ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ, Ε.Κ.Π.Α.

658. Μέθοδοι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

17 Σεπτεμβρίου 2018

Άριστα = 10 μονάδες

Θ1 3 μονάδες Η πυκνότητα $u(x,t)$ μιας χημικής ουσίας στο διάστημα $0 < x < \infty$ ικανοποιεί την εξίσωση διάχυσης $u_t = ku_{xx}$ (η σταθερά k λέγεται συντελεστής διάχυσης), με αρχική συνθήκη $u(x,0) = 0$ και συνοριακές συνθήκες $u(0,t) = U$ και $\lim_{x\to\infty} u(x,t) = 0$. Οι ποσότητες μάζα, χρόνος, μήκος, πυκνότητα, έχουν διαστάσεις M, T, L, ML^{-3}, αντιστοίχως.
(α) Να βρεθούν οι διαστάσεις των ποσοτήτων k και U.
(β) Παρατηρώντας ότι οι μόνες διαστατικές μεταβλητές και παράμετροι είναι οι u, U, k, x, t, αναζητούμε αριθμούς a, b, c, d έτσι, ώστε $[u] = [x^a\, t^b\, k^c\, U^d]$. Μέσω αυτής της διαδικασίας, να αποδειχθεί ότι η γενική λύση της εξίσωσης διάχυσης έχει τη μορφή $u = UF(\eta)$, όπου $\eta := \frac{x}{\sqrt{kt}}$ είναι η λεγόμενη «μεταβλητή ομοιότητας».
(γ) Με αντικατάσταση της $u = UF(\eta)$ στην εξίσωση διάχυσης, στην αρχική και στις συνοριακές συνθήκες, να αποδειχθεί ότι η λύση του δοθέντος προβλήματος αρχικών-συνοριακών συνθηκών είναι $u(x,t) = U\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{kt}}\right)$, όπου $\mathrm{erfc}(\varrho) := 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\varrho} \mathrm{e}^{-r^2} dr$ είναι η συμπληρωματική συνάρτηση σφάλματος.

Θ2 2 μονάδες Να βρεθεί ομοιόμορφη ασυμπτωτική προσέγγιση της λύσης του ΠΑΤ

$$\varepsilon\, y'' + y' + y = 0\,,\ t > 0\ ,\ 0 < \varepsilon \ll 1\,;\ y(0) = 0\,,\ \varepsilon\, y'(0) = 1.$$

Θ3 1.25 μονάδες Να βρεθεί μια προσέγγιση για τις μεγάλες ιδιοτιμές του ΠΣΤ

$$y'' + \lambda\,\mathrm{e}^{4t} y = 0\,,\ t \in (0,1),\ \lambda \gg 1\,;\ y(0) = y(1) = 0.$$

Επίσης, να βρεθούν οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις.

Θ4 1.25 μονάδες Να αποδειχθεί ότι η $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ είναι ασθενής συνάρτηση Lyapunov στο $(0,0)$ για το σύστημα

$$x_1' = x_2\ ;\ x_2' = -x_1 - x_2^3\left(1 - x_1^2\right)^2 .$$

Θ5 1.5 μονάδες Δίνεται η δ.ε. $y'' - (\mu+1)y' + \mu y = 0, \mu \in \mathbb{R}$. Να μετατραπεί σε σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης, του οποίου να ταξινομηθούν τα σημεία ισορροπίας.

Θ6 2 μονάδες Να αποδειχθεί ότι η δ.ε.

$$y'' + \left((y')^2 + y^2 - 4\right) y = 0\,,$$

έχει περιοδική λύση, η οποία να βρεθεί.
Υπόδειξη: μπορείτε να χρησιμοποιήσετε πολικές συντεταγμένες.

Καλή Επιτυχία!