ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΑΞΙΩΜΑΤΙΚΗ ΘΕΜΕΛΙΩΣΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Συνάρτηση, Πράξη, Διμελής Σχέση

- Έστω δύο σύνολα Α, Β. **Καρτεσιανό γινόμενο** των Α, Β είναι το σύνολο

  Α x Β = {(x, y): τα x είναι στοιχείο του Α και το y είναι στοιχείο
  του Β}
- **Διμελής σχέση** από ένα σύνολο Α σε ένα σύνολο Β είναι ένα υποσύνολο του ΑxΒ
- **Συνάρτηση** από ένα σύνολο Α σε ένα σύνολο Β είναι μια διμελής σχέση f από το Α στο Β ώστε για κάθε α στο Α υπάρχει μοναδικό β στο Β με (α, β) ανήκει στο f.

  Δηλαδή, είναι μια αντιστοιχία των στοιχείων του Α στα στοιχεία του Β με την ιδιότητα κάθε στοιχείο του Α να αντιστοιχεί σε ακριβώς ένα στοιχεία του Β
- **Πράξη** σε ένα σύνολο Α είναι μια συνάρτηση

  από το ΑxΑ στο Α

Αλγεβρική δομή του συνόλου των πραγματικών αριθμών

Το σύνολο των **πραγματικών αριθμών**, το οποίο συμβολίζουμε με R, είναι ένα σύνολο στο οποίο ορίζονται δύο πράξεις, η **πρόσθεση** (+) και ο **πολλαπλασιασμό** (.), και μια διμελής σχέση, **η διάταξης** (<), οι οποίες ικανοποιούν 13 αξιώματα.

Αξιώματα της πρόσθεσης

- **(Π1) Ύπαρξη του μηδενός**

  Υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός που τον συμβολίζουμε με 0 (μηδέν)

  $$\boldsymbol{\alpha+0=\alpha}$$

  για κάθε πραγματικό αριθμό α.

- **(Π2) Ύπαρξη του αντιθέτου**

  Για κάθε πραγματικό αριθμό α, υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός που τον συμβολίζουμε –α και λέγεται αντίθετος του α, ώστε

  $$\boldsymbol{\alpha+(-\alpha)=0}$$

- **(Π3) Προσεταιριστικότητα της πρόσθεσης**

  $$\boldsymbol{\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma}$$

  για κάθε πραγματικούς αριθμούς α,β,γ.

- **(Π4) Αντιμεταθετικότητα της πρόσθεσης**

  $$\boldsymbol{\alpha+\beta=\beta+\alpha}$$

  για κάθε πραγματικούς αριθμούς α,β.

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
Μοναδικότητα του μηδενός.

Αν μ πραγματικός αριθμός για τον οποίο ισχύει $α + μ = α$ για κάθε πραγματικό αριθμό α, τότε $μ=0$.

Απόδειξη.

Από την ιδιότητα του μ έχουμε $0+μ=0$.

Από την (Π1) έχουμε $μ+0 = μ$.

Από την (Π4) και τα παραπάνω έχουμε

$$0 = 0 + μ = μ + 0 = μ$$

Μοναδικότητα του αντιθέτου.

Αν α, β είναι πραγματικοί αριθμοί και

α + β = 0 τότε β=-α.

Απόδειξη.

β = β+0	(Π1)
=β + (α+(-α))	(Π2)
=(β + α) + (-α)	(Π3)
= (α + β) + (-α)	(Π4)
= 0 + (-α)	(υπόθεση για τον β)
=(-α) + 0	(Π4)
= -α	(Π1)

Αφαίρεση

Συμβολισμός

Αν α, β πραγματικοί αριθμοί θέτουμε

$$α – β = α+(-β)$$

Αξιώματα του πολλαπλασιασμού

- **(Π5) Ύπαρξη της μονάδας**

  Υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός, που τον συμβολίζουμε με 1 (μονάδα), ώστε

  $$1 \neq 0 \text{ και } \alpha . 1 = \alpha$$

  για κάθε πραγματικό αριθμό α.
- **(Π6) Ύπαρξη αντιστρόφου**

  Για κάθε πραγματικό αριθμό $\alpha \neq 0$ υπάρχει πραγματικός αριθμός που τον συμβολίζουμε α^{-1} (αντίστροφος του α), ώστε

  $$\alpha . \alpha^{-1} = 1$$
- **(Π7) Προσεταιριστικότητα του πολλαπλασιαμού**

  $$\alpha .(\beta . \gamma) = (\alpha . \beta). \gamma$$

  για κάθε πραγματικούς αριθμούς α,β,γ.
- **(Π8) Αντιμεταθετικότητα του πολλαπλασιαμού**

  $$\alpha . \beta = \beta . \alpha$$

  για κάθε πραγματικούς αριθμούς α,β.

Κλάσματα

Συμβολισμός:

Αν α, β πραγματικοί αριθμοί και $\beta \neq 0$ θέτουμε

$$\alpha/\beta = \alpha . \beta^{-1}$$

Αξίωμα που συνδέει τις δύο πράξεις

- **Π9. Επιμεριστική ιδιότητα**

$$\alpha.(\beta+\gamma)=\alpha.\beta+\alpha.\gamma$$

για κάθε πραγματικούς αριθμούς α,β,γ.

Αξιώματα της διάταξης

- **(Π10) Ιδιότητα μεταβατικότητας**

  Αν α, β, γ πραγματικοί αριθμοί και

  $$\boldsymbol{\alpha > \beta \text{ και } \beta > \gamma \;\text{ τότε } \alpha > \gamma}$$

- **(Π11) Ιδιότητα της τριχοτομίας**

  Για κάθε πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει ακριβώς μια από τις παρακάτω σχέσεις

  $$\boldsymbol{\alpha = \beta,\ \alpha < \beta,\ \beta < \alpha}$$

Αξιώματα που συνδέουν τις πράξεις με την διάταξη

- **(Π12) Διάταξη και πρόσθεση**

  Αν α, β πραγματικοί αριθμοί και

  α > β τότε α + γ > β + γ

  για κάθε πραγματικό αριθμό γ.

- **(Π13) Διάταξη και πολλαπλασιασμός**

  Αν α, β, γ πραγματικοί αριθμοί με

  α > β και γ>0 τότε α.γ > β.γ

Φυσικοί Αριθμοί

- Ένα υποσύνολο A των πραγματικών αριθμών λέγεται **επαγωγικό** αν:

  α) ο 1 ανήκει στο A

  β) αν ο x ανήκει στο A τότε ο x+1 ανήκει στο A
- **Θεώρημα:** Υπάρχει μικρότερο επαγωγικό

  υποσύνολο του R
- Το μικρότερο επαγωγικό υποσύνολο των πραγματικών αριθμών λέγεται σύνολο των **Φυσικών Αριθμων** (συμβ. N)

Ιδιότητες των Φυσικών Αριθμών

Θεώρημα (Αρχή της μαθηματικής επαγωγής)

Έστω μια μαθηματική πρόταση p.

Υποθέτουμε ότι η p

α) είναι αληθής για το 1

και

β) αν η p είναι αληθής για ένα φυσικό αριθμό m τότε η p είναι αληθής για τον m+1.

Τότε η p είναι αληθής για κάθε φυσικό αριθμό.

Ιδιότητες των Φυσικών Αριθμών

Θεώρημα (Αρχή της καλής διάταξης)

Κάθε μη κενό υποσύνολο των φυσικών αριθμών έχει ελάχιστο στοιχείο

Ιδιότητες των Φυσικών Αριθμών

Πρόταση (Κλειστότητα για τις πράξεις)

Το σύνολο των Φυσικών αριθμών είναι κλειστό για την πρόσθεση και τον πολλαπλασιαμό.

Δηλαδή, το άθροισμα και το γινόμενο δύο φυσικών είναι φυσικός αριθμός

Δύναμη με εκθέτη φυσικό αριθμό

Έστω $\alpha \neq 0$.

Θέτουμε

$\alpha^0=1$, $\alpha^1=\alpha$ και $\alpha^{n+1}=\alpha^n.\alpha$ για κάθε n φυσικό αριθμό.

Ακέραιοι Αριθμοί

- Το σύνολο των **ακεραίων αριθμών** (συμβ. Ζ) είναι οι φυσικοί αριθμοί, οι αντίθετοι τους και το 0.

- Το σύνολο των ακεραίων αριθμών

  i) είναι κλειστό για την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό ικανοποιεί

  ii) τα αξιώματα της πρόσθεσης

Δύναμη με εκθέτη ακέραιο

Έστω $\alpha \neq 0$ και n φυσικός.

Θέτουμε $\alpha^{-n} = 1/\alpha^n$

Ρητοί Αριθμοί

- Το σύνολο των ρητών αριθμών (συμβ. Q) είναι όλοι οι αριθμοί της μορφής α/β με α,β ακέραιους και β διάφορο το 0.

- Κάθε φυσικός αριθμός είναι ακέραιος και κάθε ακέραιος αριθμός είναι ρητός.

- Το σύνολο των ρητών αριθμών είναι κλειστό για την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό

Ρητοί Αριθμοί

- Το σύνολο των ρητών αριθμών ικανοποιεί και τα 13 αξιώματα (ολικά διατεταγμένο σώμα).

- Δεν υπάρχει ρητός αριθμός α ώστε $α^2 = 2$

Ελάχιστο άνω φράγμα

- Έστω A υποσύνολο του R.
  Το A λέγεται **άνω φραγμένο** αν υπάρχει πραγματικός αριθμός M ώστε $x \leq M$ για κάθε x στοιχείο του A.
  Ένας αριθμός με την παραπάνω ιδιότητα λέγεται **άνω φράγμα** του A
- Το A λέγεται **κάτω φραγμένο** αν υπάρχει πραγματικός αριθμός Λ ώστε $Λ \leq x$ για κάθε x στοιχείο του A.
  Ένας αριθμός με την παραπάνω ιδιότητα λέγεται λέγεται **κάτω φράγμα** του A

Ελάχιστο άνω φράγμα

- Υπάρχουν άνω φραγμένα υποσύνολα των ρητών αριθμών που δεν έχουν **ελάχιστο άνω φράγμα** (supremum) ρητό αριθμό.

- Υπάρχουν κάτω φραγμένα υποσύνολα των ρητών αριθμών που δεν έχουν **μέγιστο κάτω φράγμα** (infimum) ρητό αριθμό.

Πληρότητα των Πραγματικών Αριθμών

(Π14) **Αξίωμα της πληρότητας**

Κάθε μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο των πραγματικών αριθμών έχει ελάχιστο άνω φράγμα.

Όλα τα υποσύνολα του R που μπορούν να έχουν ελάχιστο άνω φράγμα, έχουν ελάχιστο άνω φράγμα.

Ύπαρξη μέγιστου κάτω φράγματος

Πρόταση: Κάθε μη κενό και κάτω φραγμένο υποσύνολο των πραγματικών αριθμών έχει μέγιστο κάτω φράγμα.

Άρρητοι αριθμοί

Θεώρημα: Για κάθε πραγματικό αριθμό $\alpha \geq 0$ και κάθε φυσικό αριθμό n υπάρχει μοναδικός αριθμός $\beta \geq 0$ ώστε $\alpha=\beta^n$

Συμβολισμός: $\beta=\sqrt[n]{\alpha} = \alpha^{1/n}$

Πόρισμα: Υπάρχουν μη ρητοί πραγματικοί αριθμοί

Οι πραγματικοί αριθμοί που δεν είναι ρητοί λέγονται **άρρητοι**

Μοναδικότητα της δομής του συνόλου των πραγματικών αριθμών

- Ένα σύνολο που ικανοποιεί τα 14 αξιώματα λέγεται **πλήρες ολικά διατεταγμένο σώμα.**

- Αν ένα σύνολο είναι πλήρες διατεταγμένο σώμα τότε είναι ισομορφικό με το R

Δηλαδή, υπάρχει μια 1-1 και επί απεικόνηση μεταξύ αυτού του συνόλου και του R η οποία διατηρεί την δομή

Δυνάμεις με εκθέτη ρητό αριθμό

Έστω $\alpha > 0$, m ακέραιος, n φυσικός.

Θέτουμε $\alpha^{m/n} = \sqrt[n]{\alpha^m}$

Πυκνότητα των ρητών στους πραγματικούς

Θεώρημα: Έστω α, β δύο πραγματικοί αριθμοί, με α<β.

Υπάρχει ρητός αριθμός q ώστε α<q<β.

Δηλαδή, για κάθε πραγματικό αριθμό μπορούμε να βρούμε οσοδήποτε κοντά έναν ρητό αριθμό.

Πόρισμα: Για κάθε πραγματικό αριθμό α υπάρχει μια ακολουθία ρητών

q_1, $q_{2,\ \ldots}$, q_n, … που συγκλίνει στο β.

Πόρισμα: Έστω α, β δύο πραγματικοί αριθμοί, με α<β.

Υπάρχει άρρητος αριθμός γ ώστε α<γ<β

Δύναμη με εκθέτη άρρητο αριθμό

Θεώρημα: Έστω α πραγματικός αριθμός.

Αν (q_n) και (p_n) είναι δύο ακολουθίες ρητών που συγκλίνουν στον ίδιο αριθμό τότε το όριο της ακολουθίας των δυνάμεων του α με εκθέτες q_n είναι το ίδιο με το όριο της ακολουθίας των δυνάμεων του α με εκθέτες p_n.

Ορισμός: Έστω α>0 και β άρρητος αριθμός.

Θέτουμε $α^β$ το όριο της ακολουθίας των δυνάμεων του α με εκθέτες p_n, όπου (p_n) είναι μια ακολουθία ρητών που συγκλίνει στο β.

Δεκαδική αναπαράσταση των φυσικών αριθμών

Θεώρημα

Για κάθε φυσικό αριθμό m υπάρχει φυσικός αριθμός n και πεπερασμένο πλήθος αριθμών α_0, α_1, α_2,….,α_n από το σύνολο {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ,8, 9}, με $\alpha_n \neq 0$ ώστε

$$m=\alpha_n.10^n + \alpha_{n-1}.10^{n-1} + \ldots + \alpha_1.10 + \alpha_0$$

Οι αριθμοί n, α_n, …,α_0 είναι οι μοναδικοί αριθμοί με την παραπάνω ιδιότητα.

Συμβολισμός: $m=\alpha_n\alpha_{n-1}\alpha_1\ \alpha_0$

Δεκαδική αναπαράστση των ρητών αριθμών

Θεώρημα: Έστω πραγματικός αριθμός α με $0 \leq \alpha \leq 1$.

Τότε υπάρχει ακολουθία $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$

αριθμών από το σύνολο {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ,8, 9} ώστε

$$\alpha = \alpha_1 . 10^{-1} + \alpha_2 . 10^{-2} + \ldots + \alpha_n . 10^{-n} + \ldots$$

Αν $\beta_1, \ldots, \beta_n, \ldots$ Είναι μια ακολουθία με την ίδια ιδιότητα τότε

ή $\alpha_n = \beta_n$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots,$

ή υπάρχει φυσικός αριθμός k ώστε

$\alpha_n = \beta_n$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots, k-1$

$\alpha_k = \beta_\kappa + 1$

$\alpha_n = 0$ και $\beta_n = 9$ για κάθε $n > k$.

Συμβολισμός: $\alpha = 0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$

Περιοδικότητα της δεκαδικής αναπαράστασης των ρητών αριθμών

Θεώρημα

Έστω $\alpha \in R$ ώστε $\alpha = \alpha_n \alpha_{n-1} \ldots \alpha_1 \alpha_0, \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_m \ldots$

Ο α είναι ρητός αν και μόνο αν υπάρχει

$n_0 \in \{1,2,3,\ldots.\}$ και $k \in N$ ώστε $\beta_n = \beta_{n+k}$ για κάθε $n_0 \leq n$

- Δηλαδή ένας πραγματικός αριθμός είναι ρητός αν και μόνο αν έχει περιοδική δεκαδική αναπαράσταση. Οι αριθμοί που δεν έχουν περιοδική δεκαδική αναπαράσταση είναι άρρητοι.