

1. Ένας καθηγητής λύνει στον πίνακα το παρακάτω παράδειγμα υπολογισμού της παραγώγου:

Παράδειγμα 3

Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \eta\mu x, & x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$$

Λύση

- Για κάθε $x < 0$ ισχύει:

$$f'(x) = 2x + \sigma\upsilon\nu x$$

- Για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$f'(x) = 1$$

- Εξετάζουμε κατά πόσο η f παραγωγίζεται στο σημείο $x_0 = 0$.

Είναι:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + \eta\mu x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{x} + \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\eta\mu x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} x + \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\eta\mu x}{x} = 0 + 1 = 1 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

Επομένως, η f παραγωγίζεται στο σημείο $x_0 = 0$ με $f'(0) = 1$.

Έτσι,

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + \sigma\upsilon\nu x, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

Μετά την παραπάνω λύση που έγραψε ο καθηγητής στον πίνακα έγινε ο παρακάτω διάλογος:

Δημήτρης (μαθητής): Για $x=0$ η τιμή της συνάρτησης δίνεται από τον πρώτο κλάδο με τύπο $f(x) = x^2 + \eta\mu x$. Επειδή $(x^2 + \eta\mu x)' = 2x + \sigma\upsilon\nu x$, για $x=0$ έχουμε $2 \cdot 0 + \sigma\upsilon\nu 0 = 1$. Από αυτό δεν προκύπτει $f'(0) = 1$; Γιατί χρειάζεται να υπολογίσουμε τα πλευρικά όρια;

Καθηγητής: (απευθύνεται σε όλη την τάξη) Ποια είναι η γνώμη σας για αυτό που λέει ο Δημήτρης;

Ελένη (μαθήτρια): Δεν χρειάζεται να υπολογίσουμε τα πλευρικά όρια για να βρούμε την παράγωγο στο 0, αλλά αυτό που λέει ο Δημήτρης δεν είναι αρκετό. Η συνάρτηση ορίζεται στο 0 από τον ένα κλάδο αλλά πρέπει να βρούμε την παράγωγο των συναρτήσεων και των δύο κλάδων στο 0. Επειδή και ο άλλος κλάδος έχει παράγωγο 1 για κάθε x έχουμε ότι $f'(0) = 1$.

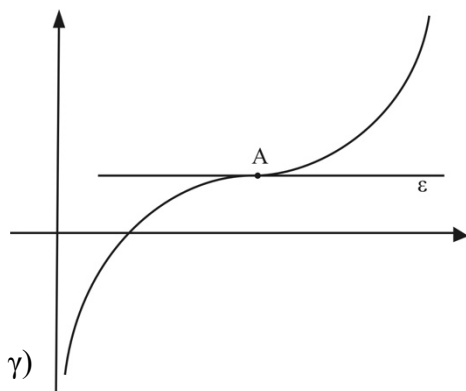
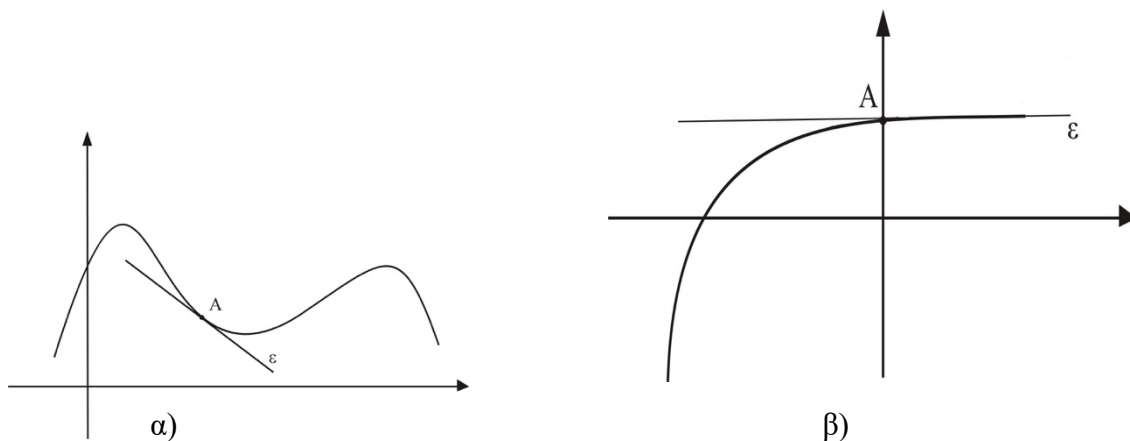
Καθηγητής: Η Ελένη έχει δίκιο αλλά για να βρούμε την παράγωγο στα σημεία που αλλάζει ο τύπος είναι καλύτερα να εξετάζουμε τις πλευρικές παραγώγους όπως στο παράδειγμα του βιβλίου.

α) Πως κρίνετε ως προς το μαθηματικό περιεχόμενο τις απόψεις του Δημήτρη και της Ελένης; (Αιτιολογείστε την άποψη σας)

β) Πως κρίνετε μαθηματικά και διδακτικά την αντιμετώπιση αυτών των απόψεων από τον καθηγητή; (Αιτιολογείστε την άποψη σας)

γ) Αν ήσασταν εσείς ο καθηγητής ή η καθηγήτρια της τάξης πως θα αντιμετωπίζατε διδακτικά τις απόψεις του Δημήτρη και της Ελένης; (Αιτιολογείστε τις ενέργειες σας)

2. Στα μαθηματικά κατεύθυνσης της Γ' Λυκείου τέθηκε η ερώτηση:
 « Ποιες από τις ευθείες στα παρακάτω σχήματα είναι εφαπτόμενες της αντίστοιχης
 καμπύλης στο σημείο A. Αιτιολογείστε την απάντησή σας.»



Ένας/μια μαθητής/τρια απάντησε ως εξής:
 «Στο σχήμα (α) η ευθεία δεν είναι εφαπτόμενη της καμπύλης γιατί έχει τουλάχιστον
 δυο κοινά σημεία με την καμπύλη. Στο σχήμα (β) η ευθεία δεν είναι εφαπτομένη της
 καμπύλης γιατί έχει άπειρα κοινά σημεία με την καμπύλη. Στο σχήμα (γ) η ευθεία,
 παρά το ότι έχει ένα μόνο κοινό σημείο με την καμπύλη, δεν είναι εφαπτομένη της
 γιατί την κόβει.»

α) Τι είναι πιθανό να σκεφτόταν ο μαθητής για να οδηγηθεί στην παραπάνω
 απάντηση;

β) Πως θα διορθώνατε τις όποιες παρανοήσεις του μαθητή που προκύπτουν από τις
 παραπάνω απαντήσεις του