Παράρτημα Α′

Αριθμήσιμα και υπεραριθμήσιμα σύνολα

Α′.1 Ισοπληθικά σύνολα

Ορισμός Α′.1.1 (ισοπληθικότητα)**.** Έστω A, B δύο μη κενά σύνολα. Τα A, B λέγονται *ισοπληθικά* αν υπάρχει μια συνάρτηση $f : A \to B$, η οποία είναι 1-1 και επί[1]. Τότε, γράφουμε $A =_c B$ ή $|A| = |B|$ ή και $A \sim B$.

Παραδείγματα Α′.1.2. (α) Τα σύνολα $(0,1)$ και $(0,2)$ είναι ισοπληθικά, μέσω της αντιστοιχίας $f : (0,1) \to (0,2)$ με $f(x) = 2x$. Γενικότερα, κάθε ανοικτό διάστημα $(a,b),\ a, b \in \mathbb{R},\ a < b$, είναι ισοπληθικό με το $(0,1)$ μέσω της αντιστοιχίας $f : (0,1) \to (a,b)$ με $f(t) = (1-t)a + tb$.

(β) Το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ είναι ισοπληθικό με το σύνολο των αρτίων $A = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ μέσω της αντιστοιχίας $\mathbb{N} \rightarrowtail A$ με $n \mapsto 2n$.

(γ) Το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$ είναι ισοπληθικό με το σύνολο των ακεραίων $\mathbb{Z}$. Πράγματι: θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ με

$$f(n) = \begin{cases} k, & \text{αν } n = 2k-1,\ k \in \mathbb{N} \\ 1-k, & \text{αν } n = 2k,\ k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Η συνάρτηση f αντιστοιχεί στους περιττούς φυσικούς τους θετικούς ακεραίους και στους άρτιους φυσικούς τους μη θετικούς ακεραίους.

(δ) Τα σύνολα $[0,1]$ και $[0,1)$ είναι ισοπληθικά. Πράγματι: θεωρούμε το σύνολο $A = \{\frac{1}{n} : n = 1, 2, \ldots\}$, το οποίο είναι υποσύνολο του $[0,1]$ και ορίζουμε τη συνάρτηση $f : [0,1] \to$

[1] Μια τέτοια συνάρτηση ονομάζεται αντιστοιχία. Λέμε τότε ότι έχουμε μια αντιστοιχία από το A στο B και γράφουμε $A \rightarrowtail B$.

$[0,1)$ με

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n+1}, & \text{αν } x \in A \text{ και } x = \frac{1}{n} \\ x, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι η f είναι αντιστοιχία.

Η επόμενη πρόταση μας λέει ότι η ισοπληθικότητα μεταξύ συνόλων είναι σχέση ισοδυναμίας.

Πρόταση Α′.1.3. *Έστω A, B, C μη κενά σύνολα. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*
(α) $A \sim A$,
(β) *αν* $A \sim B$, *τότε* $B \sim A$ *και*
(γ) *αν* $A \sim B$ *και* $B \sim C$, *τότε* $A \sim C$.

Απόδειξη. Άμεση. □

Συμβολισμός. Συμβολίζουμε με T_n το σύνολο των πρώτων n φυσικών, δηλαδή $T_n = \{1, 2, \dots n\}$.

Ορισμός Α′.1.4 (πεπερασμένα και άπειρα σύνολα)**.** (α) Έστω A μη κενό σύνολο[2]. Το A λέγεται *πεπερασμένο* αν υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και συνάρτηση $f : A \to T_n$ η οποία είναι 1-1 και επί. Τότε, λέμε ότι ο *πληθάριθμος* του A είναι n ή ότι το A έχει n στοιχεία και γράφουμε $\mathrm{card}(A) = n$ ή $\#A = n$ ή και $|A| = n$.

(β) Ένα σύνολο A λέγεται *άπειρο* αν δεν είναι πεπερασμένο.

Πρόταση Α′.1.5. *Ένα σύνολο A είναι άπειρο αν και μόνο αν υπάρχει 1-1 συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to A$, δηλαδή υπάρχει $B \subseteq A$ ώστε $B \sim \mathbb{N}$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι το A είναι άπειρο. Ειδικότερα, το A είναι μη κενό. Άρα, υπάρχει $a_1 \in A$. Τότε, το σύνολο $A \setminus \{a_1\}$ είναι μη κενό. Άρα, υπάρχει $a_2 \in A \setminus \{a_1\}$. Ομοίως, $A \setminus \{a_1, a_2\} \neq \emptyset$ και μπορούμε να επιλέξουμε $a_3 \in A \setminus \{a_1, a_2\}$. Επαγωγικά, ορίζεται ακολουθία (a_n) στοιχείων του A. Πράγματι: αν υπήρχε $n \in \mathbb{N}$ ώστε $A \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_n\} = \emptyset$ τότε θα είχαμε $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ και το A θα ήταν πεπερασμένο.

Ορίζουμε τότε $f : \mathbb{N} \to A$ με $f(n) = a_n$. Η f είναι 1-1 διότι τα a_n είναι διαφορετικά ανά δύο. Αν θέσουμε $B = f(\mathbb{N})$ τότε $B \subseteq A$ και η $f : \mathbb{N} \to B$ είναι 1-1 και επί. Δηλαδή, $B \sim \mathbb{N}$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι υπάρχει 1-1 συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to A$. Αν το A είναι πεπερασμένο, τότε υπάρχουν $m \in \mathbb{N}$ και $g : A \to T_m$ η οποία είναι 1-1 και επί. Τότε, η συνάρτηση $g \circ f : \mathbb{N} \to T_m$ είναι 1-1, άτοπο (εξηγήστε γιατί). □

[2] Για το κενό σύνολο δεχόμαστε ότι είναι πεπερασμένο με πληθάριθμο 0.

Συμβολισμός. Έστω A, B δύο σύνολα. Αν υπάρχει 1-1 συνάρτηση $f : A \to B$, γράφουμε $A \leq_c B$ ή $A \preceq B$ και λέμε ότι το A έχει πληθάριθμο το πολύ ίσο με αυτόν του B. Ο συμβολισμός και η ορολογία δικαιολογούνται από το γεγονός ότι το A είναι ισοπληθικό με το $f(A)$ το οποίο είναι υποσύνολο του B.

Παραδείγματα Α′.1.6. (α) Το σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων είναι άπειρο, διότι $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$.

(β) Το σύνολο των ρητών είναι άπειρο διότι $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$.

(γ) Κάθε μη τετριμμένο διάστημα είναι άπειρο σύνολο.

Σχόλια Α′.1.7. Κάθε άπειρο σύνολο A είναι ισοπληθικό με κάποιο γνήσιο υποσύνολό του. Πράγματι, στην πρόταση Α′.1.6. δείξαμε ότι αν το A είναι άπειρο τότε υπάρχει 1-1 συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to A$. Γράφουμε $b_n = f(n)$ για $n = 1, 2, \ldots$ και θέτουμε $B = f(\mathbb{N}) = \{b_1, b_2, \ldots\} \subseteq A$. Θεωρούμε το σύνολο $C = A \setminus \{b_1\}$, το οποίο είναι γνήσιο υποσύνολο του A και ορίζουμε μια συνάρτηση $g : A \to C$ ως εξής:

$$g(x) = \begin{cases} b_{n+1}, & \text{αν } x = b_n \text{ για κάποιο } n \\ x, & \text{αν } x \in A \setminus B \end{cases}$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι η g είναι 1-1 και επί (άσκηση).

Α′.2 Αριθμήσιμα και υπεραριθμήσιμα σύνολα

Ορισμός Α′.2.1 (αριθμήσιμα και υπεραριθμήσιμα σύνολα)**.** Έστω A ένα άπειρο σύνολο. Το A θα λέγεται *άπειρο αριθμήσιμο* αν υπάρχει 1-1 και επί συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to A$, δηλαδή αν $A \sim \mathbb{N}$. Ένα σύνολο A λέγεται *αριθμήσιμο* αν είναι πεπερασμένο ή άπειρο αριθμήσιμο. Αν το A δεν είναι αριθμήσιμο, θα λέγεται *υπεραριθμήσιμο.*

Συμβολισμός. Τον πληθάριθμο των φυσικών αριθμών τον συμβολίζουμε με ω ή $\aleph_0$ (άλεφ 0). Έτσι, αν το σύνολο A είναι αριθμήσιμο γράφουμε $|A| = \aleph_0$.

Παραδείγματα Α′.2.2. (α) Το σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων είναι άπειρο αριθμήσιμο.

(β) Το $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(m, n) : m, n \in \mathbb{N}\}$ είναι άπειρο αριθμήσιμο: η συνάρτηση $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ με $f(m, n) = 2^{m-1}(2n - 1)$ είναι 1-1 και επί. Το γεγονός ότι είναι επί έπεται από το θεμελιώδες θεώρημα της αριθμητικής (δείξτε ότι είναι 1-1).

(γ) Αν A, B είναι άπειρα αριθμήσιμα σύνολα, τότε το $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$ είναι επίσης άπειρο αριθμήσιμο. Πράγματι, αν τα A, B είναι άπειρα αριθμήσιμα τότε υπάρχουν $f : A \to \mathbb{N}$ και $g : B \to \mathbb{N}$ συναρτήσεις 1-1 και επί. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h : A \times B \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ όπου $h(a, b) = (f(a), g(b))$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι οι f και g είναι 1-1 και επί μπορούμε εύκολα να ελέγξουμε ότι η h είναι 1-1 και επί. Άρα, $A \times B \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Από το προηγούμενο παράδειγμα έχουμε $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$, οπότε από την πρόταση Α′.1.3. έπεται ότι $A \times B \sim \mathbb{N}$.

Η επόμενη πρόταση δίνει χρήσιμους χαρακτηρισμούς για τα αριθμήσιμα σύνολα.

Πρόταση Α′.2.3. *Έστω A άπειρο σύνολο. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*
(α) *Το A είναι αριθμήσιμο.*
(β) *Υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to A$, η οποία είναι επί.*
(γ) *Υπάρχει συνάρτηση $g : A \to \mathbb{N}$, η οποία είναι 1-1.*

Για την απόδειξη της πρότασης θα χρειαστούμε ένα λήμμα το οποίο παρουσιάζει ανεξάρτητο ενδιαφέρον.

Λήμμα Α′.2.4. *Έστω A άπειρο υποσύνολο του $\mathbb{N}$. Τότε, το A είναι αριθμήσιμο.*

Απόδειξη. Το A είναι άπειρο, επομένως είναι μη κενό. Από την αρχή της καλής διάταξης (αρχή του ελαχίστου) υπάρχει το $a_1 = \min A$. Το σύνολο $A \setminus \{a_1\}$ είναι επίσης μη κενό (αλλιώς το A θα ήταν πεπερασμένο) οπότε, πάλι από την αρχή της καλής διάταξης, υπάρχει το $a_2 = \min A \setminus \{a_1\}$. Η διαδικασία αυτή συνεχίζεται επ΄ άπειρον, γιατί αν σταματούσε σε κάποιο βήμα n_0 θα είχαμε $A \setminus \{a_1, \ldots, a_{n_0}\} = \emptyset$, δηλαδή το A θα ήταν πεπερασμένο. Έτσι, ορίζεται επαγωγικά μια ακολουθία (a_n) διαφορετικών ανά δύο στοιχείων του A. Παρατηρήστε ότι η (a_n) είναι γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών, άρα $a_n \geq n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Ισχυρισμός. $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$.

Είναι προφανές ότι $\{a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots\} \subseteq A$. Αν υποθέσουμε ότι ο εγκλεισμός είναι γνήσιος, τότε υπάρχει $a \in A$ ώστε $a \neq a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Προφανώς, είναι $a > a_1$ και επίσης υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $a_n > a$ (διότι $a_n \geq n$). Άρα, υπάρχει μέγιστος n με την ιδιότητα $a > a_n$. Τότε, $a_n < a < a_{n+1}$. Αυτό είναι άτοπο, διότι έχουμε $a \in A \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$ και $a < \min A \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$.

Από τον ισχυρισμό έπεται άμεσα ότι το A είναι αριθμήσιμο. □

Τώρα είμαστε σε θέση να αποδείξουμε την πρόταση Α′.2.3.

Απόδειξη της πρότασης Α′.2.3. Η συνεπαγωγή (α) $\Rightarrow$ (β) είναι άμεση από τον ορισμό του αριθμήσιμου συνόλου.

Υποθέτουμε ότι ισχύει το (β), δηλαδή υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to A$, η οποία είναι επί. Τότε, για κάθε $a \in A$ ισχύει $f^{-1}(\{a\}) \neq \emptyset$. Θέτουμε $n_a = \min f^{-1}(\{a\})$, $a \in A$ (το min υπάρχει από την αρχή της καλής διάταξης). Η συνάρτηση $g : A \to \mathbb{N}$, με $g(a) = n_a$ είναι καλά ορισμένη και 1-1. Πράγματι: παρατηρούμε ότι αν $a, b \in A$ με $a \neq b$, τότε $f^{-1}(\{a\}) \cap f^{-1}(\{b\}) = \emptyset$ και άρα $n_a \neq n_b$.

Έστω ότι ισχύει το (γ) δηλαδή, υπάρχει 1-1 συνάρτηση $g : A \to \mathbb{N}$. Τότε, το $B = g(A)$ είναι άπειρο υποσύνολο των φυσικών. Από το λήμμα είναι αριθμήσιμο, δηλαδή υπάρχει $h : B \to \mathbb{N}$, η οποία είναι 1-1 και επί. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\phi : A \to \mathbb{N}$ με $\phi(a) = h(g(a))$. Εύκολα ελέγχουμε ότι είναι 1-1 και επί, άρα το A είναι αριθμήσιμο. □

Παραδείγματα Α′.2.5. Το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών είναι αριθμήσιμο. Αφού το $\mathbb{Q}$ είναι άπειρο, αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει 1-1 συνάρτηση $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$. Αφού $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει 1-1 συνάρτηση $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ με $f(\frac{m}{n}) = (m, n)$, όπου $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ και $\gcd(m, n) = 1$.

Το επόμενο θεώρημα οφείλεται στον Cantor και δείχνει ότι αριθμήσιμες το πλήθος πράξεις μεταξύ αριθμήσιμων συνόλων παράγουν αριθμήσιμα σύνολα. Το επιχείρημα που χρησιμοποιείται για την απόδειξη είναι γνωστό ως *πρώτο διαγώνιο επιχείρημα του Cantor*.

Θεώρημα Α′.2.6 (Cantor, 1899)**.** *Έστω $(A_i)_{i\in I}$ μια οικογένεια αριθμήσιμων υποσυνόλων ενός συνόλου X. Αν το I είναι αριθμήσιμο, τότε και το $\bigcup_{i\in I} A_i$ είναι αριθμήσιμο.*

Απόδειξη. Το I είναι αριθμήσιμο, μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε χωρίς περιορισμό της γενικότητας ότι είναι το $\mathbb{N}$. Έτσι, έχουμε την οικογένεια $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$. Επίσης, κάθε A_i είναι αριθμήσιμο, επομένως μπορούμε να απαριθμήσουμε τα στοιχεία του ως

$$A_i = \{a_1^i, a_2^i, \ldots, a_k^i, \ldots\}, \quad i = 1, 2, \ldots$$

(αν κάποιο από τα A_i είναι πεπερασμένο, «επαναλαμβάνουμε» κάποιο στοιχείο του άπειρες φορές). Αριθμώντας με αυτόν τον τρόπο τα στοιχεία του εκάστοτε συνόλου παίρνουμε έναν άπειρο πίνακα, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα:

$$\begin{array}{ccccccccc}
A_1 & : & a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & \ldots & a_k^1 & \ldots \\
A_2 & : & a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \ldots & a_k^2 & \ldots \\
A_3 & : & a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & \ldots & a_k^3 & \ldots \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\
A_n & : & a_1^n & a_2^n & a_3^n & \ldots & a_k^n & \ldots \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

Τότε, είναι προφανές ότι ο πίνακας αυτός περιέχει όλα τα στοιχεία του $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ (ενδεχομένως με επαναλήψεις). Απαριθμούμε τα στοιχεία αυτού του πίνακα κατά μήκος των διαγωνίων με κατεύθυνση από τα αριστερά προς τα δεξιά, ως εξής:

$$a_1^1, a_1^2, a_2^1, a_1^3, a_2^2, a_3^1, \ldots$$

Από την παραπάνω διαδικασία αρίθμησης προκύπτει απεικόνιση $\pi : \mathbb{N} \to A$ επί (ορίστε την π). Το συμπέρασμα έπεται από το (β) της πρότασης Α′.2.3. $\square$

Η επόμενη πρόταση αποδεικνύει ότι υπάρχουν σύνολα τα οποία δεν είναι αριθμήσιμα. Αυτό μάλιστα ισχύει για τα μη τετριμμένα διαστήματα στο $\mathbb{R}$.

Πρόταση Α′.2.7. *Το σύνολο $[0,1] = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$ είναι υπεραριθμήσιμο.*

Απόδειξη. Το σύνολο $[0,1]$ είναι άπειρο. Έστω ότι είναι αριθμήσιμο. Τότε, μπορούμε να γράψουμε

$$[0,1] = \{x_n : n = 1, 2, \ldots\}.$$

Διαιρούμε το $[0,1]$ σε τρία διαδοχικά ισομήκη διαστήματα ως εξής: $[0,1] = [0,1/3] \cup [1/3,2/3] \cup [2/3,1]$. Τότε, τουλάχιστον ένα από αυτά τα τρία διαστήματα δεν περιέχει το

x_1. Ονομάζουμε αυτό το διάστημα I_1 και το διαιρούμε σε τρία ισομήκη διαδοχικά κλειστά διαστήματα μήκους $1/9$. Τουλάχιστον ένα από αυτά δεν περιέχει το x_2. Ονομάζουμε αυτό το διάστημα I_2. Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο, οπότε παίρνουμε μια φθίνουσα ακολουθία κλειστών διαστημάτων $I_n = [a_n, b_n]$ με $x_n \notin I_n$ και $b_n - a_n = 3^{-n} \to 0$. Από την αρχή κιβωτισμού ισχύει $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{x\}$. Αφού $x \in [0,1]$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $x = x_{n_0}$. Άτοπο, διότι $x \in I_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ενώ $x_{n_0} \notin I_{n_0}$. □

Σημείωση: Παρατηρήστε ότι η πληρότητα των πραγματικών αριθμών παίζει ουσιαστικό ρόλο στην απόδειξη: χρησιμοποιήσαμε την αρχή του κιβωτισμού. Σε αντιδιαστολή, το σύνολο $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ είναι αριθμήσιμο.

Πόρισμα Α′.2.8. *Το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ και το σύνολο των αρρήτων $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ είναι υπεραριθμήσιμα.*

Τέλος, δείχνουμε ότι το σύνολο των δυαδικών ακολουθιών είναι υπεραριθμήσιμο.

Θεώρημα Α′.2.9 (Cantor)**.** *Το σύνολο των δυαδικών ακολουθιών*

$$2^{\mathbb{N}} = \{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{x = (x(n)) : x(n) \in \{0,1\},\ n = 1,2,\ldots\}$$

είναι υπεραριθμήσιμο.

Απόδειξη. Το επιχείρημα της απόδειξης είναι γνωστό ως *δεύτερο διαγώνιο επιχείρημα του Cantor*. Αρχικά παρατηρούμε ότι το σύνολο $2^{\mathbb{N}}$ είναι άπειρο. Έστω ότι είναι αριθμήσιμο. Τότε, υπάρχει μια αρίθμηση των στοιχείων του: $2^{\mathbb{N}} = \{x_n : n = 1,2,\ldots\}$, όπου κάθε x_n είναι δυαδική ακολουθία. Μπορούμε τότε να παραστήσουμε τα στοιχεία x_n και τις συντεταγμένες τους σε μορφή άπειρου πίνακα:

$$\begin{aligned}
x_1 &= (x_1(1), x_1(2), x_1(3), \ldots, x_1(k), \ldots) \\
x_2 &= (x_2(1), x_2(2), x_2(3), \ldots, x_2(k), \ldots) \\
x_3 &= (x_3(1), x_3(2), x_3(3), \ldots, x_3(k), \ldots) \\
&\vdots \\
x_n &= (x_n(1), x_n(2), x_n(3), \ldots, x_n(k), \ldots) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Κοιτάμε το πρώτο στοιχείο στην πρώτη συντεταγμένη, το δεύτερο στοιχείο στη δεύτερη συντεταγμένη, το τρίτο στοιχείο στην τρίτη συντεταγμένη κ.ο.κ. Δηλαδή, κινούμαστε στην «κύρια διαγώνιο» του πίνακα και βάσει αυτής ορίζουμε το εξής στοιχείο του $2^{\mathbb{N}}$:

$$y = (1 - x_1(1), 1 - x_2(2), \ldots, 1 - x_k(k), \ldots)$$

Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι $x_n \neq y$ διότι $x_n(n) \neq 1 - x_n(n) = y(n)$. Με άλλα λόγια, το y διαφέρει από το x_1 στην πρώτη θέση, από το x_2 στη δεύτερη θέση κ.ο.κ. Έτσι οδηγούμαστε σε αντίφαση. □