

**ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Ε.Κ.Π.Α.**  
**658. ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**  
**14 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2022**

- I. 3M Ο πληθυσμός  $y(t)$  ενός είδους ζώων κατά τη χρονική στιγμή  $t$  πληροί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = ry - \frac{\alpha y^2}{b^2 + y^2}, \\ y(0) = y_0. \end{cases} \quad (1)$$

- i. Να προσδιορίσετε τις διαστάσεις των σταθερών  $r, a$  και  $b$ .
- ii. Να γράψετε το πρόβλημα σε αδιάστατη μορφή. Ως πληθυσμό αναφοράς χρησιμοποιήστε τον  $b$  και ως χρόνο αναφορά το  $b/a$ .
- iii. Να προσδιορίσετε τα σημεία ισορροπίας του αδιάστατου προβλήματος για  $r = 1, a = 4$  και  $b = 2$  και επιχειρήσετε τον χαρακτηρισμό της ευστάθειας των σημείων ισορροπίας του προβλήματος μέσω γραμμικοποίησης.

- II. 2.5M Να βρείτε ομοιόμορφη ασυμπτωτική προσέγγιση της λύσης του προβλήματος συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} \varepsilon y'' + 2y' + e^y = 0, & t \in (0, 1), \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

- III. 3M Δίνεται η διαφορική εξίσωση  $x'' + 4x + g(x') = 0$ , με  $g(0) = 0$  και  $g'(w) \geq 0$ .

- i. Να μελετήσετε, με χρήση του θεωρήματος γραμμικοποίησης, την ευστάθεια της μηδενικής λύσης του προβλήματος.
- ii. Να σχεδιάσετε το διάγραμμα φάσης για κάθε περίπτωση.
- iii. Στην περίπτωση που το θεώρημα γραμμικοποίησης δεν δίνει συμπέρασμα για την ευστάθεια της μηδενικής λύσης, να χρησιμοποιήσετε τη μέθοδο Lyapunov αποδεικνύοντας πρώτα ότι η  $V(x, y) = 4x^2 + y^2$  είναι μια συνάρτηση Lyapunov.

- IV. 1.5M Να βρείτε μια προσέγγιση για τις μεγάλες ιδιοτιμές του προβλήματος συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} y'' + \lambda e^{4t} y = 0, & t \in (0, 1), \\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases} \quad (3)$$