

# ΣΥΝΟΛΑ

## Σύνολα

Η συστηματική μελέτη και η ανάπτυξη της θεωρίας συνόλων η οποία οδήγησε στην «αξιοματική θεωρία συνόλων», ξεκίνησε το τελευταίο τέταρτο του 19<sup>ου</sup> αιώνα από τον μεγάλο Γερμανό μαθηματικό Georg Cantor. Ο Cantor όρισε ως σύνολο «μια οποιαδήποτε συνάθροιση σε ολότητα οριστικών και διακεκριμένων στοιχείων της διαίσθησης ή του στοχασμού μας.» Η διατύπωση αυτή δεν έχει τα χαρακτηριστικά ενός αυστηρού μαθηματικού ορισμού. Αποτελεί μια διαισθητική προσέγγιση της έννοιας, όπως στην Ευκλείδεια Γεωμετρία οι «ορισμοί» του σημείου και της ευθείας. Από αυτό τον «ορισμό» προκύπτουν δύο βασικές ιδιότητες των συνόλων. Η πρώτη είναι ότι κάθε σύνολο έχει στοιχεία. Η δεύτερη ιδιότητα είναι ότι ένα σύνολο καθορίζεται από τα στοιχεία του. Αυτό σημαίνει ότι δύο σύνολα είναι ίσα όταν έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία. Αρχίζοντας από αυτές τις δύο ιδιότητες και με την παραδοχή της ύπαρξης ενός συνόλου που δεν έχει στοιχεία, του κενού συνόλου, ορίζονται η έννοια του υποσυνόλου, οι πράξεις μεταξύ συνόλων (ένωση, τομή, διαφορά) και αποδεικνύονται οι βασικές ιδιότητες τους. Επίσης ορίζεται το διατεταγμένο ζεύγος  $(\alpha, \beta)$  ως τα ζεύγη με καθορισμένη διάταξη, σε αντίθεση με το αντίστοιχο σύνολο  $\{\alpha, \beta\}$  όπου δεν έχει σημασία η σειρά των στοιχείων του, η διατεταγμένη  $n$ -άδα  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ , καθώς και το καρτεσιανό γινόμενο  $n$  συνόλων για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ . Επί πλέον ορίζεται η έννοια της συνάρτησης από ένα σύνολο  $A$  σε ένα σύνολο  $B$  ως μια διαδικασία αντιστοίχισης κάθε στοιχείου του συνόλου  $A$  σε ακριβώς ένα στοιχείο του συνόλου  $B$ . Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι και η διατύπωση αυτή, όπως και ο «ορισμός» του συνόλου, δεν αποτελεί αυστηρό μαθηματικό ορισμό. Με βάση αυτό τον «ορισμό», ορίζονται οι συναρτήσεις 1-1, επί, η σύνθεση συναρτήσεων, η αντίστροφη συνάρτηση και αποδεικνύονται οι βασικές ιδιότητες των συναρτήσεων. Με τη βοήθεια των συναρτήσεων συγκρίνονται δύο σύνολα ως προς το πλήθος των στοιχείων τους.

**3.1.1. Ορισμός:** Έστω δύο σύνολα  $A, B$ .

- Τα  $A$  και  $B$  έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων, δηλαδή είναι ισοπληθικά (συμβ.  $A =_c B$ ), αν υπάρχει συνάρτηση  $f: A \rightarrow B$  η οποία είναι 1-1 και επί.
- Το πλήθος των στοιχείων του  $A$  είναι μικρότερο ή ίσο από το πλήθος των στοιχείων του  $B$  (συμβ.  $A \leq_c B$ ) αν το  $A$  είναι ισοπληθικό με ένα υποσύνολο του  $B$ .
- Το πλήθος των στοιχείων του  $A$  είναι γνήσια μικρότερο του πλήθους των στοιχείων του  $B$  (συμβ.  $A <_c B$ ) αν ισχύει  $A \leq_c B$  και το  $A$  δεν είναι ισοπληθικό με το  $B$ .

Από τον ορισμό της ισοπληθικότητας και τις ιδιότητες των συναρτήσεων εύκολα προκύπτουν οι επόμενες προτάσεις.

**3.1.2. Πρόταση:** Για κάθε σύνολα  $A, B, \Gamma$  ισχύουν:

- $A =_c A$
- Αν  $A =_c B$  τότε  $B =_c A$
- Αν  $A =_c B$  και  $B =_c \Gamma$  τότε  $A =_c \Gamma$

**3.1.3. Πρόταση:** Έστω δύο σύνολα  $A, B$ . Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

- $A \leq_c B$

ii) Υπάρχει συνάρτηση  $f: A \rightarrow B$  η οποία είναι 1-1.

iii) Υπάρχει συνάρτηση  $g: B \rightarrow A$  η οποία επί.

Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη πρόταση και τις ιδιότητες των συναρτήσεων προκύπτει η επόμενη πρόταση:

**3.1.4. Πρόταση:** Για κάθε σύνολα  $A, B, \Gamma$  ισχύουν:

i)  $A \leq_c A$

ii) Αν  $A \leq_c B$  και  $B \leq_c \Gamma$  τότε  $A \leq_c \Gamma$

Επίσης ορίζονται οι έννοιες του πεπερασμένου, του άπειρου και του αριθμήσιμου συνόλου.

**3.1.5. Ορισμός:**

i) Ένα σύνολο  $A$  είναι πεπερασμένο αν είναι το κενό σύνολο ή είναι ισοπληθικό με ένα αρχικό τμήμα των φυσικών αριθμών. Δηλαδή, αν  $A = \emptyset$  ή υπάρχει  $n \in \mathbb{N}$  ώστε  $A =_c \{0, 1, \dots, n\}$ .

ii) Ένα σύνολο  $A$  είναι άπειρο αν δεν είναι πεπερασμένο.

iii) Ένα σύνολο  $A$  είναι αριθμήσιμο αν είναι πεπερασμένο ή ισοπληθικό με το σύνολο των φυσικών αριθμών.

Για τα άπειρα σύνολα αποδεικνύεται ο επόμενος χαρακτηρισμός.

**3.1.6. Πρόταση:** Ένα σύνολο είναι άπειρο αν και μόνον υπάρχει γνήσιο υποσύνολο του το οποίο είναι ισοπληθικό με αυτό.

Δηλαδή, ένα σύνολο  $A$  είναι άπειρο αν και μόνο αν υπάρχει  $B$  γνήσιο υποσύνολο του  $A$  ώστε  $A =_c B$ .

Για τα αριθμήσιμα σύνολα αποδεικνύεται ο παρακάτω χαρακτηρισμός

**3.1.7. Πρόταση:** Έστω σύνολο  $A$ . Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα.

i) Το  $A$  είναι αριθμήσιμο.

ii)  $A \leq_c \mathbb{N}$

iii) Το  $A$  είναι το κενό σύνολο ή υπάρχει συνάρτηση  $f: \mathbb{N} \rightarrow A$  η οποία είναι επί.

Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι η ένωση πεπερασμένου πλήθους αριθμήσιμων συνόλων είναι αριθμήσιμο σύνολο. Γενικότερα ισχύει το επόμενο σημαντικό θεώρημα του Cantor

**3.1.8. Θεώρημα (Cantor):** Η ένωση αριθμήσιμου πλήθους αριθμήσιμων συνόλων είναι αριθμήσιμο σύνολο.

Για την απόδειξη αυτού του θεωρήματος χρησιμοποιείται ένα ενδιαφέρον διαγώνιο επιχείρημα, γνωστό ως πρώτο διαγώνιο επιχείρημα του Cantor

Με τη βοήθεια του θεωρήματος του Cantor αποδεικνύεται ότι το πεπερασμένο καρτεσιανό γινόμενο αριθμήσιμων συνόλων είναι αριθμήσιμο σύνολο

Σχετικά με το πλήθος των στοιχείων ενός άπειρου συνόλου προκύπτει το επόμενο πρόβλημα:

Υπάρχουν μη αριθμήσιμα σύνολα; Δηλαδή, υπάρχουν άπειρα σύνολα που δεν είναι ισοπληθικά με το σύνολο των φυσικών αριθμών;

Απάντηση στο πρόβλημα αυτό έδωσε ο Cantor χρησιμοποιώντας την έννοια του

δυναμοσυνόλου ενός συνόλου. Για κάθε σύνολο  $A$ , δυναμοσύνολο του  $A$  είναι το σύνολο όλων των υποσυνόλων του  $A$ . Το δυναμοσύνολο του  $A$  συμβολίζεται  $\mathcal{P}(A)$ , δηλαδή  $\mathcal{P}(A) = \{B: B \subseteq A\}$ .

Αν το  $A$  είναι πεπερασμένο σύνολο, τότε είναι προφανές ότι  $A <_c \mathcal{P}(A)$ . Αν το  $A$

είναι άπειρο σύνολο, επειδή η συνάρτηση από το  $A$  στο  $\mathcal{P}(A)$  που αντιστοιχεί κάθε  $x \in A$  στο

$\{x\}$  είναι 1-1, είναι προφανές ότι  $A \leq_c \mathcal{P}(A)$ . Ισχύει όμως  $A <_c \mathcal{P}(A)$ ; Ο Cantor απέδειξε ότι το παρακάτω θεώρημα.

**3.1.9. Θεώρημα (Cantor):** Για κάθε σύνολο  $A$  ισχύει  $A <_c \mathcal{P}(A)$ .

Από το θεώρημα αυτό προκύπτει ότι δεν είναι όλα τα άπειρα σύνολα ισοπληθικά. Π.χ. έχουμε

$\mathbb{N} <_c \mathcal{P}(\mathbb{N}) <_c \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) <_c \dots$

Από το θεώρημα αυτό προέκυψαν τα παρακάτω προβλήματα:

Υπάρχει σύνολο με πλήθος στοιχείων μεγαλύτερο του πλήθους των στοιχείων του  $\mathbb{N}$  και μικρότερο του πλήθους των στοιχείων του  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ;  
 Γενικότερα, για κάθε σύνολο  $A$  υπάρχει σύνολο με πλήθος στοιχείων μεγαλύτερο του πλήθους των στοιχείων του  $A$  και μικρότερο του πλήθους των στοιχείων του  $\mathcal{P}(A)$ ;  
 Τα προβλήματα αυτά απαντήθηκαν στο πλαίσιο της αξιωματικής θεωρίας συνόλων.  
 Η σχέση  $\leq_c$  προφανώς είναι αυτοπαθής ( $A \leq_c A$ ) και μεταβατική (αν  $A \leq_c B$  και  $B \leq_c \Gamma$  τότε  $A \leq_c \Gamma$ ). Είναι όμως αυτή η σχέση αντισυμμετρική; Το επόμενο θεώρημα απαντάει σε αυτή την ερώτηση.

**3.1.10. Θεώρημα** (Schröder - Bernstein): Για κάθε σύνολα  $A, B$  αν ισχύει  $A \leq_c B$  και  $B \leq_c A$ , τότε  $A =_c B$ .

Το θεώρημα Schröder – Bernstein είναι πολύ χρήσιμο για την απόδειξη ισοπληθικότητας συνόλων. Συγκεκριμένα, από το θεώρημα αυτό προκύπτει ότι αν υπάρχουν συναρτήσεις  $f: A \rightarrow B$  και  $g: B \rightarrow A$  οι οποίες είναι 1-1 τότε τα σύνολα  $A$  και  $B$  είναι ισοπληθικά.

Από τα παραπάνω έχουμε ότι η σχέση  $\leq_c$  είναι σχέση διάταξης και το πρόβλημα που προκύπτει είναι αν η διάταξη αυτή είναι ολική. Δηλαδή, για κάθε δύο σύνολα  $A, B$  ισχύει  $A \leq_c B$  ή  $B \leq_c A$ ; Το πρόβλημα αυτό επιλύθηκε στο πλαίσιο της αξιωματικής θεωρίας συνόλων.

Η βάση της θεωρίας συνόλων όπως αναπτύχθηκε από τον Cantor, ήταν διαισθητική. Βασικό ρόλο στην ανάπτυξη της είχε η παραδοχή ότι μια οριστική συνθήκη  $P$ , δηλαδή μια συνθήκη για την οποία είναι αδιαμφισβήτητο ότι ένα αντικείμενο ικανοποιεί ή δεν ικανοποιεί τη συνθήκη, δημιουργεί ένα σύνολο, το σύνολο που έχει για στοιχεία όλα τα αντικείμενα τα οποία ικανοποιούν αυτή τη συνθήκη. Η παραδοχή αυτή χρησιμοποιήθηκε στους ορισμούς και στις αποδείξεις. Για παράδειγμα, η ένωση δύο συνόλων  $A, B$  ορίζεται μέσω της συνθήκης  $P(x) \Leftrightarrow x \in A$  ή  $x \in B$ , δηλαδή  $A \cup B = \{x: P(x)\}$ . Ο Bernard Russell το 1902, σε μια επιστολή του στον Gottlob Frege, ανέφερε το παρακάτω παράδοξο το οποίο προκύπτει από αυτή την παραδοχή: Αν  $P(x)$  είναι η ιδιότητα  $x$  σύνολο και  $x \notin x$ , τότε για το σύνολο  $V = \{x: P(x)\}$  ισχύει η ισοδυναμία  $V \in V \Leftrightarrow V \notin V$ .

Αυτό το παράδοξο οδήγησε στην αξιωματική θεμελίωση της θεωρίας συνόλων.

Στη συνέχεια θα περιγράψουμε το γενικό πλαίσιο της αξιωματικής θεωρίας συνόλων.

Δεχόμαστε ότι υπάρχει ένα σύμπαν αντικειμένων  $\mathcal{F}$  και ότι κάποια από τα αντικείμενα αυτά, ενδεχομένως και όλα, είναι σύνολα (η ύπαρξη ή όχι αντικειμένων που δεν είναι σύνολα δεν επηρεάζει τη θεμελίωση που θα ακολουθήσει). Αν  $y$  είναι σύνολο και  $x$  ένα αντικείμενο τότε το  $x$  μπορεί να είναι μέλος του  $y$  και συμβολίζουμε  $x \in y$ , ή το  $x$  δεν είναι μέλος του  $y$  και συμβολίζουμε  $x \notin y$ . Δηλαδή, η έννοια του συνόλου είναι αρχική έννοια, όπως π.χ. στην Ευκλείδεια Γεωμετρία το σημείο και η ευθεία είναι αρχικές έννοιες. Δεχόμαστε ότι ένα αντικείμενο ανήκει ή δεν ανήκει σε ένα σύνολο, όπως στην Ευκλείδεια Γεωμετρία δεχόμαστε ότι «ένα σημείο ανήκει σε μια ευθεία» ή «ένα σημείο δεν ανήκει σε μια ευθεία. Επίσης, δύο αντικείμενα  $x, y$  είναι ίσα αν συμπίπτουν.

Στο σύμπαν  $\mathcal{F}$  ικανοποιούνται τα παρακάτω αξιώματα:

**Αξίωμα I** (αξίωμα της έκτασης). Για κάθε σύνολα  $A, B$  ισχύει

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

Δηλαδή, αυτό το αξίωμα καθορίζει ότι δύο σύνολα είναι ίσα αν περιέχουν τα ίδια στοιχεία.

**Αξίωμα II** (αξίωμα του κενού συνόλου): Υπάρχει σύνολο  $A$  με την ιδιότητα  $(\forall x)(x \notin A)$ .

Δηλαδή, το αξίωμα αυτό εξασφαλίζει την ύπαρξη συνόλου το οποίο δεν έχει στοιχεία. Το σύνολο αυτό συμβολίζεται με  $\emptyset$  και από το αξίωμα της έκτασης προκύπτει ότι είναι μοναδικό

**Αξίωμα III** (αξίωμα του ζεύγους): Για κάθε  $x, y$  υπάρχει σύνολο  $A$  με μοναδικά στοιχεία τα  $x, y$ .  
Δηλαδή,  $z \in A \Leftrightarrow z = x \text{ ή } z = y$ .

Από το αξίωμα της έκτασης προκύπτει ότι το σύνολο αυτό είναι το μοναδικό σύνολο με αυτή την ιδιότητα. Αν  $x \neq y$  το σύνολο αυτό συμβολίζεται  $\{x, y\}$  και αν  $x = y$  συμβολίζεται  $\{x\}$ .

Τα αξιώματα II και III μας εξασφαλίζουν την ύπαρξη του κενού συνόλου  $\emptyset$  καθώς και μονοσυνόλων και δισυνόλων, όπως π.χ. τα  $\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$  κ.α.

**Αξίωμα IV** (αξίωμα της εξιδίκευσης ή του διαχωρισμού): Για κάθε σύνολο  $A$  και κάθε μονομελή οριστική συνθήκη  $P$ , δηλαδή μια συνθήκη για την οποία είναι αδιαμφισβήτητο ότι ένα αντικείμενο του σύμπαντος  $\mathcal{F}$  ικανοποιεί ή δεν ικανοποιεί τη συνθήκη, υπάρχει ένα σύνολο  $B$  για το οποίο ισχύει  $x \in B \Leftrightarrow x \in A \text{ και } P(x)$ .

Δηλαδή το  $B = \{x \in A : P(x)\}$  είναι σύνολο. Με αυτό το αξίωμα, περιορίζοντας την εφαρμογή της συνθήκης  $P$  στα στοιχεία ενός συνόλου για να προκύψει νέο σύνολο, αντιμετωπίζεται το πρόβλημα που προέκυψε με το παράδοξο του Russell.

Επίσης, το αξίωμα της εξιδίκευσης εξασφαλίζει την ύπαρξη υποσυνόλων ενός δεδομένου συνόλου, καθώς και ότι η τομή και η διαφορά δύο συνόλων είναι σύνολο. Πράγματι, για κάθε σύνολα  $A, B$ , αν  $P_1(x) \Leftrightarrow x \in B$  και  $P_2(x) \Leftrightarrow x \notin B$  τα  $\{x \in A : P_1(x)\}$  και  $\{x \in A : P_2(x)\}$  είναι σύνολα.

**Αξίωμα V** (αξίωμα του δυναμοσυνόλου): Για κάθε σύνολο  $A$  υπάρχει ένα σύνολο με στοιχεία μόνο τα υποσύνολα του  $A$ .

Το αξίωμα αυτό εξασφαλίζει ότι το σύνολο των υποσυνόλων ενός δεδομένου συνόλου είναι σύνολο. Για κάθε σύνολο  $A$  αυτό το σύνολο λέγεται δυναμοσύνολο του  $A$  και συμβολίζεται  $\mathcal{P}(A)$ . Δηλαδή  $\mathcal{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}$ .

**Αξίωμα VI** (αξίωμα της ένωσης): Για κάθε σύνολο  $x$  με στοιχεία σύνολα, υπάρχει ένα σύνολο με στοιχεία όλα τα στοιχεία των συνόλων που ανήκουν στο  $x$ .

Η τυπική διατύπωση αυτού του αξιώματος είναι

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z \in y \Leftrightarrow (\exists w)(w \in x \text{ και } z \in w))$$

Δηλαδή, το αξίωμα αυτό μας εξασφαλίζει ότι η ένωση συνόλων (των στοιχείων του  $x$ ) είναι σύνολο.

Τα σύνολα όμως που προκύπτουν με τα μέχρι τώρα αξιώματα είναι πεπερασμένα. Η ύπαρξη άπειρων συνόλων εξασφαλίζεται από το επόμενο αξίωμα.

**Αξίωμα VII** (αξίωμα του απείρου): Υπάρχει σύνολο που περιέχει το κενό σύνολο και για κάθε στοιχείο του  $x$  περιέχει και το  $\{x\}$ .

Δηλαδή υπάρχει σύνολο  $I$  για το οποίο ισχύει:

$$\emptyset \in I \text{ και } (\forall x)[x \in I \Rightarrow \{x\} \in I]$$

Το αξίωμα αυτό εξασφαλίζει την ύπαρξη απειροσυνόλων. Ένα τέτοιο σύνολο είναι το

$$I = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, \dots$$

Τα παραπάνω 7 αξιώματα είναι τα πρώτα αξιώματα που διατύπωσε ο Zermelo. Όπως είδαμε, τα αξιώματα αυτά εξασφαλίζουν την ύπαρξη του κενού συνόλου, την ύπαρξη πεπερασμένων και άπειρων συνόλων, καθώς και ότι η ένωση, η τομή και η διαφορά συνόλων είναι σύνολα.

Με τη χρήση αυτών των αξιωμάτων ορίζονται οι έννοιες του διατεταγμένου ζεύγους, της διμελούς σχέσης και της συνάρτησης με την απαιτούμενη μαθηματική αυστηρότητα και με

τρόπο ώστε να ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες τους. Στη συνέχεια θα δοθούν αυτοί οι ορισμοί ώστε να γίνει σαφέστερη η χρήση των αξιωμάτων.

Διαισθητικά ένα διατεταγμένο ζεύγος  $(x, y)$  το αντιλαμβανόμαστε ως κάτι το οποίο αποτελείται από δύο στοιχεία με καθορισμένη σειρά, σε αντιδιαστολή με το σύνολο  $\{x, y\}$  όπου δεν έχει σημασία η σειρά των  $x, y$ . Δηλαδή, αν  $x \neq y$  τότε  $(x, y) \neq (y, x)$ , ενώ  $\{x, y\} = \{y, x\}$ . Επίσης ισχύει  $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$  αν και μόνον αν  $x_1 = x_2$  και  $y_1 = y_2$ . Στην αξιωματική θεωρία συνόλων το διατεταγμένο ζεύγος ορίζεται ως εξής:

**3.1.11 Ορισμός** (διατεταγμένο ζεύγος): Για κάθε  $x, y$  διατεταγμένο ζεύγος  $(x, y)$  ονομάζουμε το σύνολο  $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ .

Από το αξίωμα III προκύπτει ότι τα  $\{x\}$  και  $\{x, y\}$  είναι σύνολα και από το ίδιο αξίωμα προκύπτει ότι και το  $\{\{x\}, \{x, y\}\}$  είναι σύνολο. Άρα το διατεταγμένο ζεύγος, με βάση τον παραπάνω ορισμό, είναι καλά ορισμένο στο πλαίσιο της αξιωματικής θεωρίας συνόλων.

Επίσης, από το αξίωμα I προκύπτει ότι  $(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$  και  $y_1 = y_2$ .

Αν  $A, B$  είναι δύο σύνολα το καρτεσιανό γινόμενο τους στη διαισθητική θεωρία συνόλων ορίζεται ως το σύνολο  $A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$ . Γιατί όμως αυτό είναι σύνολο; Όπως είδαμε, για να ορίσουμε ένα σύνολο μέσω μιας συνθήκης στην αξιωματική θεωρία συνόλων πρέπει αυτή η συνθήκη να εφαρμοστεί στα στοιχεία ενός συνόλου που γνωρίζουμε ότι υπάρχει (αξίωμα IV). Επομένως πρέπει όλα τα διατεταγμένα ζεύγη  $(x, y)$  με  $x \in A$  και  $y \in B$ , όπως αυτά ορίστηκαν παραπάνω, να ανήκουν σε ένα σύνολο. Πράγματι, για κάθε  $x \in A$  και  $y \in B$ , από τα αξιώματα IV, V και VI προκύπτει

$$\{x\}, \{x, y\} \subseteq A \cup B \Rightarrow \{x\}, \{x, y\} \in \mathcal{P}(A \cup B) \Rightarrow \{\{x\}, \{x, y\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)).$$

Άρα για κάθε  $x \in A$  και  $y \in B$  ισχύει  $(x, y) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$ . Χρησιμοποιώντας το αξίωμα IV, ορίζουμε το καρτεσιανό γινόμενο δύο συνόλων ως εξής:

**3.1.12 Ορισμός** (Καρτεσιανό γινόμενο). Έστω σύνολα  $A, B$  και  $P$  η συνθήκη

$P(z) \Leftrightarrow \exists x \in A$  και  $y \in B$  ώστε  $z = (x, y)$ . Ονομάζουμε καρτεσιανό γινόμενο των  $A, B$  το σύνολο  $A \times B = \{z \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)) : P(z)\}$ . Δηλαδή,  $A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$ .

Στη συνέχεια θα ορίσουμε την έννοια της συνάρτησης. Από τον διαισθητικό ορισμό της συνάρτησης που αναφέρθηκε παραπάνω, μια συνάρτηση  $f$  από ένα σύνολο  $A$  σε ένα σύνολο  $B$  καθορίζεται από το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών  $(x, f(x))$ ,  $x \in A$ . Συνεπώς μπορούμε να τη δούμε ως υποσύνολο του καρτεσιανού γινομένου  $A \times B$ . Γενικά όμως ένα υποσύνολο του γινομένου  $A \times B$  είναι μια σχέση μεταξύ στοιχείων του  $A$  και στοιχείων του  $B$  η οποία δεν είναι κατ' ανάγκη συνάρτηση. Για να είναι συνάρτηση θα πρέπει να έχει και μια ιδιότητα που να εκφράζει τη συνθήκη ότι σε κάθε στοιχείο του  $A$  αντιστοιχεί ένα μοναδικό στοιχείο του  $B$ . Έτσι έχουμε τους παρακάτω ορισμούς:

**3.1.13 Ορισμός** (διμελής σχέση). Διμελής σχέση μεταξύ ενός συνόλου  $A$  και ενός συνόλου  $B$  λέγεται ένα υποσύνολο του καρτεσιανού γινομένου  $A \times B$ .

**3.1.14 Ορισμός**. Μια διμελής σχέση  $f$  μεταξύ του συνόλου  $A$  και του συνόλου  $B$  ονομάζεται συνάρτηση αν για κάθε  $x \in A$  υπάρχει μοναδικό  $y \in B$  ώστε  $(x, y) \in f$ .

Οι βασικές έννοιες και ιδιότητες που συνδέονται με την έννοια της συνάρτησης μπορούν να οριστούν και να αποδειχθούν με βάση τα παραπάνω αξιώματα.

Με τη βοήθεια της έννοιας της συνάρτησης ορίζουμε την έννοια της οικογένειας συνόλων με δείκτες στο σύνολο  $I \neq \emptyset$ , ως μια συνάρτηση  $f: I \rightarrow E$ , όπου  $E$  είναι ένα σύνολο συνόλων, με  $f(i) = A_i \in E$ . Η οικογένεια αυτή συμβολίζεται  $(A_i)_{i \in I}$ .

Επίσης ορίζουμε το καρτεσιανό γινόμενο  $\prod_{i \in I} A_i$  μιας οικογένειας  $(A_i)_{i \in I}$  ως εξής:

Αν  $(A_i)_{i \in I}$  είναι μια οικογένεια συνόλων, μια συνάρτηση  $f: I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$ , από τον ορισμό της έννοιας της συνάρτησης, είναι υποσύνολο του συνόλου  $I \times \bigcup_{i \in I} A_i$ . Άρα, από το αξίωμα V, είναι στοιχείο του συνόλου  $\mathcal{P}(I \times \bigcup_{i \in I} A_i)$ . Αν  $P$  είναι η συνθήκη

$P(f) \Leftrightarrow f$  συνάρτηση ώστε  $f: I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$  και  $f(i) \in A_i$  για κάθε  $i \in I$   
τότε από το αξίωμα IV προκύπτει ότι το  $\{f \in \mathcal{P}(I \times \bigcup_{i \in I} A_i) : P(f)\}$  είναι σύνολο. Άρα  
μπορούμε να δώσουμε τον επομένο ορισμό.

**3.1.15 Ορισμός:** (καρτεσιανό γινόμενο οικογένειας συνόλων)

Καρτεσιανό γινόμενο μιας οικογένειας συνόλων  $(A_i)_{i \in I}$ , το οποίο συμβολίζεται  $\prod_{i \in I} A_i$ , είναι  
το σύνολο  $\{f \in \mathcal{P}(I \times \bigcup_{i \in I} A_i) : P(f)\}$ .

Δηλαδή,  $\prod_{i \in I} A_i = \{f: I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i : f(i) \in A_i \text{ για κάθε } i \in I\}$ .

Στο σημείο αυτό πρέπει να τονίσουμε ότι αν η οικογένεια  $(A_i)_{i \in I}$  είναι πεπερασμένη, από τα  
παραπάνω αξιώματα προκύπτει ότι το καρτεσιανό της γινόμενο είναι μη κενό. Αν όμως η  
οικογένεια αυτή είναι άπειρη, από τα παραπάνω αξιώματα δεν προκύπτει ότι το καρτεσιανό  
της γινόμενο είναι μη κενό. Για να προκύψει αυτό το συμπέρασμα χρειάζεται το αξίωμα της  
επιλογής.

**Αξίωμα VIII (αξίωμα επιλογής):** Για κάθε σύνολα  $A, B$  και κάθε διμελή σχέση  $P \subseteq A \times B$   
μεταξύ του  $A$  και του  $B$  με την ιδιότητα για κάθε  $x \in A$  υπάρχει  $y \in B$  ώστε  $(x, y) \in P$ , υπάρχει  
συνάρτηση  $f: A \rightarrow B$  ώστε  $(x, f(x)) \in P$ .

Δηλαδή, για κάθε συνάρτηση  $\Phi: A \rightarrow \mathcal{P}(B)$  με  $\Phi(x) \neq \emptyset$ , υπάρχει συνάρτηση  $f: A \rightarrow B$  ώστε  
 $f(x) \in \Phi(x)$ .

Το αξίωμα της επιλογής είναι ισοδύναμο και με το ακόλουθο θεώρημα.

**3.1.16. Θεώρημα**

Για κάθε οικογένεια  $\mathcal{A}$  μη κενών και ξένων ανά δύο συνόλων, υπάρχει σύνολο  $S$  ώστε  $S \subseteq \bigcup \mathcal{A}$   
και το σύνολο  $S \cap X$  είναι μονοσύνολο για κάθε  $X \in \mathcal{A}$ .

Δηλαδή, το αξίωμα επιλογής μας δίνει τη δυνατότητα για οποιαδήποτε οικογένεια μη κενών  
και ξένων ανά δύο συνόλων να μπορούμε επιλέξουμε ένα στοιχείο από κάθε σύνολο της  
οικογένειας και αυτά τα στοιχεία να αποτελέσουν μια ολότητα. Αυτό για πεπερασμένη  
οικογένεια μπορεί να γίνει με επαγωγή αλλά για άπειρη οικογένεια δεν προκύπτει από τα  
προηγούμενα αξιώματα.

Ο Gödel (1939) απέδειξε ότι το αξίωμα της επιλογής δεν μπορεί να διαψευστεί από τα  
προηγούμενα 7 αξιώματα και ο Cohen (1963) απέδειξε ότι δεν αποδεικνύεται από αυτά.

Από το αξίωμα της επιλογής προκύπτει ότι το καρτεσιανό γινόμενο μιας οικογένειας μη κενών  
συνόλων είναι μη κενό σύνολο.

Το επόμενο θεώρημα αφορά σε δύο σημαντικές συνέπειες, στην πραγματικότητα ισοδύναμες  
διατυπώσεις, του αξιώματος της επιλογής.

**3.1.17 Θεώρημα.** Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

α) Αξίωμα της επιλογής.

β) Για κάθε δύο σύνολα  $A, B$  ισχύει  $A \leq_c B$  ή  $B \leq_c A$ .

γ) Κάθε σύνολο δέχεται καλή διάταξη, δηλαδή μια διάταξη στην οποία κάθε μη κενό  
υποσύνολο του έχει ελάχιστο στοιχείο

Πολλά σημαντικά θεωρήματα της Μαθηματικής Ανάλυσης απαιτούν την ισχύ του αξιώματος  
της επιλογής

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, από το θεώρημα Cantor έχουμε ότι  $\mathbb{N} <_c \mathcal{P}(\mathbb{N})$  και γενικότερα  
 $A <_c \mathcal{P}(A)$  για κάθε σύνολο  $A$ . Αυτό οδήγησε στη διατύπωση των παρακάτω υποθέσεων.

**Υπόθεση του Συνεχούς (Υ.Σ.).** Δεν υπάρχει σύνολο  $B$  ώστε  $\mathbb{N} <_c B <_c \mathcal{P}(\mathbb{N})$

και της γενικότερης υπόθεσης

**Γενικευμένη Υπόθεση του Συνεχούς (Γ.Υ.Σ.).** Για κάθε σύνολο  $A$  δεν υπάρχει σύνολο  $B$  ώστε  
 $A <_c B <_c \mathcal{P}(A)$ .

Με τις υποθέσεις αυτές ασχολήθηκαν σημαντικοί μαθηματικοί (.....) αλλά δεν μπόρεσαν να αποδείξουν ότι είναι αληθείς ή ψευδείς στο πλαίσιο των παραπάνω αξιωμάτων. Τελικά, το 1939 ο Gödel (Gödel, 1939) απέδειξε ότι η Γ.Υ.Σ. είναι συνεπής με τα παραπάνω αξιώματα, δηλαδή δεν διαψεύδεται από αυτά. Μετά από περίπου 30 χρόνια ο Cohen (Cohen,1963) απέδειξε ότι η Υ.Σ. είναι ανεξάρτητη από τα παραπάνω αξιώματα, δηλαδή δεν αποδεικνύεται από αυτά. Συνεπώς η Υ.Σ. ή η άρνηση της μπορεί να θεωρηθεί ως αξίωμα και να προστεθεί στα παραπάνω αξιώματα. Το ίδιο ισχύει και με τη Γ.Υ.Σ. και την άρνηση της.