

ΑΞΙΩΜΑΤΙΚΗ ΘΕΜΕΛΙΩΣΗ ΦΥΣΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Αξιώματα Peano

Δεχόμαστε ότι υπάρχει ένα σύνολο, το οποίο ονομάζουμε σύνολο των φυσικών αριθμών (συμβ. $\mathbb{N}$) και το οποίο ικανοποιεί τα παρακάτω αξιώματα

1. Το $\mathbb{N}$ έχει τουλάχιστον ένα στοιχείο, το οποίο συμβολίζουμε 1.
2. Σε κάθε $n \in \mathbb{N}$ αντιστοιχίζεται ακριβώς ένας $n' \in \mathbb{N}$, ο οποίος ονομάζεται **επόμενος** του n .
3. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $n' \neq 1$.
Δηλαδή, ο 1 δεν είναι επόμενος κανενός φυσικού.
4. Αν $n, m \in \mathbb{N}$ και $n' = m'$, τότε $n = m$.
Ισοδύναμα, αν $n, m \in \mathbb{N}$ και $n \neq m$, τότε $n' \neq m'$.
5. Έστω ότι ένα σύνολο $K \subseteq \mathbb{N}$ έχει τις ιδιότητες: (i) $1 \in K$ και (ii) αν $n \in K$, τότε $n' \in K$.
Τότε $K = \mathbb{N}$.

Το Αξίωμα 2 λέει ότι η απεικόνιση $n \mapsto n'$ είναι συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{N}$ και σύνολο τιμών υποσύνολο του $\mathbb{N}$. Τώρα, το Αξίωμα 3 λέει ότι ο 1 δεν ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης αυτής και το Αξίωμα 4 λέει ότι η συνάρτηση αυτή είναι ένα-προς-ένα. Το Αξίωμα 5 ονομάζεται και **Αξίωμα της Επαγωγής** ή **Αρχή της Επαγωγής**.

Πρόταση: Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $n' \neq n$

Απόδειξη. Έστω K το σύνολο των $n \in \mathbb{N}$ για τους οποίους ισχύει $n' \neq n$. Από τα Αξιώματα 1 και 3 συνεπάγεται $1 \in K$. Έστω $n \in K$. Τότε $n \in \mathbb{N}$ και $n' \neq n$. Από το Αξίωμα 4 συνεπάγεται $(n')' \neq n'$ και, επομένως, $n' \in K$. Από το Αξίωμα της Επαγωγής συνεπάγεται $K = \mathbb{N}$. $\square$

Πρόταση: Για κάθε $m \in \mathbb{N}$, $m \neq 1$, υπάρχει ακριβώς ένα $n \in \mathbb{N}$ ώστε $n' = m$

Απόδειξη. Έστω K το σύνολο με στοιχεία τον 1 και κάθε $m \in \mathbb{N}$ για τον οποίο υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $n' = m$. Τότε $1 \in K$ και έστω $m \in K$. Τότε $m' \in \mathbb{N}$ και υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ (συγκεκριμένα: ο m) ώστε $n' = m'$. Άρα $m' \in K$. Από το Αξίωμα της Επαγωγής συνεπάγεται $K = \mathbb{N}$. Άρα κάθε $m \in \mathbb{N}$ ανήκει στο K , οπότε, αν $m \neq 1$, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $n' = m$. Από το Αξίωμα 4 συνεπάγεται ότι ο $n \in \mathbb{N}$ για τον οποίο ισχύει $n' = m$ είναι μοναδικός. $\square$

Θεώρημα: Υπάρχει μοναδική συνάρτηση $\phi: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ με τις ιδιότητες:

- i) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $\phi(n, 1) = n'$
- ii) Για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ ισχύει $\phi(n, m') = (\phi(n, m))'$

Απόδειξη. Έστω K το σύνολο των $n \in \mathbb{N}$ με την εξής ιδιότητα: υπάρχει συνάρτηση $f_n: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ώστε (i) $f_n(1) = n'$ και (ii) για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ισχύει $f_n(m') = (f_n(m))'$.

Πρώτον, $1 \in K$. Πράγματι, ορίζουμε τη συνάρτηση $f_1: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ με τύπο $f_1(m) = m'$. Τότε (i) $f_1(1) = 1'$ και (ii) για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ισχύει $f_1(m') = (m')' = (f_1(m))'$.

Τώρα, έστω $n \in K$. Δηλαδή, έστω ότι υπάρχει συνάρτηση $f_n: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ώστε (i) $f_n(1) = n'$ και (ii) για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ισχύει $f_n(m') = (f_n(m))'$. Θα αποδείξουμε ότι $n' \in K$. Ορίζουμε συνάρτηση $f_{n'}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ με τύπο $f_{n'}(m) = (f_n(m))'$. Τότε (i) $f_{n'}(1) = (f_n(1))' = (n')'$ και (ii) για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ισχύει $f_{n'}(m') = (f_n(m'))' = ((f_n(m))')' = (f_{n'}(m))'$. Άρα $n' \in K$.

Άρα $K = \mathbb{N}$. Δηλαδή για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει συνάρτηση $f_n: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ώστε (i) $f_n(1) = n'$ και (ii) για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ισχύει $f_n(m') = (f_n(m))'$.

Τώρα, ορίζουμε $\phi: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ με τύπο $\phi(n, m) = f_n(m)$. Η ϕ έχει τις ιδιότητες: (i) $\phi(n, 1) = f_n(1) = n'$ και (ii) για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ ισχύει $\phi(n, m') = f_n(m') = (f_n(m))' = (\phi(n, m))'$.

Τώρα θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση ϕ με τις ιδιότητες (i), (ii) είναι μοναδική. Έστω ότι υπάρχει και συνάρτηση $\psi: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ με τις ιδιότητες: (i) για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $\psi(n, 1) = n'$ και (ii) για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ ισχύει $\psi(n, m') = (\psi(n, m))'$. Θεωρούμε οποιονδήποτε $n \in \mathbb{N}$ και έστω K το σύνολο των $m \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα: $\phi(n, m) = \psi(n, m)$. Τότε $1 \in K$, διότι $\phi(n, 1) = n' = \psi(n, 1)$. Κατόπιν, έστω $m \in K$, δηλαδή $\phi(n, m) = \psi(n, m)$. Τότε $\phi(n, m') = (\phi(n, m))' = (\psi(n, m))' = \psi(n, m')$ και, επομένως, $m' \in K$. Άρα $K = \mathbb{N}$. Άρα για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ισχύει $\phi(n, m) = \psi(n, m)$ και, επειδή αυτό ισχύει για οποιονδήποτε $n \in \mathbb{N}$, συνεπάγεται $\phi(n, m) = \psi(n, m)$ για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$. Άρα οι ϕ, ψ ταυτίζονται. $\square$

Πρόσθεση στους Φυσικούς Αριθμούς

Ορισμός: Για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ θέτουμε $n + m = \varphi(n, m)$.

Ο $n + m$ ονομάζεται **άθροισμα** των n, m και η πράξη που σε κάθε n, m αντιστοιχεί το άθροισμα τους ονομάζεται **πρόσθεση**.

- Οι ιδιότητες της συνάρτησης φ διατυπώνονται ως εξής:

i) $n' = n + 1$

ii) $n + (m+1) = (n + m) + 1$.

Ιδιότητες πρόσθεσης

Από το αξίωμα της επαγωγής και τον ορισμό της πρόσθεσης προκύπτουν τα παρακάτω:

- $n + m = m + n$ για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$
(αντιμεταθετική ιδιότητα)
- $n + (m + k) = (n + m) + k$ για κάθε $n, m, k \in \mathbb{N}$
(προσεταιριστική ιδιότητα)
- $n + m \neq n$ για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$
- $n + m \neq n + k$ για κάθε $n, m, k \in \mathbb{N}$ με $m \neq k$.

Πολλαπλασιασμός στους Φυσικούς Αριθμούς

Θεώρημα: Υπάρχει μοναδική συνάρτηση $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ με τις ιδιότητες:

- i) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $f(n, 1) = f(1, n) = n$
- ii) Για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ ισχύει $f(n, m') = f(n, m) + n$
- iii) Για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ ισχύει $f(n', m) = f(n, m) + m$

Ορισμός: Για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ θέτουμε $n \cdot m = f(n, m)$.

Ο φυσικός αριθμός $n \cdot m$ ονομάζεται **γινόμενο** των n, m και η πράξη που σε κάθε n, m αντιστοιχεί το γινόμενο τους ονομάζεται **πολλαπλασιασμός**.

Όταν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης αντί $n \cdot m$ γράφουμε nm .

• Οι ιδιότητες της συνάρτησης f διατυπώνονται ως εξής:

- i) $n \cdot 1 = 1 \cdot n = n$
- ii) $n(m + 1) = n \cdot m + n$
- iii) $(n + 1)m = n \cdot m + m$

Ιδιότητες πολλαπλασιασμού

Από το αξίωμα της επαγωγής και τον ορισμό του πολλαπλασιασμού προκύπτουν τα παρακάτω:

- $nm = mn$ για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$

(αντιμεταθετική ιδιότητα)

- $(nm)k = n(mk)$

(προσεταιριστική ιδιότητα)

- $n(m+k) = nm + nk$ για κάθε $n, m, k \in \mathbb{N}$

(επιμεριστική ιδιότητα)

Διάταξη στο σύνολο των Φυσικών αριθμών

Πρόταση: Για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ ισχύει ακριβώς ένα από τα παρακάτω:

- i) $n = m$
- ii) Υπάρχει μοναδικό $k \in \mathbb{N}$ ώστε $n = m + k$
- iii) Υπάρχει μοναδικό $k \in \mathbb{N}$ ώστε $m = n + k$

Ορισμός: Έστω $n, m \in \mathbb{N}$. Αν υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $n = m + k$ τότε λέμε ότι ο n είναι μεγαλύτερος του m ή ο m είναι μικρότερος του n και συμβολίζουμε

$$n > m \text{ ή } m < n$$

Ο k ονομάζεται διαφορά των n, m και συμβολίζεται $n - m$ και η πράξη που στο n, m , με $n > m$, αντιστοιχεί τη διαφορά τους $n - m$ ονομάζεται αφαίρεση

• Για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ ισχύει ακριβώς ένα από τα παρακάτω:

- i) $n = m$
- ii) $m < n$
- iii) $n < m$

Ορισμός: Αν $n > m$ ή $n = m$ τότε λέμε ότι ο n είναι μεγαλύτερος ή ίσος του m ή ο m είναι μικρότερος ή ίσος του n και συμβολίζουμε $n \geq m$ ή $m \leq n$.

Ιδιότητες διάταξης

Από τον ορισμό της διάταξης και τα προηγούμενα προκύπτουν οι παρακάτω ιδιότητες:

- Αν $m \leq n$ και $n \leq m$ τότε $m = n$ (αντισυμμετρική ιδιότητα)
- Αν $n \leq m$ και $m \leq k$ τότε $n \leq k$ (μεταβατική ιδιότητα)
- Για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ ισχύει $m < m + n$ (άρα $m < m + 1$)
- Για $n, m, k \in \mathbb{N}$ ισχύει $m < n$ αν και μόνον αν $m + k < n + k$
- Αν $m < n$ και $k < l$ τότε $m + k < n + l$
- Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, με $n \neq 1$, ισχύει $n > 1$
- Αν $m < n$ τότε $m + 1 \leq n$
- Αν $m < n + 1$ τότε $m \leq n$ (άρα μεταξύ του n και του $n + 1$ δεν υπάρχει φυσικός αριθμός)

Ιδιότητες της διάταξης

- Για $n, m, k \in \mathbb{N}$ ισχύει $m < n$ αν και μόνον αν $mk < nk$

Από την ιδιότητα αυτή προκύπτει ότι $m = n$ αν και μόνον αν $mk = nk$

- Αν $m < n$ και $k < l$ τότε $mk < nl$

Αρχή της καλής διάταξης: Κάθε μη κενό υποσύνολο των φυσικών αριθμών έχει ελάχιστο στοιχείο.

Απόδειξη. Έστω μη-κενό $M \subseteq \mathbb{N}$ και έστω $m_0 \in M$. Θεωρούμε το σύνολο K των $n \in \mathbb{N}$ οι οποίοι είναι $\leq m$ για κάθε $m \in M$.

Προφανώς, $1 \in K$. Επειδή $m_0 + 1 > m_0$ και $m_0 \in M$, ο $m_0 + 1$ δεν ανήκει στο K . Άρα το K είναι γνήσιο υποσύνολο του $\mathbb{N}$, οπότε, σύμφωνα με το Αξίωμα της Επαγωγής, υπάρχει $n_0 \in K$ ώστε $n_0 + 1 = n_0' \notin K$.

Τώρα, ισχύει (i) $n_0 \leq m$ για κάθε $m \in M$. Αυτό είναι προφανές, διότι $n_0 \in K$. Κατόπιν, έστω $n_0 \notin M$. Τότε για κάθε $m \in M$ ισχύει $n_0 < m$ και, επομένως, $n_0 + 1 \leq m$. Άρα $n_0 + 1 \in K$ και αυτό είναι άτοπο. Άρα (ii) $n_0 \in M$.

Από τα (i), (ii) συνεπάγεται ότι ο n_0 είναι το ελάχιστο στοιχείο του M . □

Επέκταση του συνόλου των
φυσικών στο σύνολο των
θετικών ρητών αριθμών

Το σύνολο των θετικών ρητών αριθμών

Στο σύνολο $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ορίζουμε την σχέση

$$(n_1, n_2) \sim (m_1, m_2) \text{ αν } n_1 \cdot m_2 = n_2 \cdot m_1$$

Πρόταση: Η σχέση $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας στο $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

- Η σχέση $\sim$ ορίζει κλάσεις ισοδυναμίας στο $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$
- Οι κλάσεις ισοδυναμίας ονομάζονται θετικοί ρητοί.
- Το σύνολο των θετικών ρητών το συμβολίζουμε $\mathbb{Q}^+$.

Αν $q \in \mathbb{Q}^+$ τότε υπάρχουν $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$q = [(n_1, n_2)] = \{(m_1, m_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : (n_1, n_2) \sim (m_1, m_2)\}$$

Κάθε στοιχείο της κλάσης ισοδυναμίας ονομάζεται αντιπρόσωπος του q .

Διάταξη στο $\mathbb{Q}^+$

Αν $(n_1, n_2), (m_1, m_2) \in \mathbb{N}$, θέτουμε

$$(n_1, n_2) < (m_1, m_2) \text{ αν } n_1 \cdot m_2 < n_2 \cdot m_1$$

Πρόταση: Έστω $(n_1, n_2), (m_1, m_2) \in \mathbb{N}$ με $(n_1, n_2) < (m_1, m_2)$.

Αν $(k_1, k_2), (l_1, l_2) \in \mathbb{N}$ με $(k_1, k_2) \sim (n_1, n_2)$ και $(l_1, l_2) \sim (m_1, m_2)$ τότε $(k_1, k_2) < (l_1, l_2)$.

Ορισμός: Έστω $p, q \in \mathbb{Q}^+$. Θέτουμε $p < q$ αν $(n_1, n_2) < (m_1, m_2)$ όπου (n_1, n_2) αντιπρόσωπος του p και (m_1, m_2) αντιπρόσωπος του q .

Από την παραπάνω πρόταση προκύπτει ότι η σχέση $<$ είναι καλά ορισμένη.

Αν $p < q$ λέμε ότι ο p είναι μικρότερος του q ή ότι ο q είναι μεγαλύτερος του p

Πρόταση: Για κάθε $p, q \in \mathbb{Q}^+$ ισχύει ακριβώς ένα από τα παρακάτω:

$$p = q \text{ ή } p < q \text{ ή } q < p$$

Ορισμός: Έστω $p, q \in \mathbb{Q}^+$. Θέτουμε $p \leq q$ αν $p < q$ ή $p = q$.
Αν $p \leq q$ λέμε ότι ο p είναι μικρότερος ή ίσος του q .

Πρόταση: Η σχέση $\leq$ είναι σχέση διάταξης.

Πρόταση:

- i) Για κάθε $p \in \mathbb{Q}^+$ υπάρχει $q \in \mathbb{Q}^+$ ώστε $p < q$.
- ii) Για κάθε $p \in \mathbb{Q}^+$ υπάρχει $q \in \mathbb{Q}^+$ ώστε $q < p$
- iii) Για κάθε $p, q \in \mathbb{Q}^+$ με $p < q$ υπάρχει $s \in \mathbb{Q}^+$ ώστε $p < s < q$

Απόδειξη: i) Αν $p = [(n_1, n_2)]$ θέτουμε $q = [(n_1 + n_1, n_2)]$ και προκύπτει εύκολα ότι $p < q$.

ii) Αν $p = [(n_1, n_2)]$ θέτουμε $q = [(n_1, n_2 + n_2)]$ και προκύπτει εύκολα ότι $q < p$.

iii) Αν $p = [(n_1, n_2)]$ και $q = [(m_1, m_2)]$ θέτουμε $s = [(n_1 + m_1, n_2 + m_2)]$ και από την υπόθεση ότι $p < q$ προκύπτει το συμπέρασμα.

Πρόσθεση στο $\mathbb{Q}^+$

Αν $(n_1, n_2), (m_1, m_2) \in \mathbb{N}$, θέτουμε

$$(n_1, n_2) + (m_1, m_2) = (n_1 m_2 + m_1 n_2, n_2 m_2)$$

Πρόταση: Έστω $(n_1, n_2), (m_1, m_2) \in \mathbb{N}$.

Αν $(k_1, k_2), (l_1, l_2) \in \mathbb{N}$ με $(k_1, k_2) \sim (n_1, n_2)$ και $(l_1, l_2) \sim (m_1, m_2)$ τότε $(n_1, n_2) + (m_1, m_2) = (k_1, k_2) + (l_1, l_2)$

Ορισμός: Έστω $p, q \in \mathbb{Q}^+$. Ορίζουμε ως **άθροισμα** των p, q και συμβολίζουμε με $p + q$ τον θετικό ρητό $r = [(n_1 m_2 + m_1 n_2, n_2 m_2)]$, όπου (n_1, n_2) αντιπρόσωπος του p και (m_1, m_2) αντιπρόσωπος του q .

- Από την παραπάνω πρόταση προκύπτει ότι το άθροισμα δύο θετικών ρητών είναι καλά ορισμένο
- Η πράξη που σε κάθε $p, q \in \mathbb{Q}^+$ αντιστοιχεί το άθροισμα τους ονομάζεται **πρόσθεση** στο $\mathbb{Q}^+$.

Ιδιότητες της πρόσθεσης στο $\mathbb{Q}^+$

Πρόταση: Για κάθε $p, q, s, t \in \mathbb{Q}^+$ ισχύει:

i) $p + q = q + p$ (αντιμεταθετική ιδιότητα)

ii) $(p + q) + s = q + (p + s)$ (προσεταιριστική ιδιότητα)

iii) $p < p + q$

iv) $p < q \Leftrightarrow p + s < q + s$

v) $p = q \Leftrightarrow p + s = q + s$

vi) Αν $p < q$ και $s < t$ τότε $p + s < q + t$

Αφαίρεση στο $\mathbb{Q}^+$

Πρόταση: Έστω $p, q \in \mathbb{Q}^+$.

- i) Αν $p < q$ τότε υπάρχει μοναδικός $t \in \mathbb{Q}^+$ ώστε $q = p + t$.
- ii) Αν $q \leq p$ τότε δεν υπάρχει $t \in \mathbb{Q}^+$ ώστε $p + t = q$.

Ορισμός: Έστω $p, q \in \mathbb{Q}^+$ με $p < q$. Ο μοναδικός $t \in \mathbb{Q}^+$ για τον οποίο ισχύει $q = p + t$ ονομάζεται **διαφορά** των q, p και συμβολίζεται $q - p$.

- Η πράξη που σε κάθε $p, q \in \mathbb{Q}^+$ με $p < q$ αντιστοιχεί τη διαφορά τους $q - p$ ονομάζεται **αφαίρεση** στο $\mathbb{Q}^+$

Πολλαπλασιασμός στο $\mathbb{Q}^+$

Αν $(n_1, n_2), (m_1, m_2) \in \mathbb{N}$, θέτουμε

$$(n_1, n_2) \cdot (m_1, m_2) = (n_1 \cdot m_1, n_2 \cdot m_2)$$

Πρόταση: Έστω $(n_1, n_2), (m_1, m_2) \in \mathbb{N}$.

Αν $(k_1, k_2), (l_1, l_2) \in \mathbb{N}$ με $(k_1, k_2) \sim (n_1, n_2)$ και $(l_1, l_2) \sim (m_1, m_2)$ τότε
 $(n_1, n_2) \cdot (m_1, m_2) = (k_1, k_2) \cdot (l_1, l_2)$

Ορισμός: Έστω $p, q \in \mathbb{Q}^+$. Ορίζουμε ως **γινόμενο** των p, q και συμβολίζουμε με $p \cdot q$ τον θετικό ρητό $r = [(n_1 \cdot m_1, n_2 \cdot m_2)]$, όπου (n_1, n_2) αντιπρόσωπος του p και (m_1, m_2) αντιπρόσωπος του q .

- Από την παραπάνω πρόταση προκύπτει ότι το γινόμενο δύο θετικών ρητών είναι καλά ορισμένο
- Η πράξη που σε κάθε $p, q \in \mathbb{Q}^+$ αντιστοιχεί το γινόμενο τους ονομάζεται **πολλαπλασιασμός** στο $\mathbb{Q}^+$.

Ιδιότητες του πολλαπλασιασμού στο $\mathbb{Q}^+$

Πρόταση: Για κάθε $p, q, s, t \in \mathbb{Q}^+$ ισχύει:

i) $p \cdot q = q \cdot p$ (αντιμεταθετική ιδιότητα)

ii) $(p \cdot q) \cdot s = q \cdot (p \cdot s)$ (προσεταιριστική ιδιότητα)

iii) $p \cdot (q + s) = p \cdot q + p \cdot s$ (επιμεριστική ιδιότητα)

iv) $p < q \Leftrightarrow p \cdot s < q \cdot s$

v) $p = q \Leftrightarrow p \cdot s = q \cdot s$

vi) Αν $p < q$ και $s < t$ τότε $p + s < q + t$

Διαίρεση στο $\mathbb{Q}^+$

Πρόταση: Έστω $q, p \in \mathbb{Q}^+$. Τότε υπάρχει μοναδικός $t \in \mathbb{Q}^+$ ώστε $p \cdot t = q$.

Ορισμός: Έστω $q, p \in \mathbb{Q}^+$. Ο μοναδικός $t \in \mathbb{Q}^+$ για τον οποίο ισχύει $p \cdot t = q$ ονομάζεται **λόγος** των q, p και συμβολίζεται $\frac{q}{p}$.

Η πράξη που σε κάθε $q, p \in \mathbb{Q}^+$ αντιστοιχεί το λόγο τους $\frac{q}{p}$ ονομάζεται **διαίρεση** στο $\mathbb{Q}^+$.

Θετικοί ακέραιοι

Ορισμός: Έστω $r \in \mathbb{Q}^+$. Ο r λέγεται θετικός ακέραιος αν υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $r = [(n, 1)]$.

Το σύνολο των θετικών ακεραίων το συμβολίζουμε με $\mathbb{Z}^+$.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τον θετικό ακέραιο $[(n, 1)]$ τον συμβολίζουμε $\bar{n}$.

Άρα $\mathbb{Z}^+ = \{\bar{n} : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{Q}^+$

Πρόταση: Έστω $n, m \in \mathbb{N}$.

$$i) \quad n = m \iff \bar{n} = \bar{m}$$

$$ii) \quad n < m \iff \bar{n} < \bar{m}$$

Πόρισμα: Για κάθε θετικό ακέραιο r υπάρχει μοναδικός $n \in \mathbb{N}$ ώστε $r = \bar{n}$.

Πρόταση: Για κάθε $q, p \in \mathbb{Q}^+$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $q < \bar{n} \cdot p$

Απόδειξη. Από προηγούμενη πρόταση υπάρχει μοναδικός $t \in \mathbb{Q}^+$ ώστε $p \cdot t = q$.
Έστω (n_1, n_2) ένας αντιπρόσωπος του t .

Θέτουμε $n = n_1 + 1$. Ισχύει $(n_1, n_2) < (n_1 + 1, 1)$. Συνεπώς $t < \bar{n}$.

Άρα $p \cdot t < \bar{n} \cdot p$, δηλαδή $q < \bar{n} \cdot p$.

Πρόταση: Έστω $p \in \mathbb{Q}^+$. Το (n_1, n_2) είναι αντιπρόσωπος του p αν και μόνο αν $p = \frac{\overline{n_1}}{\overline{n_2}}$.

- Κάθε θετικός ρητός είναι λόγος θετικών ακεραίων.

Πρόταση. Έστω $n, m, k \in \mathbb{N}$.

i) $n + m = k \Leftrightarrow \bar{n} + \bar{m} = \bar{k}$

ii) $n \cdot m = k \Leftrightarrow \bar{n} \cdot \bar{m} = \bar{k}$

- Το άθροισμα και το γινόμενο θετικών ακεραίων είναι θετικοί ακέραιοι

Ταύτιση των θετικών ακεραίων με τους φυσικούς αριθμούς

Θέτουμε $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}^+$ με $f(n) = \bar{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Από τα προηγούμενα προκύπτουν τα εξής:

- i) Η f είναι 1-1 και επί
- ii) $f(n + m) = f(n) + f(m)$ για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$.
- iii) $f(n \cdot m) = f(n) \cdot f(m)$ για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$.
- iii) $n < m \iff f(n) < f(m)$

- Η f είναι ισομορφισμός από τους φυσικούς στους θετικούς ακέραιους.
- Μέσω της f ταυτίζουμε το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών με το σύνολο $\mathbb{Z}^+$ των θετικών ακεραίων.
- Κάθε θετικός ρητός είναι λόγος δύο φυσικών αριθμών.

Επέκταση του συνόλου των
θετικών ρητών αριθμών στο
σύνολο των θετικών
πραγματικών αριθμών

Ορισμός: Θετικός πραγματικός αριθμός είναι ένα υποσύνολο x του $\mathbb{Q}^+$ για το οποίο ισχύουν:

- i) το x είναι διάφορο του $\emptyset$ και του $\mathbb{Q}^+$
- ii) κάθε θετικός ρητός που ανήκει στο x είναι μικρότερος από κάθε θετικό ρητό που δεν ανήκει στο x
- iii) Το x δεν έχει μέγιστο στοιχείο

- Ένα υποσύνολο των θετικών ρητών που ικανοποιεί τις παραπάνω ιδιότητες λέγεται **τομή Dedekind**

- Το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών το συμβολίζουμε $\mathbb{R}^+$

Ιδιότητες των τομών Dedekind

Πρόταση: Για κάθε τομή Dedekind x ισχύει:

- i) για κάθε $p, q \in \mathbb{Q}^+$ αν $p < q$ και $p \notin x$ τότε $q \notin x$
- ii) για κάθε $p, q \in \mathbb{Q}^+$ αν $p < q$ και $q \in x$ τότε $p \in x$
- iii) για κάθε $p \in x$ υπάρχει $q \in x$ ώστε $p < q$

Απόδειξη: Τα i) και ii) προκύπτουν άμεσα από την ιδιότητα ii) των τομών Dedekind. Το iii) είναι ισοδύναμο με την ιδιότητα iii) των τομών Dedekind

Διάταξη στο $\mathbb{R}^+$

Ορισμός. Έστω $x, y \in \mathbb{R}^+$. Λέμε ότι ο y είναι μεγαλύτερος του x ή ο x είναι μικρότερος του y και συμβολίζουμε $x < y$ αν $x \subset y$.

Πρόταση. Έστω $x, y \in \mathbb{R}^+$. Τότε $y < x$ αν και μόνον αν υπάρχει $p \in \mathbb{Q}^+$ ώστε $p \in x$ και $p \notin y$.

Απόδειξη. Έστω $y < x$. Τότε $y \subset x$. Άρα υπάρχει $p \in \mathbb{Q}^+$ ώστε $p \in x$ και $p \notin y$.

Έστω ότι υπάρχει $p \in \mathbb{Q}^+$ ώστε $p \in x$ και $p \notin y$. Από τις ιδιότητες των τομών Dedekind προκύπτει ότι για κάθε $q \in y$ ισχύει $q < p$, άρα $q \in x$. Επομένως $y \subset x$, δηλαδή $y < x$.

Πρόταση. Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^+$ ισχύει ακριβώς ένα από τα παρακάτω:

$$x = y \text{ ή } x < y \text{ ή } y < x$$

Απόδειξη. Έστω $x, y \in \mathbb{R}^+$ με $x \neq y$. Τότε είτε υπάρχει $p \in x$ και $p \notin y$ ή υπάρχει $p \in y$ και $p \notin x$ και από την προηγούμενη πρόταση προκύπτει το συμπέρασμα.

Ορισμός. Έστω $x, y \in \mathbb{R}^+$. Λέμε ότι ο x είναι μικρότερος ή ίσος του y και συμβολίζουμε $x \leq y$ αν $x < y$ ή $x = y$.

Πρόταση. Έστω $x, y \in \mathbb{R}^+$. Τότε ισχύει

- i) $x \leq x$ (ανακλαστική ιδιότητα)
 - ii) Αν $x \leq y$ και $y \leq x$ τότε $x = y$ (αντισυμμετρική ιδιότητα)
 - iii) Αν $x \leq y$ και $y \leq z$ τότε $x \leq z$ (μεταβατική ιδιότητα)
-
- Η σχέση $\leq$ είναι σχέση διάταξης στο $\mathbb{R}^+$.

Πρόσθεση στο $\mathbb{R}^+$

Πρόταση. Έστω $x, y \in \mathbb{R}^+$. Το σύνολο $z = \{p + q : p \in x \text{ και } q \in y\}$ είναι στοιχείο του $\mathbb{R}^+$.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε ότι το z είναι τομή Dedekind.

Επειδή $x \neq \emptyset$ και $y \neq \emptyset$ ισχύει $z \neq \emptyset$.

Έστω $t, s \in \mathbb{Q}^+$ ώστε $t \notin x$ και $s \notin y$. Τότε για κάθε $p \in x$ ισχύει $p < t$ και για κάθε $q \in y$ ισχύει $q < s$. Άρα $p + q < t + s$ για κάθε $p \in x$ και $q \in y$. Επομένως $t + s \notin z$. Άρα $z \neq \mathbb{Q}^+$.

Έστω $p \in x, q \in y$ και $t \in \mathbb{Q}^+$ με $t < p + q$.

Τότε $p \frac{t}{p+q} < p$ και $q \frac{t}{p+q} < q$. Άρα $p \frac{t}{p+q} \in x$ και $q \frac{t}{p+q} \in y$ και, επειδή $p \frac{t}{p+q} + q \frac{t}{p+q} = t$, ισχύει $t \in z$.

Έστω $p \in x, q \in y$. Υπάρχουν $t \in x, s \in y$ ώστε $p < t, q < s$.

Τότε $t + s \in z$ και $p + q < t + s$.

Άρα το z είναι τομή Dedekind, δηλαδή είναι στοιχείο του $\mathbb{R}^+$.

Ορισμός. Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^+$ θέτουμε $x + y = \{p + q : p \in x \text{ και } q \in y\}$.

Το $x + y$ ονομάζεται **άθροισμα** των x, y και η πράξη που σε κάθε $x, y \in \mathbb{R}^+$ αντιστοιχεί το άθροισμα τους ονομάζεται **πρόσθεση** στο $\mathbb{R}^+$.

Πρόταση. Για κάθε $x, y, z, t, s \in \mathbb{R}^+$ ισχύουν

$$i) \quad x + y = y + x$$

$$ii) \quad x + (y + z) = (x + y) + z$$

$$iii) \quad x + y > x$$

$$iv) \quad x < y \Leftrightarrow x + z < y + z$$

$$v) \quad x = y \Leftrightarrow x + z = y + z$$

$$vi) \quad \text{Αν } x < y \text{ και } t < s \text{ τότε } x + t < s + t$$

Αφαίρεση στο $\mathbb{R}^+$

Πρόταση. Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^+$ ισχύει

Αν $x < y$ υπάρχει μοναδικός $z \in \mathbb{R}^+$ ώστε $x + z = y$.

Αν $y \leq x$ δεν υπάρχει $z \in \mathbb{R}^+$ ώστε $x + z = y$.

Ορισμός. Έστω $x, y \in \mathbb{R}^+$ με $x < y$. Ο μοναδικός $z \in \mathbb{R}^+$ για τον οποίο ισχύει $x + z = y$ ονομάζεται **διαφορά** του y από το x και συμβολίζεται $y - x$.

Η πράξη που στο y, x αντιστοιχεί τη διαφορά τους $y - x$ ονομάζεται **αφαίρεση**.

Πολλαπλασιασμός στο $\mathbb{R}^+$

Πρόταση. Έστω $x, y \in \mathbb{R}^+$. Το σύνολο $z = \{p \cdot q : p \in x \text{ και } q \in y\}$ είναι στοιχείο του $\mathbb{R}^+$.

Ορισμός. Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^+$ θέτουμε $x \cdot y = \{p \cdot q : p \in x \text{ και } q \in y\}$. Το $x \cdot y$ ονομάζεται **γινόμενο** των x, y .

Η πράξη που σε κάθε $x, y \in \mathbb{R}^+$ αντιστοιχεί το γινόμενο τους $x \cdot y$ ονομάζεται **πολλαπλασιασμός** στο $\mathbb{R}^+$.

Πρόταση. Για κάθε $x, y, z, t, s \in \mathbb{R}^+$ ισχύουν

i) $x \cdot y = y \cdot x$

ii) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

iii) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

iv) $x < y \iff x \cdot z < y \cdot z$

v) $x = y \iff x \cdot z = y \cdot z$

vi) Αν $x < y$ και $t < s$ τότε $x \cdot t < s \cdot t$

Πρόταση. Έστω $p \in \mathbb{Q}^+$. Το σύνολο $p^* = \{s \in \mathbb{Q}^+ : s < p\}$ είναι στοιχείο του $\mathbb{R}^+$.

Πρόταση. Για κάθε $x \in \mathbb{R}^+$ ισχύει $x.1^* = x$.

Απόδειξη. Έστω $p \in x$ και $s < 1$. Τότε ισχύει $ps < p1 = p$. Άρα $ps \in x$. Συνεπώς $x.1^* \subseteq x$.

Έστω $p \in x$. Υπάρχει $q \in x$ με $p < q$. Τότε $\frac{p}{q}q = p < q = 1q$. Άρα $\frac{p}{q} < 1$. Συνεπώς $\frac{p}{q} \in 1^*$. Επομένως $p = q \frac{p}{q} \in x1^*$. Άρα $x \subseteq x1^*$.

Από τα παραπάνω προκύπτει $x.1^* = x$.

Πρόταση. Για κάθε $x \in \mathbb{R}^+$ υπάρχει μοναδικός $y \in \mathbb{R}^+$ ώστε $x.y = 1^*$.

Ορισμός. Για κάθε $x \in \mathbb{R}^+$ το μοναδικό στοιχείο του $\mathbb{R}^+$ της προηγούμενης πρότασης ονομάζεται αντίστροφος του x και συμβολίζεται x^{-1} .

Πρόταση. Έστω $x, y \in \mathbb{R}^+$. Υπάρχει μοναδικός $z \in \mathbb{R}^+$ ώστε $x \cdot z = y$.

Απόδειξη. Θέτουμε $z = x^{-1} \cdot y$. Τότε

$$x \cdot z = x(x^{-1} \cdot y) = (x \cdot x^{-1}) \cdot y = 1^* \cdot y = y.$$

Ορισμός. Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^+$ ο $x^{-1} \cdot y$ ονομάζεται λόγος των x, y και συμβολίζεται $\frac{y}{x}$.

Η πράξη στο $\mathbb{R}^+$ που σε κάθε $x, y \in \mathbb{R}^+$ αντιστοιχεί τον $\frac{y}{x}$ ονομάζεται **διαίρεση**.

Ορισμός: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^+$.

i) Το A λέγεται **άνω φραγμένο** αν υπάρχει $t \in \mathbb{R}^+$ ώστε $a \leq t$ για κάθε $a \in \mathbb{R}^+$.

Κάθε στοιχείο του $\mathbb{R}^+$ με την παραπάνω ιδιότητα ονομάζεται **άνω φράγμα** του A .

ii) Το A λέγεται **κάτω φραγμένο** αν υπάρχει $s \in \mathbb{R}^+$ ώστε $s \leq a$ για κάθε $a \in \mathbb{R}^+$.

Κάθε στοιχείο του $\mathbb{R}^+$ με την παραπάνω ιδιότητα ονομάζεται **κάτω φράγμα** του A .

Θεώρημα Πληρότητας

Λήμμα. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^+$ μη κενό και άνω φραγμένο. Τότε το $u = \bigcup_{a \in A} a$ είναι στοιχείο του $\mathbb{R}^+$.

Απόδειξη. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^+$ και $u = \bigcup_{a \in A} a$.

Επειδή $A \neq \emptyset$ και $a \neq \emptyset$ για κάθε $a \in A$ προφανώς $u \neq \emptyset$.

Έστω $t \in \mathbb{R}^+$ ένα άνω φράγμα του A και $p \in \mathbb{Q}^+$ ώστε $p \notin t$. Επειδή $a \subset t$ για κάθε $a \in A$, ισχύει $p \notin a$ για κάθε $a \in A$. Άρα $p \notin u$. Συνεπώς $u \neq \mathbb{Q}^+$.

Έστω $p \in u$ και $q \in \mathbb{Q}^+$ με $q < p$. Επειδή $p \in u$ υπάρχει $a \in A$ ώστε $p \in a$ και επειδή $a \in \mathbb{R}^+$ και $q < p$ ισχύει $q \in a$. Άρα $q \in u$.

Έστω $p \in u$. Επειδή $p \in u$ υπάρχει $a \in A$ ώστε $p \in a$ και επειδή $a \in \mathbb{R}^+$ υπάρχει $q \in a$ ώστε $p < q$. Άρα $q \in u$ και $p < q$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι το u είναι τομή Dedekind, δηλαδή $u \in \mathbb{R}^+$.

Θεώρημα Πληρότητας. Κάθε μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του $A \subseteq \mathbb{R}^+$ έχει ελάχιστο άνω φράγμα.

Απόδειξη. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^+$. Θέτουμε $u = \bigcup_{a \in A} a$. Από το προηγούμενο λήμμα ισχύει $u \in \mathbb{R}^+$. Επειδή $a \subseteq u$ για κάθε $a \in A$, ισχύει $a \leq u$ για κάθε $a \in A$. Άρα το u είναι άνω φράγμα του A .

Έστω t άνω φράγμα του A . Τότε $a \leq t$. Άρα $a \subseteq t$ για κάθε $a \in A$. Συνεπώς $u \subseteq t$. Άρα $u \leq t$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι το u είναι ελάχιστο άνω φράγμα του A .

- Προφανώς το ελάχιστο άνω φράγμα είναι μοναδικό.
- Το μοναδικό ελάχιστο άνω φράγμα ενός μη κενού και άνω φραγμένου $A \subseteq \mathbb{R}^+$ ονομάζεται supremum του A και συμβολίζεται $\sup A$.

Οι θετικοί ρητοί ως υποσύνολο των θετικών πραγματικών

Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ με $f(p) = p^*$ για κάθε $p \in \mathbb{Q}^+$.

Πρόταση. Για κάθε $p, q \in \mathbb{Q}^+$ ισχύουν:

i) $p = q \Leftrightarrow f(p) = f(q)$

ii) $p < q \Leftrightarrow f(p) < f(q)$

iii) $f(p) + f(q) = f(p + q)$

iv) $f(p) - f(q) = f(p - q)$

v) $f(p) \cdot f(q) = f(p \cdot q)$

vi) $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{f(p)}{f(q)}$

- Η f είναι ισομορφική εμφύτευση των θετικών ρητών στους θετικούς πραγματικούς.
- Μέσω της f ταυτίζουμε το σύνολο $\mathbb{Q}^+$ των θετικών ρητών με το σύνολο $f(\mathbb{Q}^+) = \{p^*: p \in \mathbb{Q}^+\} \subset \mathbb{R}^+$.

Πρόταση (πυκνότητα των θετικών ρητών στους θετικούς πραγματικούς).

Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^+$ με $x < y$ υπάρχει $p \in \mathbb{Q}^+$ ώστε $x < p^* < y$.

Απόδειξη. Έστω $x, y \in \mathbb{R}^+$ με $x < y$. Τότε υπάρχει $q \in \mathbb{Q}^+$ ώστε $q \in y$ και $q \notin x$. Επίσης υπάρχει $p \in \mathbb{Q}^+$ ώστε $q < p$ και $p \in y$. Τότε ισχύει $x < p^* < y$.

Το σύνολο $\mathbb{R}$ των
πραγματικών αριθμών

Θεωρούμε ένα στοιχείο που δεν ανήκει στο $\mathbb{R}^+$ το οποίο το ονομάζουμε μηδέν και το συμβολίζουμε 0.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}^+$ θεωρούμε ένα στοιχείο που δεν ανήκει στο $\mathbb{R}^+$ και είναι διαφορετικό από το 0 το οποίο το ονομάζουμε **μείον x ή αντίθετο του x** και το συμβολίζουμε $-x$. Για $x, y \in \mathbb{R}$ με $x \neq y$ θεωρούμε ότι $-x \neq -y$.

Ορίζουμε σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών το σύνολο

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \cup \{-x: x \in \mathbb{R}^+\}$$

Θέτουμε $\mathbb{R}^- = \{-x: x \in \mathbb{R}^+\}$. Τα στοιχεία του $\mathbb{R}^-$ τα ονομάζουμε αρνητικούς πραγματικούς αριθμούς.

Θέτουμε $\mathbb{Q}^- = \{-p: p \in \mathbb{Q}^+\}$. Τα στοιχεία του $\mathbb{Q}^-$ τα ονομάζουμε αρνητικούς ρητούς.

Θέτουμε $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^-$. Τα στοιχεία του $\mathbb{Q}$ τα ονομάζουμε ρητούς αριθμούς.

Θέτουμε $\mathbb{Z}^- = \{-n: n \in \mathbb{N}\}$. Τα στοιχεία του $\mathbb{Z}^-$ τα ονομάζουμε αρνητικούς ακέραιους.

Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού

Ορισμός. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θέτουμε $|x|$ και ονομάζουμε απόλυτη τιμή του x τον μη αρνητικό πραγματικό αριθμό που ορίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned}|x| &= x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^+ \\ &= 0, \text{ για } x = 0 \\ &= -x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^-\end{aligned}$$

Διάταξη στο $\mathbb{R}$

- Για $x, y \in \mathbb{R}^+$ έχει οριστεί η διάταξη $x < y$.
- Για κάθε $x \in \mathbb{R}^- \cup \{0\}$ και $y \in \mathbb{R}^+$ λέμε ότι ο y είναι μεγαλύτερος του x ή ο x είναι μικρότερος του y και συμβολίζουμε $x < y$.
- Για κάθε $x \in \mathbb{R}^-$ λέμε ότι το 0 είναι μεγαλύτερο του x ή ο x είναι μικρότερος του 0 και συμβολίζουμε $x < 0$.
- $x, y \in \mathbb{R}^-$ λέμε ότι ο y είναι μεγαλύτερος του x ή ο x είναι μικρότερος του y και συμβολίζουμε $x < y$ αν $|y| < |x|$.
- Για $x, y \in \mathbb{R}$ λέμε ότι y είναι μεγαλύτερος ή ίσος του x ή ο x είναι μικρότερος ή ίσος του y και συμβολίζουμε $x \leq y$ αν $x < y$ ή $x = y$.

Ιδιότητες διάταξης στο $\mathbb{R}$

Από τον ορισμό της διάταξης στο $\mathbb{R}$ και τις ιδιότητες της διάταξης στο $\mathbb{R}^+$ προκύπτουν οι παρακάτω προτάσεις

Πρόταση. Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει ακριβώς ένα από τα παρακάτω:

$$x = y \text{ ή } x < y \text{ ή } y < x$$

Πρόταση. Έστω $x, y \in \mathbb{R}$. Τότε ισχύει

i) $x \leq x$

ii) Αν $x \leq y$ και $y \leq x$ τότε $x = y$

iii) Αν $x \leq y$ και $y \leq z$ τότε $x \leq z$.

- Η σχέση $\leq$ είναι σχέση διάταξης στο $\mathbb{R}$.

Πρόσθεση στο $\mathbb{R}$

- Για $x > 0, y > 0$ έχει οριστεί το άθροισμα $x + y$.
- Αν $x < 0, y < 0$ θέτουμε $x + y = -(|x| + |y|)$.
- Αν $x > 0, y < 0$ θέτουμε $x + y = |x| - |y|$ αν $|x| > |y|$
 $= -(|y| - |x|)$ αν $|y| > |x|$
 $= 0$ αν $|x| = |y|$
- Αν $x < 0, y > 0$ θέτουμε $x + y = |y| - |x|$ αν $|y| > |x|$
 $= -(|x| - |y|)$ αν $|x| > |y|$
 $= 0$ αν $|x| = |y|$
- Αν $y = 0$ θέτουμε $x + y = x$
- Αν $x = 0$ θέτουμε $x + y = y$
- Για $x < 0$ λέμε αντίθετο του x και συμβολίζουμε $-x$ τον αριθμό $|x|$.
- Για $x = 0$ λέμε αντίθετο του x το 0.
- Λέμε διαφορά των x, y και συμβολίζουμε $x - y$ τον αριθμό $x + (-y)$. Την πράξη που στο (x, y) αντιστοιχεί τη διαφορά $x - y$ τη λέμε αφαίρεση

Πολλαπλασιασμός στο $\mathbb{R}$

- Αν $x > 0, y > 0$ έχει οριστεί το γινόμενο $x \cdot y$
- Αν $x > 0, y < 0$ ή $x < 0, y > 0$ θέτουμε $x \cdot y = -(|x| \cdot |y|)$
- Αν $x = 0$ ή $y = 0$ θέτουμε $x \cdot y = 0$

Από τον ορισμό της διάταξης, της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού στο $\mathbb{R}$ προκύπτουν όλες οι ιδιότητες που αφορούν τη διάταξη και τις δύο πράξεις.

Ιδιότητα της πληρότητας στο $\mathbb{R}$

Από το θεώρημα της πληρότητας στο $\mathbb{R}^+$ και τις ιδιότητες της διάταξης και της πρόσθεσης στο $\mathbb{R}$ προκύπτει το παρακάτω θεώρημα

Θεώρημα. Κάθε μη μενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει ελάχιστο άνω φράγμα.