1. Η ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΣΚΟΠΟΙ ΚΑΙ ΣΤΟΧΟΙ ΤΗΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Τα αίτια της δημιουργίας και της ανάπτυξης των Μαθηματικών ήταν και είναι η λύση εξωτερικών και εσωτερικών προβλημάτων. Με τον όρο εξωτερικά προβλήματα εννοούμε πρακτικά προβλήματα της καθημερινής ζωής, τα οποία οδήγησαν και στη δημιουργία των πρώτων Μαθηματικών, ή προβλήματα που τίθενται από άλλες επιστήμες και που η λύση τους ανάγεται στη λύση μαθηματικού προβλήματος. Με τον όρο εσωτερικά προβλήματα εννοούμε προβλήματα που προέκυψαν από την ίδια την εξέλιξη των Μαθηματικών.

Για ποιο σκοπό όμως διδάσκουμε τα Μαθηματικά στο σχολείο;

Διδάσκουμε Μαθηματικά στα σχολεία για να είναι σε θέση ο σημερινός μαθητής και αυριανός πολίτης:

α) να κατανοεί τι συμβαίνει γύρω του,
β) να κατανοεί τον Φυσικό κόσμο και
γ) να αναπτύξει λογική σκέψη

Για την επίτευξη των παραπάνω σκοπών τίθενται επιμέρους στόχοι, ανάλογα και με την εκπαιδευτική βαθμίδα που διδάσκουμε, όπως:

α) Ο μαθητής να κατανοεί έννοιες, μαθηματικές διαδικασίες, γεγονότα και αρχές.
β) Ο μαθητής να εκτελεί πράξεις και να ακολουθεί διαδικασίες με ακρίβεια και ταχύτητα.
γ) Ο μαθητής να είναι ικανός να λύνει προβλήματα.
δ) Ο μαθητής να κατανοεί τη λογική δομή μιας απόδειξης.
ε) Ο μαθητής να αναπτύσσει θετικές στάσεις, να του προκαλείται το ενδιαφέρον και η περιέργεια και να αναπτύσσει πρωτοβουλίες.
ζ) Ο μαθητής να αναπτύσσει αποδοτικούς τρόπους μάθησης και επικοινωνίας στα μαθηματικά, καθώς και συνήθειες μελέτης και αναζήτησης της γνώσης για αυτόνομη πρόοδο.

ΠΩΣ ΔΙΔΑΣΚΟΥΜΕ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Η διδασκαλία των Μαθηματικών είναι πολύ δύσκολη υπόθεση. Για πολλά μαθηματικά θέματα από αυτά που διδάσκουμε σήμερα απαιτήθηκαν εκατοντάδες χρόνια για να αποκτήσουν τη τελική τους μορφή. Στη διάρκεια αυτών των αιώνων και στη πορεία εξέλιξης τους έγιναν λάθη και δημιουργήθηκαν εσφαλμένες αντιλήψεις οι οποίες στη συνέχεια αναθεωρήθηκαν μέχρι να διαμορφωθούν στη μορφή που εμείς γνωρίζουμε σήμερα. Αυτή η πορεία αποδεικνύει ότι δεν είναι καθόλου εύκολη η σύλληψη αυτών των θεμάτων από το μαθητή. Πολλά από τα λάθη που έγιναν σε αυτή τη πορεία είναι φυσικό να αποτελούν και λάθη πολλών μαθητών.

Μια διδασκαλία των μαθηματικών που έχει μοναδικό στόχο την παρουσίαση των αποτελεσμάτων, δηλαδή, εκφράζεται με τον συνήθη και βολικό φορμαλισμό και υλοποιείται με το σχήμα Ορισμός, Θεώρημα, Απόδειξη, Εφαρμογή, υποβαθμίζει ή αγνοεί πλήρως τις διαδρομές της σκέψης που οδήγησαν σε αυτό το αποτέλεσμα. Είναι μια στεγνή και τυπική περιγραφή, η οποία δεν μπορεί να προκαλέσει το ενδιαφέρον του μαθητή και να του κεντρίσει την περιέργεια. Έχει καθαρά χαρακτήρα διεκπεραίωσης και ο μαθητής απλώς παρακολουθεί χωρίς να συμμετέχει και συνήθως χωρίς να καταλαβαίνει.

Δυστυχώς, η παραπάνω διδακτική διαδικασία είναι αυτή που συνήθως ακολουθείται σήμερα. Ο καθηγητής έχει μια ορισμένη ύλη που πρέπει να καλύψει μέσα σε συγκεκριμένα χρονικά πλαίσια. Οργανώνει αυτή την ύλη σε ενότητες, όπου κάθε ενότητα περιέχει ορισμούς, θεωρήματα, αποδείξεις και εφαρμογές τα οποία μπαίνουν στη σειρά ώστε να υπάρχει μια λογική δομή. Τα μοιράζει όλα αυτά μέσα στις διδακτικές ώρες του και τα παρουσιάζει στους μαθητές κάνοντας χρήση του εξαιρετικά εξυπηρετικού φορμαλισμού. Με τον τρόπο αυτό το κομμάτι των Μαθηματικών που διδάσκεται παρουσιάζεται ως ένα ολοκληρωμένο και τελειωμένο προϊόν. Ο καθηγητής γνωρίζει, ή θα έπρεπε να γνωρίζει, ότι τα Μαθηματικά καταλήγουν σε αυτή τη τελική και βέλτιστη μορφή μέσα από προσπάθειες και λάθη, μέσα από μερικώς σωστές και μερικώς λανθασμένες προτάσεις, μέσα από διαισθητικές τυποποιήσεις στις οποίες χαλαροί όροι και ανακρίβειες έχουν εσκεμμένα εισαχθεί, μέσα από ζωγραφιές που προσπαθούν να παραστήσουν εποπτικά μέρη των μαθηματικών που είναι προς σκέψη, μέσα από δυναμικές αλλαγές που γίνονται σε αυτές τις ζωγραφιές κ.λ.π. Όμως, ενώ ο καθηγητής γνωρίζει αυτές τις διαστάσεις των Μαθηματικών, τις αγνοεί και διδάσκει σχεδόν κατά αποκλειστικότητα χρησιμοποιώντας την βολική άποψη των μαθηματικών που συμπυκνώνεται στη διαδοχή:

ΟΡΙΣΜΟΣ-ΘΕΩΡΗΜΑ-ΑΠΟΔΕΙΞΗ-ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Είναι αλήθεια ότι αυτός ο τρόπος μαθηματικής εκπαίδευσης έχει αρκετά πλεονεκτήματα. Επιτρέπει πολύ καλό σχεδιασμό της δομής κάθε ώρας διδασκαλίας, προβλέψιμη πρόοδο της ύλης, εγγυάται ότι η ύλη ή το μεγαλύτερο μέρος της θα καλυφθεί. Έχει όμως και ένα σημαντικό μειονέκτημα που δεν μπορεί να αγνοηθεί:

ΕΣΤΙΑΖΕΙ ΚΥΡΙΩΣ ΣΤΟ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΣΚΕΨΗΣ ΚΑΙ ΟΧΙ ΣΤΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΤΡΟΠΟΥ ΣΚΕΨΗΣ.

Αν παρατηρήσει κάποιος προσεκτικά το πως αρκετοί «επιτυχημένοι» μαθητές επεξεργάζονται μαθηματικά προβλήματα, βρίσκει ότι έχουν σοβαρές παρανοήσεις σε βασικά θέματα. Η επιτυχία τους οφείλεται στο ότι το μεγαλύτερο μέρος της μαθηματικής εκπαίδευσης από το δημοτικό σχολείο έως και το λύκειο διδάσκει διαδικασίες ("κάνε αυτό, μετά κάνε αυτό, μετά αυτό...") και οι δάσκαλοι και οι καθηγητές αξιολογούν τους μαθητές αν μπορούν να εκτελέσουν σωστά τη διαδικασία που τους ζητούν να εκτελέσουν. Με άλλα λόγια, αυτό που μαθαίνουν οι περισσότεροι μαθητές είναι να εκτελούν ένα μεγάλο αριθμό τυποποιημένων διαδικασιών, συνδεδεμένων με γνωστούς σε αυτούς φορμαλισμούς, ώστε να μπορούν να δώσουν απαντήσεις σε σαφώς οριοθετημένες κλάσεις ερωτήσεων. Δηλαδή αποκτούν μια ικανότητα να λειτουργούν, με πολύ μικρότερη βέβαια ταχύτητα, όπως ένας υπολογιστής εφοδιασμένος με ένα κατάλληλο πρόγραμμα. Με τον τρόπο αυτό, καταλήγουν σε μια υπολογίσιμη Μαθηματικά γνώση, χωρίς όμως τη μεθοδολογία εργασίας του μαθηματικού. Αυτό σημαίνει ότι στερούνται το «Know how» που θα τους επέτρεπε να χρησιμοποιήσουν τη γνώση τους ευέλικτα για να λύσουν προβλήματα τύπου που δεν τους είναι γνωστός.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΤΗΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ.

Σε ποιες γενικές αρχές πρέπει να στηρίζεται η διδασκαλία των Μαθηματικών για να πετύχει τους στόχους που θέσαμε παραπάνω; Ο ακρογωνιαίος λίθος της διδασκαλίας είναι η σε βάθος γνώση του αντικειμένου. Χωρίς αυτή την προϋπόθεση δεν μπορεί να επιτευχθεί κανένας στόχος. Όταν ικανοποιείται αυτή τότε μπορούμε να αρχίσουμε να συζητάμε για τη διδακτική των Μαθηματικών. Ορισμένες γενικές αρχές που πρέπει να διέπουν τη διδασκαλία των Μαθηματικών είναι οι εξής:

i) Η μάθηση στα Μαθηματικά πρέπει να είναι εννοιολογική.

Η εκμάθηση κανόνων και διαδικασιών χωρίς κατανόηση μπορεί να έχει βραχυπρόθεσμα αποτελέσματα, αλλά δεν οδηγεί σε ουσιαστική ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης του μαθητή. Επίσης μακροπρόθεσμα δεν μένει τίποτα στο μαθητή γιατί ο χρόνος ενεργεί καταλυτικά στη μνήμη του.

ii) Η μάθηση στα Μαθηματικά πρέπει να ακολουθεί αναπτυξιακή διαδικασία.

Η ανάπτυξη των μαθηματικών εννοιών είναι μια συνεχής διαδικασία αφομοίωσης νέων δεδομένων και πληροφοριών και ενσωμάτωσης τους στις υπάρχουσες γνώσεις.
Ο ρόλος του καθηγητή σε αυτή τη διαδικασία είναι:

α) η ετοιμασία ποικίλων δραστηριοτήτων που θα βοηθήσουν τους μαθητές να αντιληφθούν τις έννοιες,

β) η δημιουργία κατάλληλου περιβάλλοντος για παροχή ευκαιριών στους μαθητές να εξερευνήσουν με διάφορους τρόπους τις μαθηματικές έννοιες,

γ) η καθοδήγηση των μαθητών για να οικοδομήσουν τις έννοιες στηριζόμενοι στις υπάρχουσες άτυπες γνώσεις τους.

iii) Η οργάνωση του αναλυτικού προγράμματος πρέπει να είναι σπειροειδής.

Τα μαθηματικά στηρίζονται σε προαπαιτούμενες γνώσεις. Η σωστή ιεράρχηση των μαθηματικών ιδεών είναι πολύ σημαντική. Η σπειροειδής ανάπτυξη των μαθηματικών εννοιών από τάξη σε τάξη και από κεφάλαιο σε κεφάλαιο είναι ουσιώδης στην κατάκτηση των μαθηματικών εννοιών. Με τη σπειροειδή μορφή του αναλυτικού προγράμματος κάθε έννοια οικοδομείται με βάση τις προηγούμενες έννοιες και επεκτείνεται με τρόπο που να καλύπτει όλο και μεγαλύτερο φάσμα των ιδιοτήτων της.

Η υιοθέτηση της αρχής της σπειροειδούς ανάπτυξης του αναλυτικού προγράμματος προϋποθέτει ένα διπλό ρόλο του δασκάλου:

α) Ο δάσκαλος στον προγραμματισμό της εργασίας του πρέπει να λαμβάνει υπόψη του τις προαπαιτούμενες γνώσεις κάθε έννοιας που πρόκειται να διδάξει. Πρέπει δηλαδή να γνωρίζει τις αδυναμίες των μαθητών. Η διάγνωση αυτή θα βοηθήσει στον προγραμματισμό της διδασκαλίας.

β) Ο δάσκαλος πρέπει γνωρίζει την ύλη όχι μόνο της τάξης του αλλά και των προηγούμενων και επομένων τάξεων.

iv) Τα κίνητρα των μαθητών επηρεάζουν τη μαθησιακή διαδικασία και αντίστροφα.

Ο δάσκαλος θα πρέπει να προγραμματίζει δραστηριότητες που θα μπορούν να εκτελέσουν με επιτυχία οι μαθητές. Η επιτυχία είναι απαραίτητη προϋπόθεση για τη δημιουργία κινήτρων μάθησης. Η έρευνα έχει δείξει ότι ενδιαφέρουσες δραστηριότητες διεγείρουν την περιέργεια των μαθητών καθώς και ότι η επιτυχία σε αυτές οδηγεί στην ανάπτυξη αυτοπεποίθησης στους μαθητές ότι είναι ικανοί να κάνουν μαθηματικά. Αυτό έχει ως συνέπεια περισσότερη προσπάθεια, βαθύτερη κατανόηση και ακόμη καλύτερες επιδόσεις.

v) Οι μαθητές πρέπει να γνωρίζουν τι αναμένεται να μάθουν.

Η γνώση του τελικού στόχου από τους μαθητές έχει αποδειχθεί ότι δημιουργεί μεγαλύτερο ενδιαφέρον και συμμετοχή.

vi) Οι μαθητές πρέπει να έχουν την ευκαιρία για ενεργητική συμμετοχή.

Η ενεργός συμμετοχή των μαθητών είναι ιδιαίτερα σημαντική προκειμένου οι μαθητές να αποκτήσουν θετική στάση απέναντι στο μάθημα και να κατανοήσουν τις μαθηματικές έννοιες. Πρωταρχικός ρόλος του δασκάλου είναι η επιλογή δραστηριοτήτων για ενεργό συμμετοχή των μαθητών.

vii) Η επικοινωνία και συζήτηση πρέπει να είναι μέρος της καθημερινής διδασκαλίας.

Ακριβώς όπως η ομιλία προηγείται της γραπτής έκφρασης έτσι και στα Μαθηματικά η προφορική έκφραση των μαθητών πρέπει να προηγείται της συμβολικής αναπαράστασης

viii) Η χρήση ποικιλίας εποπτικών μέσων συμβάλλει στη μάθηση.

Η μαθηματική σκέψη από τη φύση της είναι πολύ αφηρημένη. Γι αυτό οποιοδήποτε εποπτικό μέσον μπορεί να εκφράσει μια μαθηματική ιδέα, αν και δεν είναι δυνατόν να την αποδώσει πλήρως, μπορεί όμως να συμβάλλει στην καλύτερη κατανόηση της.

ix) Η διδασκαλία πρέπει να βοηθάει τους μαθητές να διατηρήσουν στη μνήμη τους τις βασικές έννοιες.

Οι μαθητές γρήγορα ξεχνούν, αλλά μπορούμε να τους βοηθήσουμε να διατηρούν στη μνήμη τους τα πιο σημαντικά. Συνήθως κανόνες και διαδικασίες που μαθαίνονται μηχανικά ξεχνιούνται γρήγορα. Το ίδιο συμβαίνει και με ασύνδετες γνώσεις ή ορισμούς. Αντίθετα, δύσκολα ξεχνιούνται οι διαδικασίες επίλυσης ενός προβλήματος το οποίο απαιτεί πιο προχωρημένη μαθηματική σκέψη και για τη λύση του οποίου αφιερώθηκε αρκετός χρόνος διδασκαλίας. Η διατήρηση των εννοιών στη μνήμη των μαθητών πρέπει να αποτελεί βασικό στόχο της διδασκαλίας των Μαθηματικών. Ορισμένοι τρόποι, που βοηθούν τους μαθητές να διατηρούν στη μνήμη τους βασικές μαθηματικές έννοιες είναι οι εξής:

α) Η εννοιολογική κατανόηση και η ουσιαστική συμμετοχή των μαθητών στην «ανακάλυψη» των εννοιών βοηθά ουσιαστικά ώστε αυτές να γίνουν κτήμα τους.

β) Κατά τη διάρκεια εισαγωγής μιας νέας έννοιας πρέπει να γίνεται σύντομη επανάληψη και χρήση των προαπαιτούμενων γνώσεων

γ) Η συχνή και διαφορετική χρήση βασικών μαθηματικών εννοιών οδηγεί στην ανάπτυξη ανώτερης μαθηματικής σκέψης.

(Μέρος του περιεχομένου της παραπάνω ενότητας προέρχεται από το βιβλίο «Διδακτική των Μαθηματικών» των Γ. Φιλίπου και Κ. Χρίστου, εκδόσεις Δαρδανός)

2. Ο ΡΟΛΟΣ ΤΩΝ ΟΡΙΣΜΩΝ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΚΑΙ ΤΗ ΜΑΘΗΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Το όνομα μιας έννοιας, όταν το βλέπουμε ή όταν το ακούμε προκαλεί ένα ερέθισμα στη μνήμη μας. Συνήθως δεν πρόκειται για τον τυπικό ορισμό της έννοιας. Αυτό που έρχεται στη μνήμη μας όταν ακούμε η βλέπουμε το όνομα μιας έννοιας αποκαλείται *«εικόνα έννοιας» (concept image)* ή *«πλαίσιο έννοιας» (concept frame).* Αυτή μπορεί να είναι μια οπτική αναπαράσταση της έννοιας στην περίπτωση που η έννοια έχει οπτικές αναπαραστάσεις. Μπορεί επίσης, να είναι μια συλλογή εντυπώσεων ή εμπειριών. Η κατανόηση μιας έννοιας προϋποθέτει το σχηματισμό μιας εικόνας έννοιας γι' αυτήν. Η αποστήθιση του τυπικού ορισμού της δεν εγγυάται την κατανόηση της. Για να την κατανοήσουμε πρέπει να διαθέτουμε μια σωστή εικόνα της.

Στα πλαίσια της καθημερινής ζωής οι περισσότερες έννοιες, όπως π.χ. σπίτι, πορτοκάλι, αυτοκίνητο, γάτα, κ.α., κατανοούνται χωρίς οποιαδήποτε συμμετοχή ορισμών. Από την άλλη πλευρά, μερικές έννοιες, ακόμη και έννοιες της καθημερινής ζωής, μπορεί να εισαχθούν μέσω ορισμών. Π.χ. η λέξη «δάσος» μπορεί να εξηγηθεί σε ένα παιδί με το να πούμε «πάρα πολλά δέντρα μαζί». Ορισμοί όπως αυτός βοηθούν να σχηματιστεί μια εικόνα της έννοιας. Από τη στιγμή όμως που σχηματίζεται μια εικόνα, ο ορισμός παύει να χρησιμοποιείται. Θα παραμείνει ανενεργός ή ακόμα θα ξεχαστεί και κατά το χειρισμό των προτάσεων που σχετίζονται με την έννοια θα γίνεται χρήση μόνο της εικόνας που δημιουργήθηκε.

Στα Μαθηματικά όμως, οι ορισμοί έχουν εξαιρετικά σημαντικό ρόλο. Όχι μόνο βοηθούν στο σχηματισμό της εικόνας της έννοιας αλλά πολύ συχνά διαδραματίζουν κρίσιμο ρόλο. Απαιτούν από τους μαθητές κάποιες νοητικές συνήθειες που είναι εντελώς διαφορετικές από εκείνες που έχουν συνηθίσει στα πλαίσια της καθημερινής ζωής. Είναι πολύ πιθανό, τουλάχιστον στην αρχή της διαδικασίας της μάθησης, οι νοητικές συνήθειες που διαμορφώνονται από την καθημερινή ζωή να κυριαρχήσουν πάνω στις νοητικές συνήθειες που απαιτούνται.

Ας υποθέσουμε την ύπαρξη δύο διαφορετικών «κελιών» στη γνωστική μας δομή. Το ένα κελί είναι για τον (*τυπικό) ορισμό της έννοιας* και το δεύτερο για την *εικόνα της έννοιας*. Ένα από τα κελιά ή ακόμα και τα δύο μπορεί να είναι κενά. Το κελί της εικόνας της έννοιας θεωρείται κενό, εφ' όσον δεν αποδίδεται νόημα στο όνομα της έννοιας. Αυτό μπορεί να συμβεί σε πολλές περιπτώσεις όπου η απομνημόνευση του ορισμού της έννοιας γίνεται με έναν άνευ νοήματος τρόπο. Μπορεί επίσης, να υπάρξει κάποια αλληλεπίδραση μεταξύ των κελιών αν και μπορούν να διαμορφωθούν ανεξάρτητα.

Ένας μαθητής μπορεί να διαθέτει μια εικόνα της έννοιας, π.χ. για την έννοια των συστημάτων συντεταγμένων, ως αποτέλεσμα της παρατήρησης και μελέτης πολλών γραφικών παραστάσεων σε διάφορες καταστάσεις. Σύμφωνα με αυτή την εικόνα της έννοιας, οι δύο άξονες ενός συστήματος συντεταγμένων είναι μεταξύ τους κάθετοι. Αργότερα, ο καθηγητής των μαθηματικών μπορεί να ορίσει το σύστημα συντεταγμένων

ως οποιεσδήποτε δύο τεμνόμενες ευθείες γραμμές. Ως αποτέλεσμα αυτού, τρία σενάρια ενδέχεται να εμφανιστούν:
i) Η εικόνα της έννοιας μπορεί να μεταβληθεί ώστε να συμπεριλάβει και τα συστήματα συντεταγμένων, των οποίων οι άξονες δεν σχηματίζουν ορθή γωνία. (Αυτό αποτελεί μια ικανοποιητική ανακατασκευή.)
ii) Η εικόνα της έννοιας μπορεί να παραμείνει αμετάβλητη. Το κελί του ορισμού θα περιέχει τον ορισμό του δασκάλου για λίγο, αλλά σύντομα αυτός ο ορισμός θα ξεχαστεί ή θα διαστρεβλωθεί. Όταν ο μαθητής θα κληθεί να ορίσει ένα σύστημα συντεταγμένων θα αναφερθεί πάλι σε σύστημα με κάθετους άξονες. (Σε αυτήν την περίπτωση ο τυπικός ορισμός δεν έχει αφομοιωθεί.)
iii) Και τα δύο κελιά θα παραμείνουν αμετάβλητα. Τη στιγμή κατά την οποία ο μαθητής καλείται να ορίσει ένα σύστημα συντεταγμένων θα επαναλάβει τον ορισμό του δασκάλου του, αλλά σε όλες τις άλλες καταστάσεις θα σκεφτεί το σύστημα συντεταγμένων ως δύο κάθετους άξονες.
Ένα άλλο παράδειγμα της περίπτωσης (iii) είναι όταν μαθητές, μετά από τη μελέτη της έννοιας της συνάρτησης, απαντούν ότι μια συνάρτηση είναι οποιαδήποτε αντιστοιχία μεταξύ δύο συνόλων που αντιστοιχεί σε κάθε στοιχείο του πρώτου συνόλου ακριβώς ένα στοιχείο του δεύτερου, αλλά ταυτόχρονα απαντούν ότι η αντιστοιχία που στέλνει κάθε μη μηδενικό αριθμό στο τετράγωνό του και το -1 στο 0 δεν είναι μια συνάρτηση.
Μια παρόμοια διαδικασία ενδέχεται να εμφανιστεί όταν μια έννοια εισάγεται αρχικά μέσω ενός ορισμού. Εδώ, το κελί της εικόνας της έννοιας είναι κενό αρχικά. Μετά από πολλά παραδείγματα και επεξηγήσεις γεμίζει βαθμιαία.

Ορισμός Έννοιας (Concept Definition)	⟷	Εικόνα Έννοιας (Concept Image)

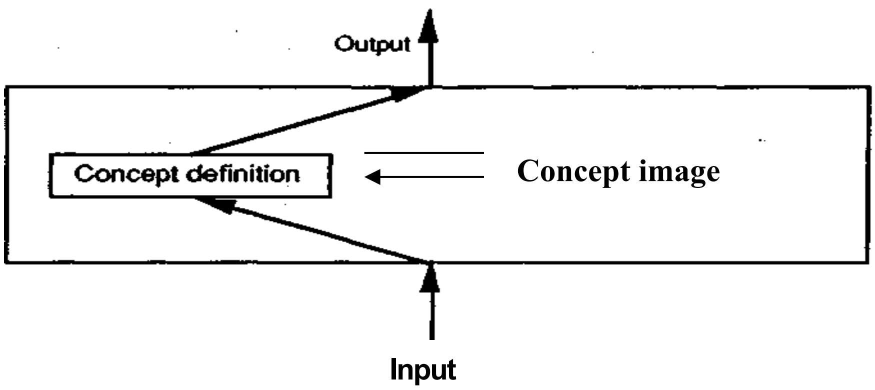
Σχήμα 1: Αλληλεπίδραση μεταξύ εικόνας έννοιας & ορισμού έννοιας

Το σχήμα 1 αναφέρεται στις μακροχρόνιες διαδικασίες του σχηματισμού μιας έννοιας μέσω της αλληλεπίδρασης μεταξύ των περιεχομένων των δύο κελιών. Όμως πολλοί εκπαιδευτικοί στη δευτεροβάθμια και τριτοβάθμια εκπαίδευση αναμένουν μια διαδικασία μονής κατεύθυνσης για το σχηματισμό έννοιας, όπως φαίνεται στο σχήμα 2. Δηλαδή, αναμένουν ότι η εικόνα έννοιας θα διαμορφωθεί με τη βοήθεια του ορισμού έννοιας και θα ελέγχεται πλήρως από αυτήν.

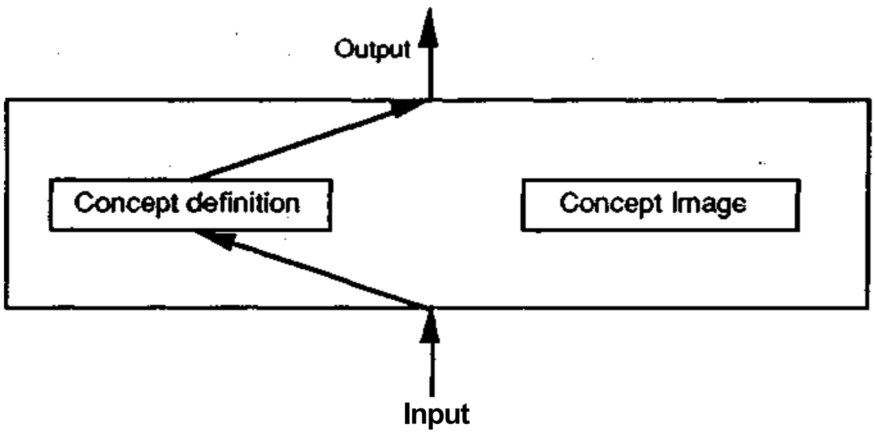
Ορισμός Έννοιας (Concept Definition)	⟶	Εικόνα Έννοιας (Concept Image)

Σχήμα 2 γνωστική ανάπτυξη μιας τυπικής έννοιας

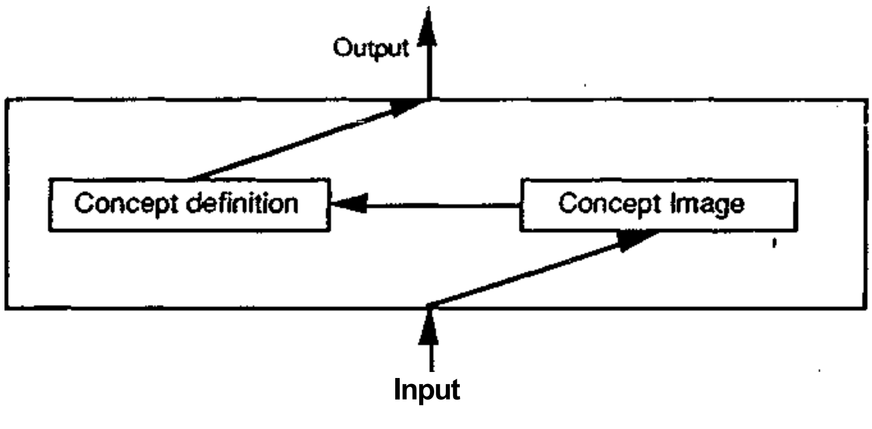
Εκτός από τη διαδικασία του σχηματισμού έννοιας υπάρχουν επίσης οι διαδικασίες της επίλυσης προβλήματος. Όταν τίθεται ένα πρόβλημα σε έναν μαθητή, οι κυψέλες της εικόνας έννοιας και του ορισμού έννοιας υποτίθεται ότι πρόκειται να ενεργοποιηθούν. Στη πράξη, φαίνεται, πως πολλοί εκπαιδευτικοί στη δευτεροβάθμια αλλά και στη τριτοβάθμια εκπαίδευση αναμένουν ότι οι διανοητικές διαδικασίες που ενεργοποιούνται για την επίλυση του προβλήματος θα πρέπει σχηματικά να εκφράζονται με ένα από τα τρία παρακάτω σχήματα. (Τα σχήματα αντιπροσωπεύουν μόνο την πτυχή της εικόνας έννοιας και του ορισμού έννοιας που εμπλέκονται στη διαδικασία και τα βέλη στα σχήματα αντιπροσωπεύουν τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους ένα γνωστικό σύστημα ενδέχεται να λειτουργήσει.)



Σχήμα 3: Αλληλεπίδραση μεταξύ του ορισμού και της εικόνας

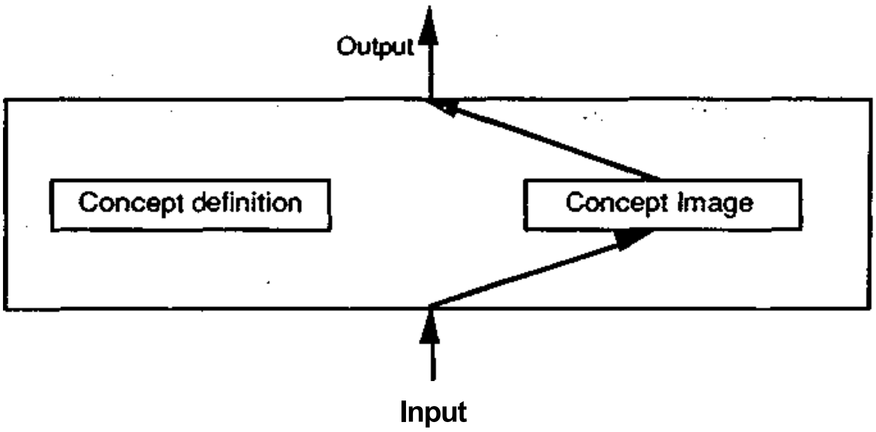


Σχήμα 4: Καθαρά τυπική αφαίρεση



Σχήμα 5: Αφαίρεση μετά από τη διαισθητική σκέψη

Το κοινό χαρακτηριστικό γνώρισμα όλων των παραπάνω σχημάτων είναι ότι για την επίλυση ενός προβλήματος οι διανοητικές διαδικασίες που συντελούνται περιλαμβάνουν οπωσδήποτε και τον ορισμό της έννοιας. Αυτό είναι φυσικά η επιθυμητή διαδικασία. Δυστυχώς, στη πράξη με τους μαθητές δε συμβαίνει πάντοτε αυτό. Ερευνητικά αποτελέσματα, όπως θα αναφέρουμε παρακάτω, δείχνουν ότι ένα πιο κατάλληλο πρότυπο για τις διαδικασίες που ακολουθούν στη πράξη οι περισσότεροι μαθητές είναι το ακόλουθο:



Σχήμα 6 : Διαισθητική απάντηση

Εδώ η κυψέλη του ορισμού έννοιας, αν και μη κενή, δεν ενεργοποιείται κατά τη διαδικασία επίλυσης προβλήματος. Ο τρόπος σκέψης που έχει συνηθίσει ο μαθητής στα πλαίσια της καθημερινής ζωής κυριαρχεί και έτσι αγνοεί την ανάγκη να συμβουλευτεί τον τυπικό ορισμό. Στις περισσότερες περιπτώσεις στην πράξη, η αναφορά μόνο στην κυψέλη της εικόνας της έννοιας οδηγεί τον μαθητή στην επιτυχία. Το γεγονός αυτό δεν του δημιουργεί την ανάγκη να αλλάξει τον τρόπο σκέψης που έχει συνηθίσει στην καθημερινή ζωή και να χρησιμοποιεί τον τυπικό ορισμό της έννοιας. Μόνο τα μη στερεότυπα προβλήματα, στα οποία οι ελλιπείς εικόνες έννοιας μπορεί να είναι παραπλανητικές, μπορούν να ενθαρρύνουν τους μαθητές να στραφούν και στον ορισμό της έννοιας.

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε ορισμένα αποδεικτικά στοιχεία για να υποστηρίξουμε τον ισχυρισμό ότι η πλειοψηφία των μαθητών δεν χρησιμοποιεί τους τυπικούς ορισμούς κατά την εργασία πάνω σε γνωστικά ζητήματα. Για να γίνουμε πιο συγκεκριμένοι, ο ισχυρισμός μας είναι ότι στη δευτεροβάθμια αλλά και στη τριτοβάθμια εκπαίδευση η πλειοψηφία των μαθητών δεν αναπτύσσει συνήθειες σκέψης που είναι απαραίτητες στα πλαίσια των Μαθηματικών. Οι μαθητές συνεχίζουν να χρησιμοποιούν τις συνήθειες που έχουν από τον τρόπο σκέψης στην καθημερινή ζωή.

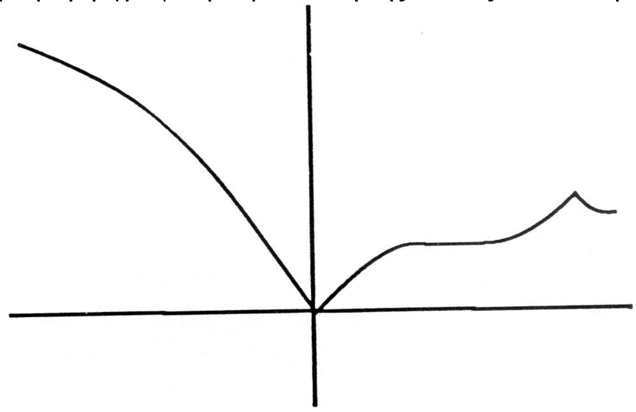
Οι έννοιες τις οποίες πρόκειται να συζητήσουμε εδώ, είναι η έννοια της συνάρτησης και η έννοια της εφαπτομένης. Και οι δύο έρευνες που ακολουθούν έγιναν σε σχολεία και πανεπιστήμια της Αγγλίας.

Το ακόλουθο ερωτηματολόγιο δόθηκε σε 147 φοιτητές που είχαν τα Μαθηματικά βασικό μάθημα στις τελευταίες τάξεις της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

(Στις πρώτες τρεις ερωτήσεις οι σπουδαστές έπρεπε να επιλέξουν μεταξύ «ναι» ή «όχι» και να εξηγήσουν τις απαντήσεις τους.)

1. Υπάρχει συνάρτηση στην οποία κάθε αριθμός διάφορος του μηδενός αντιστοιχίζεται στο τετράγωνό του και το 0 αντιστοιχίζεται στο -1;

2. Υπάρχει συνάρτηση στην οποία κάθε θετικός αριθμός αντιστοιχίζεται στο 1, κάθε αρνητικός αντιστοιχίζεται στο -1 και το 0 στο 0;
3. Υπάρχει συνάρτηση η γραφική παράσταση της οποίας να είναι η ακόλουθη;

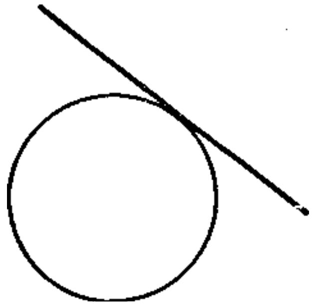


Σχήμα 7: Προκύπτει αυτή η γραφική παράσταση από μια συνάρτηση;

4. Κατά την άποψή σας τι είναι συνάρτηση;

Ο ορισμός της έννοιας της συνάρτησης που είχε διδαχθεί σε όλους τους σπουδαστές ήταν ότι, μια συνάρτηση είναι μια αντιστοιχία μεταξύ δύο συνόλων που σε κάθε στοιχείο του πρώτου συνόλου αντιστοιχεί ακριβώς ένα στοιχείο του δεύτερου. Παρά ταύτα, μόνο το 57% των σπουδαστών έδωσε αυτόν τον ορισμό ή κάτι που ήταν εν μέρει ισοδύναμο με αυτόν ως απάντηση στην ερώτηση 4. (Σημειώστε ότι εξετάστηκαν καλοί σπουδαστές. Επομένως, το ποσοστό 57% θα μπορούσε να θεωρηθεί ως μεγάλο επίτευγμα σε άλλες περιστάσεις, αλλά όχι στην προκειμένη περίπτωση.) Το 14% των σπουδαστών είπε ότι μια συνάρτηση είναι ένας *κανόνας* αντιστοίχισης και απέρριψαν τη δυνατότητα μιας τυχαίας συνάρτησης. Οι κανόνες δεν μπορούν να είναι τυχαίοι. Επιβάλλεται να έχουν ένα λογικό ή μαθηματικό υπόβαθρο. Ένα επιπλέον 14% υποστήριξε ότι μια συνάρτηση είναι ένας αλγεβρικός όρος, μια φόρμουλα (δηλαδή ένας τύπος), ή μια εξίσωση. Το υπόλοιπο ποσοστό δεν έδωσε καμία ικανοποιητική απάντηση ή δεν απάντησε καθόλου. Σε ότι αφορά στις εικόνες έννοιας προέκυψε ότι σε συγκεκριμένες καταστάσεις (στις ερωτήσεις 1 και 2) μεταξύ του ενός τρίτου και των δύο τρίτων των σπουδαστών νομίζουν ότι μια συνάρτηση θα πρέπει να δοθεί από έναν ενιαίο τύπο ή, εάν δίνονταν δύο τύποι, τότε θα πρέπει τα επιμέρους πεδία ορισμού για τον κάθε τύπο να είναι διαστήματα. Ένας κανόνας για ένα μόνο σημείο (όπως στην ερώτηση 1) δεν επιτρέπεται. Μερικοί σπουδαστές θεώρησαν ότι οι αντιστοιχίες οι οποίες δε δίνονται από έναν αλγεβρικό τύπο δεν είναι συναρτήσεις, εκτός αν η μαθηματική κοινότητα τις έχει κηρύξει ως συναρτήσεις με το να τους δώσει ένα όνομα ή μια ειδική αναφορά. (Αυτό φάνηκε στις απαντήσεις της ερώτησης 2). Άλλοι σπουδαστές (περίπου τα 2/5) πιστεύουν πως η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης πρέπει να είναι κανονική, να αυξάνει μέσα σε λογικά πλαίσια κ.α. (Αυτό φάνηκε στις απαντήσεις της ερώτησης 3.) Έτσι, πολλοί σπουδαστές που όρισαν τη «συνάρτηση» σωστά δεν χρησιμοποιούσαν τον ορισμό της όταν απαντούσαν τις ερωτήσεις 1-3. **Μόνο το ένα τρίτο των σπουδαστών που έδωσαν το σωστό ορισμό της συνάρτησης απάντησε επίσης σωστά στις ερωτήσεις 1-3**. Κανένας σπουδαστής από αυτούς που έδωσαν λανθασμένο ορισμό δεν απάντησε στις ερωτήσεις 1-3 σωστά.

Ας θεωρήσουμε τώρα την έννοια της εφαπτομένης. Συνήθως παρουσιάζεται στους μαθητές κατά τη διάρκεια μαθημάτων γεωμετρίας και μάλιστα στο κεφάλαιο του κύκλου. Ο ορισμός μιας εφαπτομένης ενός κύκλου είναι εύκολος και η οπτική της αναπαράσταση είναι η ακόλουθη:



Σχήμα 8: Μια εφαπτομένη σε έναν κύκλο

Αυτή η εικόνα μπορεί να χρησιμεύσει ως μέσο για να κατασκευαστεί μια εικόνα έννοιας της εφαπτομένης και σε άλλες περιπτώσεις όπως:

Σχήμα 9: Μια διανοητική εικόνα για μια εφαπτομένη

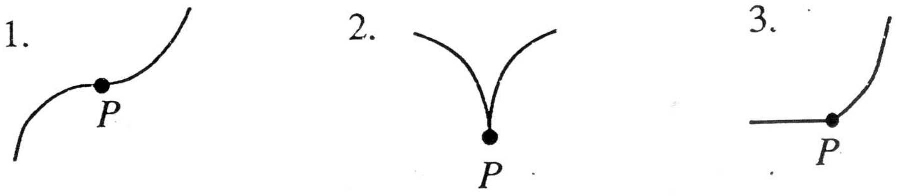
Στους μαθητές που παίρνουν το μάθημα της Ανάλυσης δίνεται συνήθως ένας τυπικός ορισμός της εφαπτομένης σε μια γραφική παράσταση μιας διαφορίσιμης συνάρτησης. Εντούτοις, η εικόνα της έννοιας, που οικοδομούν από την εμπειρία σχημάτων (όπως τα σχήματα 9 και 10) μπορεί να συμπεριλάβει τα απαραίτητα τα οποία ενισχύουν το ότι μια εφαπτομένη μπορεί να συναντήσει την καμπύλη μόνο σε ένα σημείο και δε διασχίζει την καμπύλη σε εκείνο το σημείο. Όπως θα δούμε, μια τέτοια εικόνα έννοιας μπορεί να οδηγήσει τους σπουδαστές να σχεδιάσουν μια γραμμή η οποία δεν είναι εφαπτομένη στο ζητούμενο σημείο, έχει όμως, τις γενικές ιδιότητες της εικόνας έννοιας. Το ακόλουθο ερωτηματολόγιο δόθηκε σε 278 πρωτοετείς φοιτητές που παρακολουθούσαν μαθήματα ανάλυσης .

Έστω οι ακόλουθες τρεις καμπύλες. Σε καθεμιά είναι σημειωμένο ένα σημείο P. Δίπλα σε καθένα από αυτά υπάρχουν τρεις δηλώσεις. Κυκλώστε τη δήλωση που σας φαίνεται αληθής και ακολουθήστε την οδηγία εντός της παρένθεσης.

Α. Στο σημείο P είναι δυνατό να σχεδιαστεί ακριβώς μια εφαπτομένη στην καμπύλη. (Σχεδιάστε τη).

Β. Στο σημείο P είναι δυνατό να σχεδιαστούν περισσότερες από μια εφαπτόμενες. (Συγκεκριμενοποιήστε πόσες, μια, δυο, τρεις, άπειρες. Σχεδιάστε όλες τις εφαπτόμενες σε περίπτωση που ο αριθμός τους είναι πεπερασμένος και κάποιες από αυτές σε περίπτωση που είναι άπειρες).

Γ. Είναι αδύνατον να σχεδιάσουμε εφαπτόμενη στην καμπύλη η οποία να διέρχεται από το P.



Σχήμα 10: Ποιες γραφικές παραστάσεις έχουν εφαπτομένη στο P ;

4. Ποιος είναι ο ορισμός της εφαπτομένης όπως τον θυμάστε από τις τελευταίες ή και τις προηγούμενες σειρές μαθημάτων; Εάν δεν θυμάστε τον ορισμό της εφαπτομένης προσπαθήστε να βρείτε τον ορισμό μόνοι σας.

Οι καμπύλες 1., 2. και 3. είναι οι γραφικές παραστάσεις $y = x^3$, $y = \sqrt{|x|}$ και $y = x^2$, αν $x \geq 0$ ενώ αν $x < 0$ τότε $y = 0$, αντίστοιχα. Αυτό όμως δεν δινόταν στους σπουδαστές. Μόνο το 41% των σπουδαστών έδωσε ως απάντηση στην ερώτηση 4 τον ορισμό που είχε παρουσιαστεί στα μαθήματα. Το 35% έδωσε περιγραφές που ταιριάζουν στην περίπτωση της εφαπτομένης σε έναν κύκλο. Ισχυρίστηκαν ότι μια εφαπτομένη αγγίζει την καμπύλη αλλά δεν την διατέμνει, ή ότι συναντά την καμπύλη αλλά δεν την κόβει, ή ότι έχει ένα κοινό σημείο με την καμπύλη αλλά αυτό βρίσκεται προς το ένα μέρος της καμπύλης. Οι υπόλοιποι δεν έδωσαν κανέναν ορισμό ή έγραψαν ορισμούς άνευ σημασίας. Οι εικόνες έννοιας των σπουδαστών εκφράστηκαν στις απαντήσεις των ερωτήσεων 1, 2, 3, και δίνονται στους ακόλουθους πίνακες:

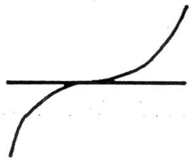
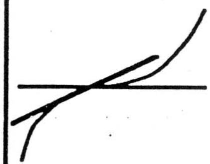
A	B	C	D	E
 The right answer	 A generic tangent	 two tangents	Another drawing	No drawing
18%	38%	6%	10%	28%

Table I : Distribution of student drawings to question 1 (N=278)

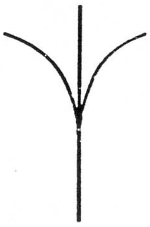
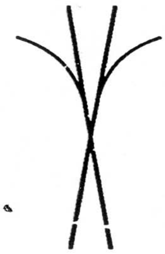
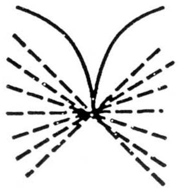
A	B	C	D	E
 The right answer	 two tangents	 infinitely many tangents	 A 'balance' tangent	No drawing
8%	18%	18%	14%	42%

Table II : Distribution of student drawings to question 2 (N=278)

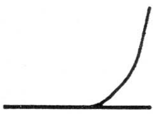
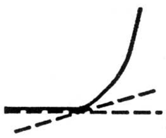
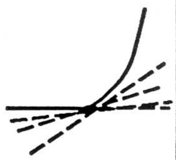
A	B	C	D	E	F
 The right answer	 A generic tangent	 two tangents	 Infinitely many tangents	Another drawing	No drawing
12%	33%	16%	7%	4%	27%

Table III : Distribution of student drawings to question 3 (N=278)

Μερικές από τις ζωγραφιές είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρουσες. Παραδείγματος χάριν, στο 1B, 2B και 3B οι φοιτητές προσπαθούν να εξαναγκάσουν τη γραφική παράσταση να συναντήσει την εικόνα που προκύπτει από την εφαπτομένη στον κύκλο. Οι 1B και 3B φαίνεται να είναι κλασικές «γενικές εφαπτόμενες» που παράγονται από την εικόνα έννοιάς τους, η 2D είναι μια γενίκευση στην οποία η «εφαπτομένη» προσπαθεί να ισορροπήσει. Στο 1C, 2D (το κατώτατο σχέδιο) και στο 3C υπάρχει ένα άλλο φαινόμενο. Μπορεί να οφείλεται στην παλαιά εικόνα έννοιας (μια εφαπτομένη σε έναν κύκλο) και στη νέα εικόνας έννοιας (που κατασκευάστηκε από τον ορισμό των μαθημάτων) που δρουν ταυτόχρονα στο μυαλό του σπουδαστή. Είναι ένα πολύ γνωστό φαινόμενο στην επιστήμη μάθησης όπου, αρκετά συχνά, τα παλαιά σχήματα συνυπάρχουν μαζί με τα νέα στη σκέψη του μαθητή. Στις 2C και 3D οι φοιτητές ακόμα εφευρίσκουν και την περίπτωση απείρως πολλών εφαπτομένων, από τη μια πλευρά, προκειμένου να συναντήσουν την παλαιά εικόνα που είχαν διαμορφωμένη από τον κύκλο και από την άλλη μεριά, συνειδητοποιώντας ότι δεν υπάρχει κανένας λόγος να προτιμήσουν μια «εφαπτομένη», σχεδιασμένη σύμφωνα με την παλαιά εικόνα, από άλλες, απείρως πολλές «εφαπτόμενες». Σε αντίθεση με αυτούς τους φοιτητές, υπάρχουν κάποιοι οι οποίοι στην 2D (το πρώτο σχήμα) και στην 3B φαίνεται να προτιμούν ένα είδος συμμετρίας και έτσι αρκούνται σε μια μόνο εφαπτομένη ή θεωρούν ως αφετηρία ότι πρέπει να υπάρχει μόνο μια εφαπτομένη και επομένως συμπεραίνουν ότι θα πρέπει να είναι μια που έχει και συμμετρία.

Στις δύο έννοιες που συζητήσαμε παραπάνω υπάρχει μια σύγκρουση μεταξύ του τυπικού ορισμού και των τυπικών παραδειγμάτων της έννοιας, η οποία μπορεί να προκαλέσει μια λανθασμένη εικόνα της έννοιας. Τα συμπεράσματα δείχνουν ότι, παρά την έμφαση που δόθηκε στους ορισμούς των εννοιών, πολλοί μαθητές δεν τους χρησιμοποίησαν κατά την εργασία τους σε θέματα, στα οποία οι τυπικοί ορισμοί θα έπρεπε να είχαν χρησιμοποιηθεί.

(Η ενότητα αυτή αποτελεί απόδοση ελεύθερη απόδοση τμήματος της εργασία του S. Vinner:

The role of definitions in the teaching and learning of Mathematics. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, (pp. 65-81). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.)

3. Η ΣΗΜΑΣΙΑ ΤΩΝ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΔΟΜΗΣΗ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΣΚΕΨΗΣ

Σύμφωνα με τον D.Tall μπορούμε να διακρίνουμε τρεις κόσμους που αφορούν στον τρόπο προσέγγισης των Μαθηματικών. Δηλαδή, τρεις κόσμους μαθηματικής σκέψης. Τον **ενσαρκωμένο (embodied)**, τον **διαδικασιοεννοιολογικό (proceptual)** και τον **αξιωματικό (axiomatic)** κόσμο. Ο ενσαρκωμένος κόσμος βασίζεται στις αισθήσεις και στη δράση και αποτελεί τον αρχικό μαθηματικό τρόπο σκέψης. Στα πλαίσια αυτού του κόσμου αρχίζει ο μαθητής να μαθαίνει και να σκέπτεται Μαθηματικά. Ο διαδικασιοεννοιολογικός κόσμος είναι ο κόσμος των συμβόλων και των διαδικασιών. Στα πλαίσια αυτού του κόσμου ο μαθητής κατανοεί τις έννοιες μέσα από τις διαδικασίες που εκτελεί με την χρήση των μαθηματικών συμβόλων και αυτό αποτελεί το δεύτερο στάδιο της εξέλιξης της μαθηματικής σκέψης του μαθητή. Ο αξιωματικός κόσμος είναι το τρίτο στάδιο. Είναι ο κόσμος στον οποίο τα Μαθηματικά αποτελούν ένα πλήρες οικοδόμημα που έχει ως βάση ορισμένα αξιώματα και πρωταρχικές έννοιες. Με τη χρήση αυτών, ορίζονται νέες έννοιες και αποδεικνύονται οι πρώτες μαθηματικές προτάσεις. Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τα αξιώματα και τις αποδειχθείσες προτάσεις αποδεικνύονται νέες προτάσεις κ.ο.κ. Έτσι οικοδομείται ο αξιωματικός κόσμος, που αποτελεί και το ανώτερο στάδιο της μαθηματικής σκέψης. Οι δύο πρώτοι κόσμοι, ο ενσαρκωμένος και ο διαδικασιοεννοιολογικός, είναι οι κόσμοι που κυριαρχούν στην πρωτοβάθμια και στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση αντίστοιχα. Το πέρασμα από τον ενσαρκωμένο τρόπο σκέψης στον διαδικασιοεννοιολογικό γίνεται σταδιακά. Οι δύο κόσμοι συνυπάρχουν μέχρις ότου να φτάσει ο μαθητής να κατακτήσει τον διαδικασιοεννοιολογικό τρόπο σκέψης σε τέτοιο βαθμό, ώστε να θεωρείται ότι δεν του χρειάζεται ο προηγούμενος. Έτσι ο ενσαρκωμένος τρόπος σκέψης παύει να χρησιμοποιείται, σταδιακά εξασθενεί και ουσιαστικά εξαφανίζεται. Ο αξιωματικός τρόπος σκέψης αρχίζει να διαμορφώνεται στο Λύκειο και ολοκληρώνεται στο Πανεπιστήμιο.

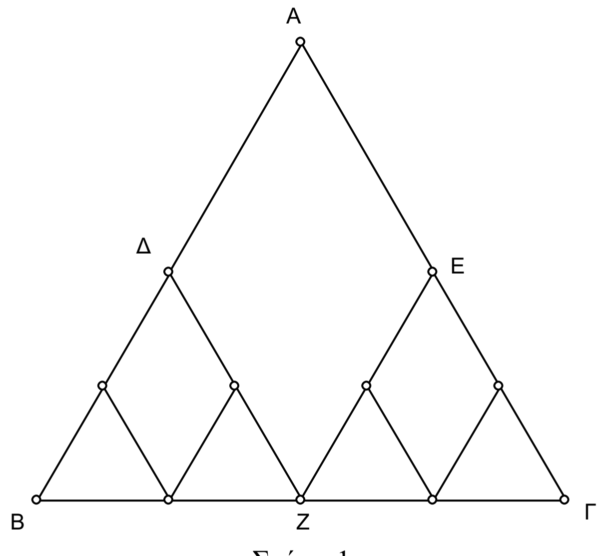
Ο ενσαρκωμένος τρόπος σκέψης, όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, βασίζεται στις αισθήσεις και στη δράση. Ο μαθητής σκέφτεται Μαθηματικά, ενεργώντας σε κάτι που μπορεί να αντιληφθεί με τις αισθήσεις του. Οι εικονικές αναπαραστάσεις, οπτικές ή νοερές, αποτελούν σημαντικά εργαλεία στα πλαίσια αυτού του κόσμου. Υπάρχει σημαντική βιβλιογραφία που αφορά στη σημασία αυτών των αναπαραστάσεων στη διδασκαλία των Μαθηματικών και γενικότερα στη μαθηματική σκέψη, καθώς και στα προβλήματα που συνδέονται με αυτές.

Ο ενσαρκωμένος τρόπος σκέψης στη σχολική εκπαίδευση χρησιμοποιείται κυρίως για την εισαγωγή μαθηματικών εννοιών στο δημοτικό σχολείο. Στο γυμνάσιο χρησιμοποιείται ελάχιστα, κυρίως μέσα από τις γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων, χωρίς να παίζει σημαντικό ρόλο. Ελάχιστες φορές ζητείται από τον μαθητή να λύσει προβλήματα στηριζόμενος σε γραφικές παραστάσεις και ακόμη λιγότερες να συνδυάσει τον διαδικασιοεννοιολογικό τρόπο σκέψης που κυρίως χρησιμοποιεί με τον ενσαρκωμένο, δουλεύοντας πάνω στο ίδιο θέμα. Η αντίληψη που κυριαρχεί είναι ότι ο μαθητής πρέπει να μάθει να σκέφτεται χρησιμοποιώντας μόνο τις συμβολικές αναπαραστάσεις, δηλαδή μόνο τα τυπικά μαθηματικά. Έτσι, όπως προαναφέρθηκε, σταδιακά εξασθενεί στους μαθητές η δυνατότητα σκέψης στα πλαίσια του ενσαρκωμένου κόσμου και πρακτικά εξαφανίζεται. Ένα μεγάλο ποσοστό των μαθητών του λυκείου δεν μπορεί να χρησιμοποιήσει αυτό τον τρόπο σκέψης. Έχει περάσει πλήρως στον διαδικασιοεννοιολογικό τρόπο σκέψης και δεν έχει την ικανότητα να τον συνδέσει με τον ενσαρκωμένο.

Η ΣΗΜΑΣΙΑ ΚΑΙ ΤΑ ΟΡΙΑ ΤΟΥ ΕΝΣΑΡΚΩΜΕΝΟΥ ΤΡΟΠΟΥ ΣΚΕΨΗΣ

Το ερώτημα που τίθεται είναι αν η αδυναμία των μαθητών να συνδυάσουν τον διαδικασιοεννοιολογικό και τον ενσαρκωμένο τρόπο σκέψης δημιουργεί προβλήματα στην περαιτέρω ανάπτυξη της μαθηματικής τους σκέψης. Πιστεύουμε ότι για να αναπτυχθεί ουσιαστικά η μαθηματική σκέψη του μαθητή και να περάσει σε ένα ανώτερο επίπεδο, πρέπει αυτός να μπορεί να συνδυάζει τον ενσαρκωμένο και τον διαδικασιοεννοιολογικό τρόπο σκέψης. Πρέπει να είναι σε θέση να μελετά τις εικόνες και να καταλαβαίνει τι "λένε". Πρέπει να μπορεί να μετατρέπει τις συμβολικές σχέσεις σε εικόνες και να μεταφράζει τις εικόνες σε συμβολικά Μαθηματικά. Η μετάβαση από τα σύμβολα στις εικόνες, δηλαδή η ενσάρκωση του αφηρημένου σε συγκεκριμένο, του δίνει τη δυνατότητα να κατανοήσει καλύτερα το αφηρημένο και να σκεφτεί πάνω σε κάτι που βλέπει. Η δυνατότητα μετάφρασης από τις εικόνες στα σύμβολα είναι απαραίτητη γιατί μόνον έτσι, δηλαδή μέσα από την αυστηρά τυπική απόδειξη, κατοχυρώνεται και γίνεται αποδεκτή μια Μαθηματική αλήθεια. Συμπεράσματα που στηρίζονται αποκλειστικά στην εικόνα, όπως είδαμε παραπάνω, είναι δυνατόν να είναι εσφαλμένα. Ένα απλό αλλά χαρακτηριστικό παράδειγμα τέτοιου σφάλματος είναι και το επόμενο:

Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ θεωρούμε τα μέσα των πλευρών του και κατασκευάζουμε τα τρίγωνα ΒΔΖ και ΔΕΓ. Έστω α_1= ΒΔ+ΔΖ+ΖΕ+ΕΓ. Στα τρίγωνα ΒΔΖ και ΖΕΓ εφαρμόζουμε την ίδια διαδικασία, κατασκευάζουμε τέσσερα τρίγωνα και θέτουμε α_2 το άθροισμα των αντίστοιχων οκτώ πλευρών (Σχήμα 1). Συνεχίζοντας αυτή τη διαδικασία κατασκευάζουμε μια ακολουθία α_n: n=1,2,....Η ερώτηση είναι που τείνει η ακολουθία α_n. Η εικόνα μπορεί να μας οδηγήσει στο συμπέρασμα ότι η ακολουθία α_n συγκλίνει στο μήκος του ΒΓ. Εύκολα όμως αποδεικνύεται ότι α_n= ΑΒ+ΑΓ για κάθε n=1,2,...., δηλαδή ότι η ακολουθία είναι σταθερή. Άρα συγκλίνει στη σταθερή τιμή της που προφανώς δεν είναι ίση με αυτή που καταλήξαμε εποπτικά.



Σχήμα 1

ΧΡΗΣΗ ΤΩΝ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΗ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

Πως μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι αναπαραστάσεις στη διδασκαλία των Μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, ώστε συντελέσουν στη βελτίωση της μαθηματικής σκέψης του μαθητή; Θα αναφέρουμε τέσσερις γενικές περιπτώσεις χρήσης των αναπαραστάσεων στη διδασκαλία των Μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Ι. Χρήση των αναπαραστάσεων για την κατανόηση μαθηματικών εννοιών.

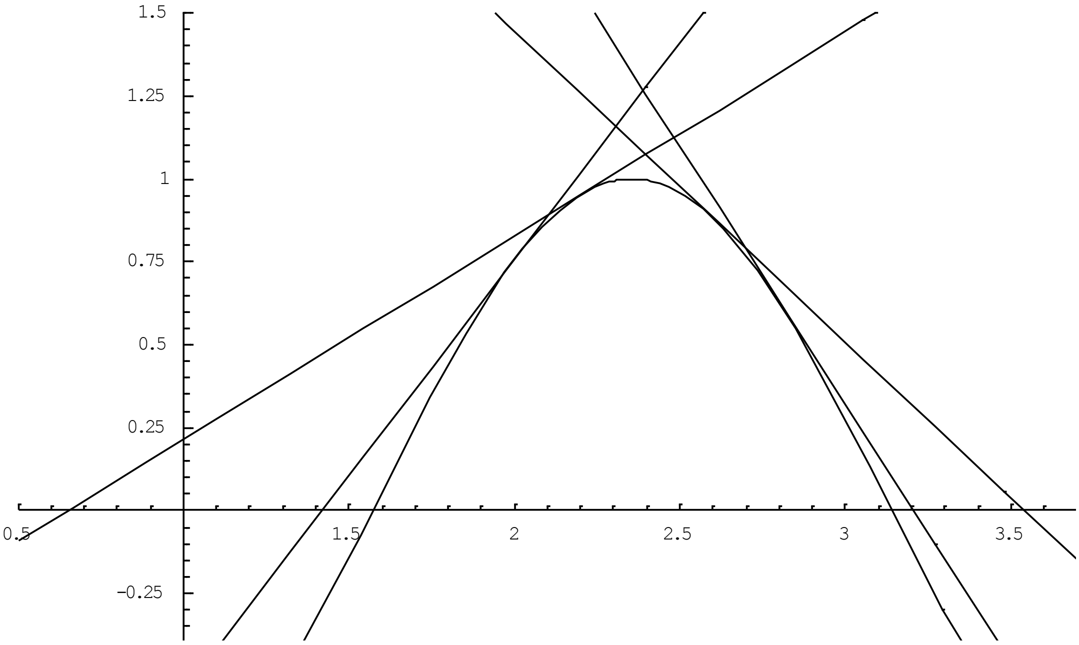
Οι μαθηματικές έννοιες, αν εξαιρέσουμε τις γεωμετρικές, είναι έννοιες αφηρημένες. Οι ορισμοί τους δίνονται με μαθηματικά σύμβολα και η κατανόηση τους από τον μαθητή είναι πολλές φορές ελλιπής. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την αδυναμία ή τη λανθασμένη χρήση τους στη λύση ασκήσεων. Η δυνατότητα ενσάρκωσης αυτών των ορισμών, δηλαδή η δυνατότητα αναπαράστασης τους με τρόπο ώστε να γίνουν κατανοητοί μέσω των αισθήσεων, μπορεί να βοηθήσει το μαθητή να τους κατανοήσει καλύτερα και να τους χρησιμοποιεί σωστά. Ένα παράδειγμα έννοιας που δημιουργεί προβλήματα στους μαθητές και εισάγεται στις πρώτες τάξεις του Γυμνασίου, είναι η έννοια της απόλυτης τιμής. Ο τυπικός ορισμός μαθαίνεται από τους μαθητές με έναν μάλλον μηχανιστικό τρόπο και αυτό πολλές φορές τους οδηγεί σε λάθη. Επίσης τους εμποδίζει να κατανοήσουν πιο δύσκολες έννοιες που θα συναντήσουν αργότερα και που η απόλυτη τιμή παίζει καθοριστικό ρόλο στον ορισμό τους, όπως είναι η έννοια του ορίου.

Αντίθετα, αν ο μαθητής έχει κατανοήσει την αναπαράσταση των πραγματικών αριθμών σε έναν άξονα και αντιληφθεί την απόλυτη τιμή ενός αριθμού ως την απόσταση του από το μηδέν, καθώς και την απόλυτη τιμή της διαφοράς δύο αριθμών ως την απόσταση τους πάνω στον άξονα, θα έχει τη δυνατότητα να βλέπει θέματα που συνδέονται με την απόλυτη τιμή και από μια γεωμετρική οπτική. Αυτή η οπτική θα του φανεί ιδιαίτερα χρήσιμη σε πολλές περιπτώσεις.

ΙΙ. Χρήση αναπαραστάσεων για τη δημιουργία εικασιών.

Ο ρόλος των εικασιών στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης είναι πολύ σημαντικός. Για να αποδείξουμε μια μαθηματική πρόταση πρέπει πρώτα να προκύψει αυτή ως εικασία. Δηλαδή, μετά από κατάλληλες σκέψεις να οδηγηθούμε στο συμπέρασμα ότι είναι πολύ πιθανόν να ισχύει η συγκεκριμένη πρόταση. Η δημιουργία εικασιών απουσιάζει πλήρως από τη διδασκαλία των Μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Δεν φαίνεται η διαδικασία μέσα από την οποία προέκυψε η διατύπωση των προτάσεων και των θεωρημάτων. Με ποιο τρόπο όμως μπορεί να αναπτυχθεί μέσα στη τάξη ένας προβληματισμός που θα οδηγήσει στη διατύπωση της εικασίας; Σε αυτό μπορεί να παίξουν σημαντικό ρόλο οι αναπαραστάσεις. Ιδιαίτερα σήμερα, με τη χρήση των νέων τεχνολογιών, αυτό μπορεί να γίνει με πολύ καλύτερους όρους.

Αναφέρουμε για παράδειγμα ένα σημαντικό θεώρημα της Μαθηματικής Ανάλυσης που συμπεριλαμβάνεται στην ύλη του λυκείου. Είναι το θεώρημα που συνδέει τη μονοτονία μιας διαφορίσιμης συνάρτησης με το πρόσημο της πρώτης παραγώγου της. Αυτό το θεώρημα συνήθως διατυπώνεται χωρίς απόδειξη και χρησιμοποιείται για τη μελέτη συναρτήσεων. Πως, όμως, σκεφτήκαμε ότι ίσως συνδέεται η μονοτονία μιας διαφορίσιμης συνάρτησης με το πρόσημο της παραγώγου της και οδηγηθήκαμε στη διατύπωση του συγκεκριμένου θεωρήματος; Αυτό το βήμα, όπως τονίστηκε και προηγουμένως, είναι ένα πολύ σημαντικό βήμα για την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης του μαθητή και είναι ένα βήμα που μπορεί να γίνει στα πλαίσια της διδασκαλίας των Μαθηματικών στο Λύκειο. Στο παράδειγμα που διαπραγματευόμαστε, η μελέτη της κίνησης της εφαπτομένης πάνω στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης (σχήμα 2) μπορεί να οδηγήσει στην παρατήρηση ότι στα διαστήματα που η συνάρτηση είναι αύξουσα (αντ. φθίνουσα) η εφαπτομένη σχηματίζει οξεία (αντ. αμβλεία) γωνία με τον άξονα xx'. Αυτή η μελέτη μπορεί να γίνει πολύ καλύτερα με τη χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή, όπου ο μαθητής μπορεί να βλέπει την κίνηση της εφαπτομένης.



Σχήμα 2

Η παραπάνω παρατήρηση οδηγεί στη σύνδεση της μονοτονίας με την παράγωγο. Στη συνέχεια με ποιο προσεκτική μελέτη γραφημάτων και με κατάλληλες ερωτήσεις που τίθενται από τον καθηγητή μπορεί να δημιουργηθεί η εικασία: Αν η παράγωγος μιας διαφορίσιμης συνάρτησης είναι θετική (αντ. αρνητική) σε ένα διάστημα τότε η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα (αντ. γνησίως φθίνουσα) σε αυτό το διάστημα.

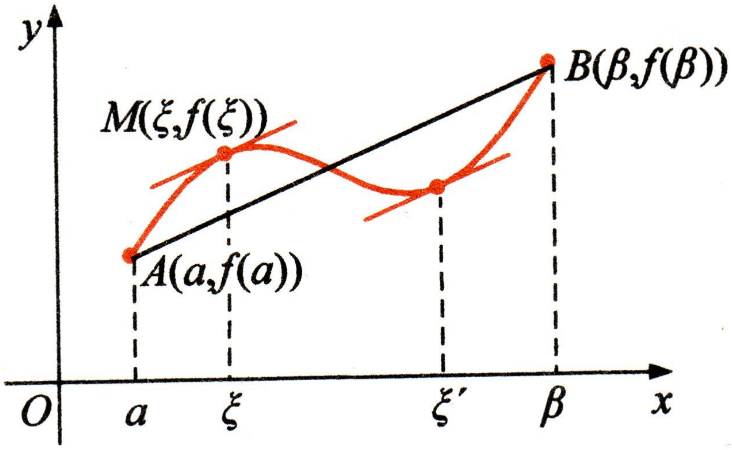
Η μελέτη και η προσεκτική παρατήρηση ειδικών περιπτώσεων στη μαθηματική έρευνα πολλές φορές οδήγησε στη διατύπωση σημαντικών γενικών εικασιών που εν συνεχεία αποδείχθηκαν. Η μελέτη που περιγράψαμε παραπάνω είναι τέτοιας μορφής. Η εφαρμογή τέτοιων διαδικασιών στη διδασκαλία των Μαθηματικών, όχι μόνο στο Λύκειο αλλά και σε μικρότερες τάξεις, αναπτύσσει τη μαθηματική σκέψη του μαθητή. Για να είναι όμως αποτελεσματικές διαδικασίες αυτού του τύπου, πρέπει ο μαθητής να έχει τη δυνατότητα να σκέφτεται πάνω στα σχήματα και να μπορεί να μεταφράζει τα συμπεράσματα σε συμβολικά μαθηματικά.

ΙΙΙ. Χρήση των αναπαραστάσεων για την περιγραφή Μαθηματικών συμπερασμάτων.

Μια μαθηματική πρόταση διατυπώνεται σε καθαρά συμβολική μορφή. Η διατύπωση αυτή πολλές φορές φαίνεται δυσνόητη και ξένη στον μαθητή. Η ενσάρκωση αυτής της πρότασης, δηλαδή η περιγραφή της με μια εικονική αναπαράσταση, μπορεί να βοηθήσει στην καλύτερη κατανόηση της. Ένα κλασσικό παράδειγμα είναι το επόμενο θεώρημα, γνωστό ως θεώρημα της Μέσης Τιμής:

“ Αν f:[a, b] $\rightarrow$ **R** συνάρτηση συνεχής στο [a, b] και διαφορίσιμη στο (a, b) τότε υπάρχει $\xi \in$ (a, b) ώστε f(ξ) = $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. ”

Η γεωμετρική αναπαράσταση του θεωρήματος (σχήμα 3) βοηθάει τον μαθητή να καταλάβει τι ουσιαστικά “λέει” το θεώρημα.



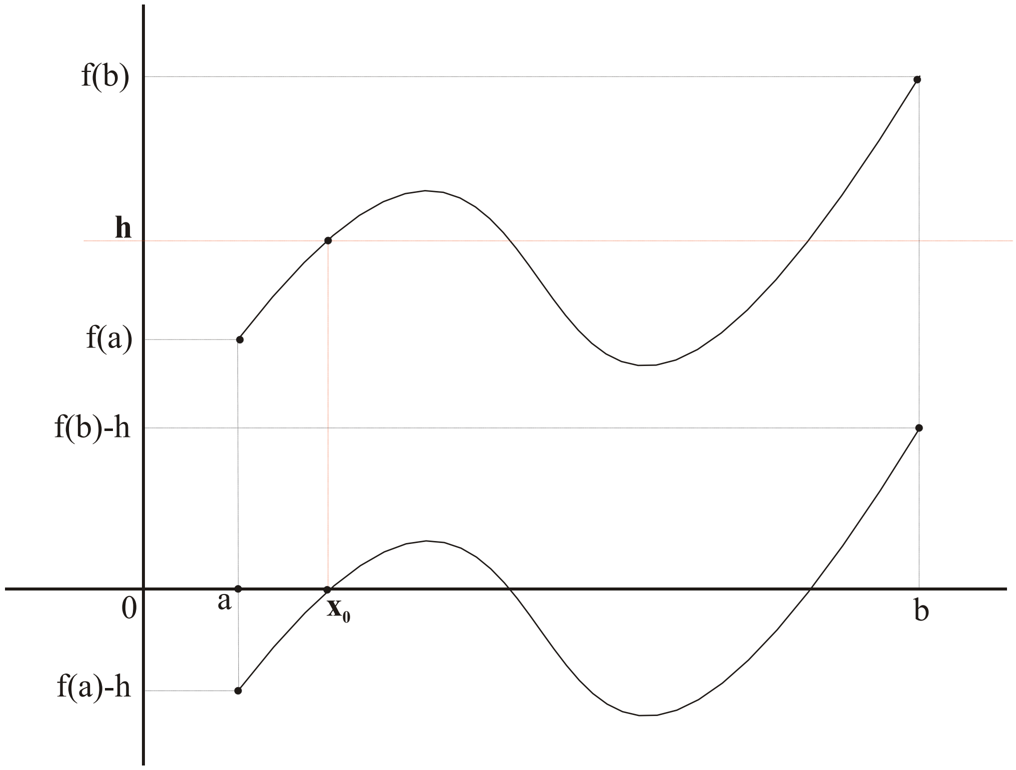
Σχήμα 3

IV. Χρήση των αναπαραστάσεων για την περιγραφή διαδικασιών και αποδείξεων.
Πολλές φορές διαδικασίες ή αποδείξεις φαίνονται στους μαθητές περίεργες. Δεν μπορούν να καταλάβουν τι "λένε" και έτσι δεν μπορούν να τις μάθουν. Αυτό αφορά στις, θεωρούμενες από τους μαθητές, δύσκολες αποδείξεις. Αλλά και όσον αφορά σε διαδικασίες ή αποδείξεις που οι μαθητές τις θεωρούν εύκολες, πολλές φορές αυτό που μπορούν είναι απλώς να τις εφαρμόζουν ή να τις αναπαράγουν όταν τους ζητηθεί. Δεν έχουν κατανοήσει όμως την ουσία τους. Δεν έχουν καταλάβει την ουσιαστική μαθηματική ιδέα που κρύβεται πίσω από τη φορμαλιστική παρουσίαση. Η δυνατότητα περιγραφής τέτοιων διαδικασιών ή αποδείξεων με οικίες στο μαθητή αναπαραστάσεις τον βοηθάει στη κατανόηση τους. Ένα παράδειγμα μια τέτοιας απόδειξης είναι η απόδειξη του θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών:
" Αν $f:[a, b] \to \mathbf{R}$ συνεχής συνάρτηση και $f(a) < h < f(b)$ τότε υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ ώστε $f(x_0) = h$."

Η απόδειξη του θεωρήματος αυτού, η οποία υπάρχει στα σχολικά βιβλία, προκύπτει εύκολα από την ειδική περίπτωση για h=0, η οποία είναι γνωστή ως θεώρημα του Bolzano και υπάρχει στα σχολικά βιβλία χωρίς απόδειξη.

Πράγματι, αν θέσουμε $g:[a, b] \to \mathbf{R}$, με $g(x)=f(x)-h$ για κάθε $x \in [a, b]$, είναι πολύ εύκολο να διαπιστώσουμε ότι η συνάρτηση g ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Bolzano. Συνεπώς υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ ώστε $g(x_0)=0$. Άρα $f(x_0)=η$.

Η παραπάνω απόδειξη είναι μια απλή απόδειξη που δεν δημιουργεί πρόβλημα στους μαθητές. Πόσοι όμως από αυτούς κατανοούν την ουσία της; Πόσοι κατανοούν ότι κάνουμε μια μεταφορά της συνάρτησης g, ώστε να ικανοποιηθούν οι προϋποθέσεις για να εφαρμοστεί το θεώρημα του Bolzano; Η περιγραφή όμως της παραπάνω απόδειξης με το σχήμα 4 ή, πολύ καλύτερα, με τη χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή όπου θα φαίνεται η κίνηση, ενσαρκώνει αυτή την ιδέα.



Σχήμα 4

Οι αναπαραστάσεις που αναφέραμε παραπάνω είναι όλες γεωμετρικές αναπαραστάσεις. Δηλαδή έχουν ένα άμεσα μαθηματικό περιεχόμενο. Η ενσάρκωση όμως μιας μαθηματικής ιδέας δεν γίνεται μόνο μέσα από τέτοιου τύπου αναπαραστάσεις. Υπάρχουν και αναπαραστάσεις που δεν έχουν άμεση σχέση με τα Μαθηματικά, αλλά μπορούν να βοηθήσουν στη κατανόηση μαθηματικών ιδεών. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι το επόμενο. Τοποθετούμε στη σειρά και σε όρθια θέση τα πλακίδια του γνωστού παιχνιδιού "ντόμινο", ώστε η απόσταση κάθε ενός από το επόμενο του να είναι μικρότερη του ύψους τους. Αν ρίξουμε το πρώτο πλακίδιο τότε θα πέσουν όλα. Γιατί συμβαίνει αυτό; Γιατί ισχύει ότι αν πέσει κάποιο θα πέσει και το επόμενο του, καθώς και ότι πέφτει το πρώτο. Αυτή είναι η αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής που πολλές φορές εφαρμόζουμε για να αποδείξουμε ότι μια σχέση ισχύει για όλους τους φυσικούς αριθμούς.

Πολλές φορές επίσης, σε μαθηματικές ιδιότητες δίνουμε μια ονομασία που παραπέμπει σε μια, μη μαθηματική, νοερή εικόνα που αναπαριστά αυτή την ιδιότητα. Έστω π.χ. η επόμενη ιδιότητα:

"Έστω α_n, β_n, γ_n τρεις ακολουθίες με $\alpha_n \leq \beta_n \leq \gamma_n$ για κάθε n=1,2,..... Αν $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \gamma_n = \alpha$ τότε και $\lim_{n\to\infty} \beta_n = \alpha$."

Ας φανταστούμε δύο αστυνομικούς οι οποίοι έχουν συλλάβει ένα κρατούμενο και τον κρατάνε από τη μια μεριά ο ένας και από την άλλη ο άλλος. Τότε όπου πάνε οι αστυνομικοί εκεί αναγκαστικά θα πάει και ο κρατούμενος. Αυτή η, μη μαθηματική, νοερή εικόνα αναπαριστά την παραπάνω μαθηματική ιδιότητα. Για αυτό το λόγο σε ορισμένα βιβλία αυτή η ιδιότητα ονομάζεται "αρχή των αστυνομικών".

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η χρήση κατάλληλων αναπαραστάσεων μπορεί να βοηθήσει ουσιαστικά τους μαθητές να κατανοήσουν μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες, να προβληματιστούν, να σκεφτούν και να οδηγηθούν σε εικασίες, να καταλάβουν ιδέες που κρύβονται μέσα σε τυπικές αποδείξεις Για να μπορέσει όμως ο μαθητής να κάνει ουσιαστική χρήση αυτών των αναπαραστάσεων πρέπει η διδασκαλία των Μαθηματικών στο σχολείο, ιδιαίτερα δε στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, να είναι τέτοια ώστε να συνδυάζει τον ενσαρκωμένο και τον διαδικασιοεννοιολογικό κόσμο σκέψης. Να εξασκήσει το μαθητή να χρησιμοποιεί και τους δύο κόσμους, να γνωρίζει τα όρια τους και να μπορεί να μεταβαίνει από τον ένα στον άλλο. Να είναι σε θέση να χρησιμοποιεί κάθε φορά αυτόν που είναι πιο πρόσφορος για να λύσει το πρόβλημα που αντιμετωπίζει, γνωρίζοντας όμως ότι η μαθηματική αλήθεια κατοχυρώνεται μόνο μέσα από τη τυπική απόδειξη. Τα παραπάνω θα συντελέσουν στο να οικοδομήσει ο μαθητής μια πραγματικά μαθηματική σκέψη.

4. ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΕΝΝΟΙΩΝ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΜΑΤΩΝ

.

Η διδασκαλία των εννοιών και των θεωρημάτων είναι ο ακρογωνιαίος λίθος μιας διδασκαλίας που έχει ως στόχο την εννοιολογική κατανόηση και την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης των μαθητών. Για αυτό θα ασχοληθούμε ιδιαίτερα με αυτό το θέμα.

Η διδασκαλία των Μαθηματικών, όπως τονίστηκε στην αρχή των σημειώσεων, πρέπει να γίνεται προσπάθεια να προσεγγίζει σε ικανοποιητικό βαθμό τους εξής δύο στόχους:

α) Να δείχνει στους μαθητές την εξέλιξη της μαθηματικής σκέψης που οδήγησε στο αποτέλεσμα.

β) Να δίνει στους μαθητές την δυνατότητα να συμμετέχουν ενεργά σε αυτή την εξέλιξη.

Στα επόμενα θα παρουσιαστεί μια πορεία διδασκαλίας που αφορά στις έννοιες και στα θεωρήματα και συνδέεται με την επίτευξη του πρώτου στόχου. Η πορεία αυτή γίνεται προσπάθεια να περιέχει αρκετά από τα στοιχεία που τονίστηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια και είναι κοινή στα πρώτα στάδια, διαφοροποιείται όμως στη συνέχεια ανάλογα με αν το αντικείμενο της διδασκαλίας είναι έννοια ή θεώρημα.

ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΕΝΝΟΙΩΝ

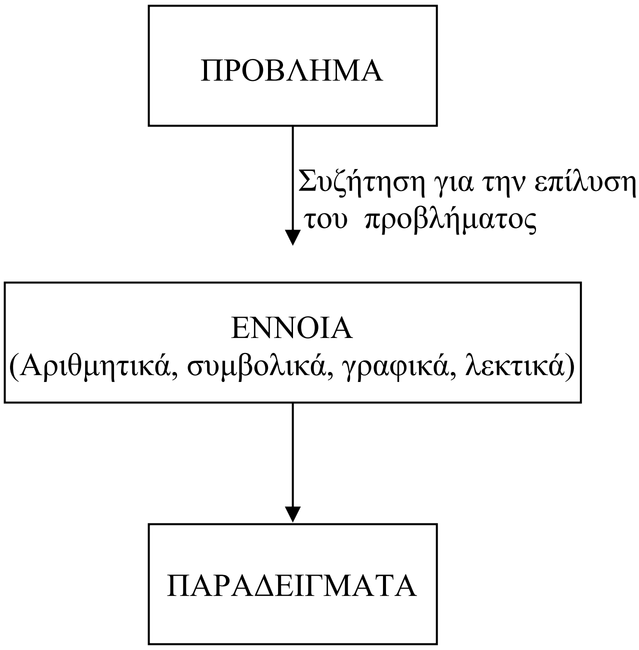
Όλα τα μαθηματικά αποτελέσματα, όπως τονίστηκε στην αρχή των σημειώσεων, έχουν αφετηρία τη λύση προβλημάτων. Συνεπώς η διδασκαλία για την εισαγωγή μιας θεμελιώδους έννοιας πρέπει να γίνεται προσπάθεια να αρχίζει με ένα πρόβλημα που δεν αντιμετωπίζεται με τις υπάρχουσες γνώσεις και που η προσπάθεια για τη λύση του θα οδηγήσει στην ανάγκη της εισαγωγής της έννοιας.

Όταν αντιμετωπίζουμε ένα πρόβλημα σκεφτόμαστε πως θα το λύσουμε. Συνεπώς το δεύτερο στάδιο της διδασκαλίας είναι η συζήτηση και ο προβληματισμός για την επίλυση του προβλήματος. Από τη συζήτηση αυτή θα προκύψει η ανάγκη εισαγωγής της νέας έννοιας.

Στο τρίτο στάδιο γίνεται συζήτηση για την μαθηματική διατύπωση της έννοιας και η περιγραφή της συμβολικά, γραφικά, λεκτικά. Αυτό θα βοηθήσει τον μαθητή στην ουσιαστική κατανόηση της έννοιας μέσα από το σχηματισμό σωστών εικόνων.

Στο τέταρτο στάδιο δίνονται παραδείγματα για την καλύτερη κατανόηση της έννοιας και την αποφυγή παρανοήσεων. Τα παραδείγματα που θα δοθούν πρέπει να έχουν συγκεκριμένο σκοπό. Ο διδάσκων, συνδυάζοντας τη διδακτική του εμπειρία του και τις θεωρητικές γνώσεις του σχετικά με τη συγκεκριμένη έννοια (ιστορικές, μαθηματικές, διδακτικές), πρέπει κατά την προετοιμασία της διδασκαλίας του να εντοπίσει πιθανά εμπόδια που θα αντιμετωπίσουν οι μαθητές στην κατανόηση της έννοιας, να τα αναδείξει στη διδασκαλία του και να βρει τα κατάλληλα παραδείγματα για να τα αντιμετωπίσει.

Το επόμενο διάγραμμα περιγράφει σχηματικά την παραπάνω διαδικασία:



ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΩΝ

Όπως και στη διδασκαλία εννοιών έτσι και στη διδασκαλία θεωρημάτων, πρέπει να γίνεται προσπάθεια να ξεκινήσουμε με ένα πρόβλημα που δεν λύνεται με τις γνώσεις που έχουν οι μαθητές μέχρι εκείνη τη στιγμή.
Όταν αντιμετωπίζουμε ένα πρόβλημα σκεφτόμαστε διάφορους τρόπους για να το προσεγγίσουμε. Συνεπώς, και εδώ το δεύτερο στάδιο είναι συζήτηση σχετικά με την αντιμετώπιση του προβλήματος. Η συζήτηση αυτή ενδεχομένως να οδηγήσει σε ένα άλλο μαθηματικό πρόβλημα (το αρχικό πρόβλημα μπορεί να μην είναι άμεσα μαθηματικό) και τελικά στη διαμόρφωση μιας εικασίας. Η εικασία αυτή, ή οποία μπορεί να είναι διατυπωμένη σε μια γενική μορφή, αν ισχύει θα βοηθήσει στη λύση του προβλήματος. Στη συνέχεια αναπτύσσεται ένας προβληματισμός που αφορά στην ισχύ της εικασίας. Ο προβληματισμός αυτός οδηγεί στην πιο προσεκτική διαμόρφωση της εικασίας, που αποτελεί ουσιαστικά το θεώρημα που έχουμε να αποδείξουμε, και στην πεποίθηση ότι αυτή ισχύει. Τότε φτάνουμε στο σημείο που διατυπώνουμε το θεώρημα και το αποδεικνύουμε, αν βέβαια η απόδειξη αυτή είναι στο αναλυτικό πρόγραμμα.
Μετά εξετάζουμε την αναγκαιότητα των υποθέσεων του θεωρήματος. Ένα θεώρημα έχει ορισμένες υποθέσεις και ένα συμπέρασμα. Οι υποθέσεις φαίνεται ότι χρειάζονται γιατί χρησιμοποιούνται στην απόδειξη του θεωρήματος. Το γεγονός ότι οι υποθέσεις αυτές απαιτούνται για μια απόδειξη του θεωρήματος δεν σημαίνει ότι είναι πραγματικά αναγκαίες για το συμπέρασμα. Ενδεχομένως να μπορούσαμε να καταλήξουμε στο ίδιο συμπέρασμα με μια άλλη απόδειξη, χρησιμοποιώντας λιγότερες υποθέσεις από αυτές που χρησιμοποιήσαμε. Για να είμαστε βέβαιοι ότι για να ισχύει το συμπέρασμα ενός θεωρήματος είναι απαραίτητη μια υπόθεση που έχουμε στη διατύπωση του, δηλαδή ότι αν αφαιρεθεί αυτή οι υπόλοιπες δεν επαρκούν για να ισχύει το συμπέρασμα, πρέπει για να βρούμε ένα αντιπαράδειγμα που ικανοποιεί όλες τις υποθέσεις εκτός από αυτή και το συμπέρασμα δεν ισχύει.

Προφανώς αυτό δεν σημαίνει ότι δεν μπορεί να υπάρχουν άλλες υποθέσεις που οδηγούν στο ίδιο συμπέρασμα.

Π.χ. το θεώρημα του Bolzano λέει ότι:

" Έστω συνάρτηση $f:[a, b] \rightarrow \mathbf{R}$. Αν η f είναι συνεχής και ισχύει $f(a).f(b) < 0$ τότε υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ ώστε $f(x_0) = 0$."

Οι υποθέσεις του θεωρήματος είναι η f να είναι συνεχής και οι τιμές της στα άκρα του διαστήματος να είναι ετερόσημες. Για να είμαστε σίγουροι ότι δεν αρκεί η μια από τις δύο υποθέσεις πρέπει να βρούμε δύο αντιπαράδειγματα. Ένα που ικανοποιείται μόνο η συνέχεια και δεν ισχύει το συμπέρασμα και ένα που ικανοποιείται μόνο η συνθήκη $f(a).f(b) < 0$ και δεν ισχύει το συμπέρασμα.

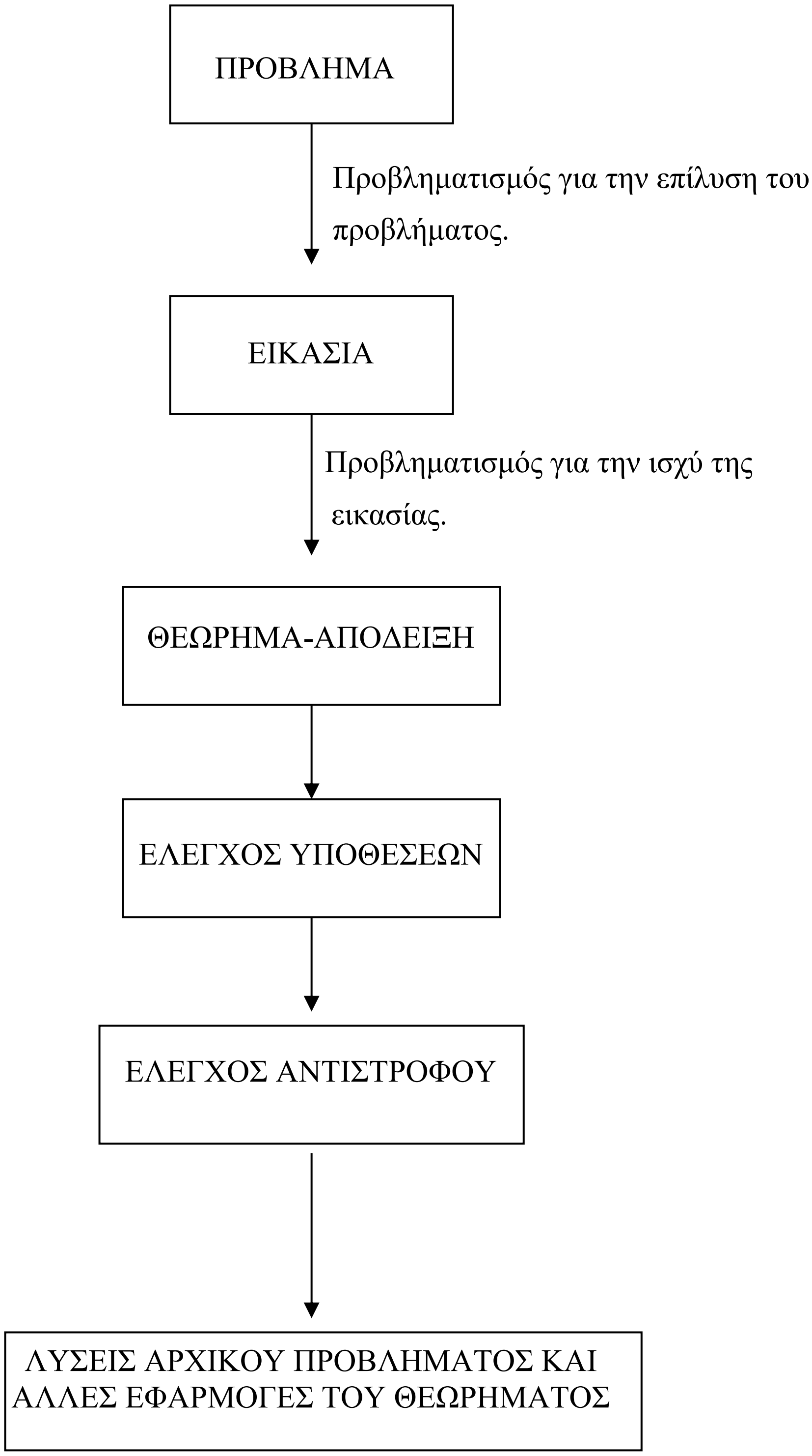
Ένα άλλο σημείο που παρουσιάζει ενδιαφέρον σε ένα θεώρημα είναι αν μια υπόθεση μπορεί να αντικατασταθεί με μια άλλη γενικώτερη. Π.χ. στο θεώρημα του Bolzano η συνάρτηση είναι ορισμένη σε κλειστό διάστημα. Αν το πεδίο ορισμού είναι ένα διάστημα, όχι υποχρεωτικά κλειστό, μπορούμε να έχουμε κάτι αντίστοιχο; Αν το πεδίο ορισμού είναι ένωση διαστημάτων τότε τι συμβαίνει; Τέτοιοι προβληματισμοί μπορούν να οδηγήσουν στη διαμόρφωση συγκεκριμένων προβλημάτων και γενικά βοηθούν τον μαθητή να αναπτύξει μια διερευνητική σκέψη.

Μετά τον έλεγχο της αναγκαιότητας των υποθέσεων ελέγχουμε την ισχύ ή όχι του αντιστρόφου. Και αυτό είναι ένα σημαντικό στοιχείο της μαθηματικής σκέψης το οποίο πολλές φορές αποτελεί την αρχή μιας πορείας που οδηγεί σε άλλα σημαντικά θεωρήματα.

Τέλος λύνουμε το αρχικό πρόβλημα, αν μπορεί να λυθεί, με το θεώρημα που αποδείξαμε και κάνουμε και άλλες εφαρμογές του. Μπορεί το θεώρημα που αποδείξαμε να μην λύνει το αρχικό πρόβλημα αλλά να αποτελεί ένα βήμα για την λύση του. Αυτό ενδεχομένως να δίνει τη δυνατότητα να συνεχιστεί ο προβληματισμός και να οδηγηθούμε και σε άλλα θεωρήματα. Επίσης οι εφαρμογές του θεωρήματος που θα γίνουν καθώς και οι ασκήσεις που θα δοθούν στο μαθητή για λύση πρέπει να είναι προσεκτικά επιλεγμένες να αναδεικνύουν τη σημασία του θεωρήματος και να έχουν συγκεκριμένο μαθηματικό ή διδακτικό στόχο.

Ορισμένες φορές η ουσιαστική μελέτη του θεωρήματος που αποδείξαμε μπορεί να θέσει νέα ερωτήματα που με τη σειρά τους να οδηγήσουν σε νέα θεωρήματα.

Το επόμενο διάγραμμα περιγράφει σχηματικά την παραπάνω διαδικασία.


ΠΡΟΒΛΗΜΑ
Προβληματισμός για την επίλυση του προβλήματος.
ΕΙΚΑΣΙΑ
Προβληματισμός για την ισχύ της εικασίας.
ΘΕΩΡΗΜΑ-ΑΠΟΔΕΙΞΗ
ΕΛΕΓΧΟΣ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ
ΕΛΕΓΧΟΣ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΥ
ΛΥΣΕΙΣ ΑΡΧΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΑΛΛΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ

Τα παραπάνω σχήματα για τη διδασκαλία εννοιών και θεωρημάτων είναι ενδεικτικά και οπωσδήποτε δεν έχουν καθολική εφαρμογή. Δίνουν όμως συγκεκριμένα στοιχεία για τη διδασκαλία που μπορεί να χρησιμοποιηθούν μεμονωμένα σε διάφορες περιπτώσεις.

Είναι σαφές ότι οι χρονικοί περιορισμοί αποτελούν έναν αντικειμενικό παράγοντα που, αν θέλουμε να είμαστε ρεαλιστές, δεν μπορεί να αγνοηθεί. Η ανάγκη της ολοκλήρωσης της ύλης αποτελεί εμπόδιο στην ανάπτυξη διδασκαλιών σαν αυτή που περιγράφεται παραπάνω. Μπορούμε όμως σε θεμελιώδεις έννοιες (όπως είναι π.χ. η έννοια του ορίου) και σε σημαντικά θεωρήματα ή ομάδες θεωρημάτων (όπως είναι π.χ. τα θεωρήματα Μέσης τιμής και το θεώρημα που συνδέει το πρόσημο της παραγώγου με την μονοτονία της συνάρτησης), αντί να εξαντλούμε το χρόνο διδασκαλίας για να μάθει ο μαθητής τεχνικές με τις οποίες θα λύνει πανομοιότυπες ασκήσεις, να ακολουθήσουμε μια τέτοια πορεία ώστε να δει ο μαθητής, όχι μόνο το αποτέλεσμα της μαθηματικής σκέψης, αλλά και την διαδικασία που οδηγεί σε αυτό.