x)\geqslant \int_{(a,b)}\frac{f^2(x-q_m)}{2^{2m}}\,d\lambda(x)=\frac{1}{2^{2m}}\int_{q_m}^{b}\frac{1}{x-q_m}\,d\lambda(x)$$
$$=\frac{1}{2^{2m}}\int_0^{b-q_m}\frac{1}{t}\,d\lambda(t)=\infty.$$

Άρα, η g^2 δεν είναι ολοκληρώσιμη στο (a,b), παρόλο που, αφού $|g(x)|<\infty$ σχεδόν παντού, έχουμε $g^2(x)<\infty$ σχεδόν παντού.

Άσκηση 47

Σταθεροποιούμε $0 < a < b$ και ορίζουμε $f_n(x) = ae^{-nax} - ne^{-nbx}$. Δείξτε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} |f_n| \, d\lambda = \infty \quad \text{και} \quad \int_0^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\lambda \neq \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} f_n \, d\lambda.$$

Θέτουμε $\delta_n := \frac{\log(n/a)}{n(b-a)}$. Τότε, για κάθε $n > a$ ισχύει $\delta_n > 0$ και $f_n(x) < 0$ για $0 < x < \delta_n$. Επομένως,

$$\int_0^{\infty} |f_n| \, d\lambda \geqslant \int_0^{\delta_n} [ne^{-nbx} - ae^{-nax}] \, d\lambda = \frac{1}{b} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^{\frac{b}{b-a}}} \left(1 - \frac{a}{b}\right) a^{\frac{a}{b-a}},$$

απ' όπου έπεται ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} |f_n| \, d\lambda = +\infty$.
Για κάθε $x > 0$ ισχύει

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = a \frac{e^{-ax}}{1 - e^{-ax}} - \frac{e^{-bx}}{(1 - e^{-bx})^2}.$$

Έπεται ότι $\int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, d\lambda = +\infty$. Τέλος, είναι $\int_0^{\infty} f_n \, d\lambda = \frac{1}{n} - \frac{1}{b}$, συνεπώς έχουμε $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} f_n \, d\lambda = -\infty$.

Άσκηση 60

Έστω $f : [0,1] \to [1,\infty)$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\int_{[0,1]} f \ln f \, d\lambda \geqslant \int_{[0,1]} f \, d\lambda \cdot \int_{[0,1]} \ln f \, d\lambda.$$

Θέτουμε $\alpha = \int_{[0,1]} f \, d\lambda > 0$ και θεωρούμε τη συνάρτηση $g = f/\alpha$. Παρατηρούμε ότι $(y-1)\ln y \geqslant 0$ για κάθε $y > 0$ (αν $y \leqslant 1$ τότε $y - 1 \leqslant 0$ και $\ln y \leqslant 0$, ενώ αν $y > 1$ τότε $y - 1 > 0$ και $\ln y > 0$). Συνεπώς, $y \ln y \geqslant \ln y$ για κάθε $y > 0$. Αφού η g παίρνει θετικές τιμές, έχουμε $g \ln g \geqslant \ln g$ στο $[0,1]$, άρα

$$\int_{[0,1]} g \ln g \, d\lambda \geqslant \int_{[0,1]} \ln g \, d\lambda.$$

Αφού $g = f/\alpha$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]} \frac{f}{\alpha}(\ln f - \ln \alpha) \, d\lambda &= \int_{[0,1]} \frac{f}{\alpha} \ln \frac{f}{\alpha} \, d\lambda \geqslant \int_{[0,1]} \ln \frac{f}{\alpha} \, d\lambda \\ &\geqslant \int_{[0,1]} \ln f \, d\lambda - \int_{[0,1]} \ln \alpha \, d\lambda = \int_{[0,1]} \ln f \, d\lambda - \ln \alpha,\end{aligned}$$

από την οποία προκύπτει ότι

$$\int_{[0,1]} f \ln f \, d\lambda \geqslant \alpha \int_{[0,1]} \ln f \, d\lambda = \int_{[0,1]} f \, d\lambda \cdot \int_{[0,1]} \ln f \, d\lambda.$$