



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ

Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΓΕΩΛΟΓΙΑΣ ΚΑΙ ΓΕΩΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΟΣ

ΤΟΜΕΑΣ ΓΕΩΦΥΣΙΚΗΣ – ΓΕΩΘΕΡΜΙΑΣ

ΠΜΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΓΗΣ & ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ (ΓΕΩΦΥΣΙΚΗ – ΣΕΙΣΜΟΛΟΓΙΑ)

Προχωρημένη Σεισμολογία (ΓΣ-Υ04)

Γενικευμένη αντιστροφή

Μοντέλα ταχυτήτων

Περιεχόμενα του μαθήματος

- Γενικευμένη αντιστροφή
- Εκτίμηση σφαλμάτων και ποιότητας αντιστροφής
- HypoInverse
- Μοντέλα ταχυτήτων
- Βελτίωση μοντέλου με αναζήτηση σε κάνναβο

Το ευθύ πρόβλημα

Ορισμοί:

- **d** : πίνακας **δεδομένων (data vector)**, διαστάσεων $N \times 1$

Είναι ένα άνυσμα που περιέχει τους χρόνους άφιξης σεισμικών κυμάτων σε σταθμούς, π.χ. χρόνους άφιξης κυμάτων P σε N σταθμούς.

- **m** : πίνακας **μοντέλου (model)**, διαστάσεων 1×4

Είναι ένα άνυσμα που περιέχει σε κάθε βήμα η τις τρέχουσες υποθετικές εστιακές παραμέτρους (x_n, y_n, z_n, t_n)

- **F** : τελεστής που αν δράσει σε έναν πίνακα **m** δίνει ως έξοδο έναν πίνακα **d** με τη λύση του **ευθέος προβλήματος**, δηλαδή (για παράδειγμα) τους **θεωρητικούς** χρόνους άφιξης των κυμάτων P σε κάθε σταθμό για το δεδομένο μοντέλο **m**.

$$\mathbf{F}(\mathbf{m}) = \mathbf{d}$$

Ευθύ πρόβλημα

Το ευθύ πρόβλημα

- Θεωρητικός χρόνος άφιξης T_{arr} :

$$T_{arr} = t_i(x_i, y_i, z_i, x_o, y_o, z_o) + t_o$$

Όπου ο δείκτης “ο” αναφέρεται στον σεισμό και ο “i” στον σταθμό
(t_o : χρόνος γένεσης, t_i : χρόνος διαδρομής, T_{arr} : χρόνος άφιξης)

- Απλούστερη συσχέτιση χρόνου διαδρομής t_i και θέσης υποκέντρου για σταθερή ταχύτητα διάδοσης u (ομοιογενές μοντέλο ταχυτήτων):

$$t_i = \frac{\sqrt{(x_o - x_i)^2 + (y_o - y_i)^2 + (z_o - z_i)^2}}{u}$$

Το αντίστροφο πρόβλημα

- Το **αντίστροφο πρόβλημα** είναι να υπολογίσουμε τις **άγνωστες** σεισμικές παραμέτρους (διάνυσμα **m**) γνωρίζοντας το Data Vector **d** (π.χ., χρόνοι άφιξης των κυμάτων P σε διάφορους σταθμούς)
- Αυτό μπορεί να γραφτεί συμβολικά ως:

$$\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{d}) = \mathbf{m}$$

Αντίστροφο πρόβλημα

- Πέρα από τις εγγενείς δυσκολίες στο μαθηματικό κομμάτι του προβλήματος (μη γραμμικότητα), μια ακόμα δυσκολία έγκειται στην ύπαρξη σφαλμάτων τόσο στις τιμές του Data Vector **d** όσο και στο θεωρούμενο μοντέλο ταχυτήτων με το οποίο υπολογίζουμε τους θεωρητικούς (προβλεπόμενους) χρόνους άφιξης κατά το ευθύ πρόβλημα.

Για τους λόγους αυτούς χρειάζεται:

- 1) Το πρόβλημα να **γραμμικοποιηθεί**.
- 2) Το πρόβλημα να λυθεί μέσα από μια **επαναληπτική διαδικασία** που εισάγει σε κάθε βήμα **μικρές διορθώσεις** στο μοντέλο, ώστε να ισχύει η γραμμικότητα.

Το αντίστροφο πρόβλημα

- Θεωρώντας τη γραμμική προσέγγιση του αναπτύγματος Taylor για τους χρόνους διαδρομής, μπορεί να φτιαχτεί μια διαδικασία **αντιστροφής (inversion)**, από την οποία με βάση τα **δεδομένα** (Πίνακας **d**: χρόνοι άφιξης) υπολογίζουμε τις άγνωστες παραμέτρους του **μοντέλου** (Πίνακας **m**: (x_o, y_o, z_o, t_o)).
- Συνήθως διαθέτουμε πολύ περισσότερα δεδομένα (στοιχεία του πίνακα **d**: π.χ. χρόνοι άφιξης κυμάτων P σε πάνω από 4 σταθμούς) από τον αριθμό εστιακών παραμέτρων (4) του μοντέλου **m** που θέλουμε να προσδιορίσουμε (x_o, y_o, z_o, t_o) .
- Οπότε λέμε ότι το σύστημα εξισώσεων που θα προκύψει είναι **υπερκαθορισμένο** (over-determined) για τις παραμέτρους του μοντέλου.

Το αντίστροφο πρόβλημα

- Για την επίλυση του προβλήματος με 4 αγνώστους (x, y, z, t) χρειαζόμαστε ένα σύστημα με **τουλάχιστον 4 εξισώσεις**, που στην περίπτωση που εξετάζουμε σημαίνει ότι ο πίνακας $\mathbf{d}$ πρέπει να περιλαμβάνει δεδομένα χρόνων άφιξης κυμάτων P από τουλάχιστον 4 σταθμούς.
- Θεωρούμε μια **υποθετική λύση $\mathbf{m}^o$** (εδώ ο εκθέτης υποδηλώνει αριθμό βήματος) που λέγεται **αρχικό μοντέλο**.
- Από την αντίστροφη αυτή διαδικασία θα πάρουμε μια **μεταβολή $\delta \mathbf{m}_j$** για κάθε τιμή j του διανύσματος $\mathbf{m}^o$ που θα μας δώσει μια καλύτερη προσέγγιση του πραγματικού $\mathbf{m}$.
- Έστω ότι στο πρώτο βήμα θα λάβουμε για κάθε εστιακή παράμετρο j μια νέα τιμή m_j^1 , λόγω μιας **μικρής μεταβολής** κατά δm_j^o :

$$m_j^1 = m_j^o + \delta m_j^o$$

Το αντίστροφο πρόβλημα

- Η μεταβολή δd_i που προκαλεί στα δεδομένα η μεταβολή του μοντέλου κατά δm_j μπορεί να γραφτεί ως ανάπτυγμα Taylor διατηρώντας τους γραμμικούς όρους ως προς τις παραμέτρους x, y, z, t :

$$\delta d_i = \left(\frac{\partial F}{\partial x_o} \right) \delta x_o + \left(\frac{\partial F}{\partial y_o} \right) \delta y_o + \left(\frac{\partial F}{\partial z_o} \right) \delta z_o + \left(\frac{\partial F}{\partial t_o} \right) \delta t_o = d_i - F_i^o(x_o, y_o, z_o, t_o)$$

- Με δd_i τη διαφορά μεταξύ παρατηρούμενων (πραγματικών) και υπολογιζόμενων χρόνων άφιξης σε έναν σταθμό i .

- Η μεταβολή δd_i λόγω μεταβολής μιας παραμέτρου του μοντέλου δm_j μπορεί να γραφεί και ως: $\delta d_i = \frac{\partial d_i}{\partial m_j} \delta m_j$

- Ή συνολικά με μορφή πινάκων: $\Delta \mathbf{d} = \mathbf{G} \cdot \Delta \mathbf{m}$, ή απλούστερα $\mathbf{d} = \mathbf{Gm}$

- Πίνακας Μερικών Παραγώγων:

$$G_{ij} = \frac{\partial d_i}{\partial m_j}$$

*Ιακωβιανός πίνακας
(Jacobian matrix)*

Το αντίστροφο πρόβλημα

$$\mathbf{d} = \mathbf{G}\mathbf{m}$$

- Πίνακας Μερικών Παραγώγων:

$$G_{ij} = \frac{\partial d_i}{\partial m_j}$$

*Ιακωβιανός πίνακας
(Jacobian matrix)*

- Ο πίνακας **G** έχει N γραμμές και 4 στήλες (N×4).
- Όπου N : αριθμός δεδομένων (π.χ. αριθμός σταθμών με διαθέσιμους χρόνους άφιξης των κυμάτων P)
- Οι 4 στήλες αντιστοιχούν στις 4 εστιακές παραμέτρους του μοντέλου (x_o, y_o, z_o, t_o)
- Τα στοιχεία που περιέχει ο πίνακας **G** είναι οι μερικές παράγωγοι του κάθε στοιχείου του πίνακα δεδομένων **d** (υπολογιζόμενοι χρόνοι άφιξης) ως προς την κάθε παράμετρο του μοντέλου **m** (x_o, y_o, z_o, t_o):

$$\mathbf{G}_{N \times 4} = \begin{bmatrix} \frac{\partial d_1}{\partial x_o} & \frac{\partial d_1}{\partial y_o} & \frac{\partial d_1}{\partial z_o} & \frac{\partial d_1}{\partial t_o} \\ \frac{\partial d_2}{\partial x_o} & \frac{\partial d_2}{\partial y_o} & \frac{\partial d_2}{\partial z_o} & \frac{\partial d_2}{\partial t_o} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial d_N}{\partial x_o} & \frac{\partial d_N}{\partial y_o} & \frac{\partial d_N}{\partial z_o} & \frac{\partial d_N}{\partial t_o} \end{bmatrix}$$

$$\text{Όπου } d_i = \frac{\sqrt{(x_o - x_i)^2 + (y_o - y_i)^2 + (z_o - z_i)^2}}{V_P} + t_o$$

x_i, y_i, z_i : συντεταγμένες σταθμού i

x_o, y_o, z_o : υποθετικές συντεταγμένες εστίας

t_o : υποθετικός χρόνος γένεσης

V_P : σταθερή ταχύτητα διάδοσης κυμάτων P
(για ομοιογενές μοντέλο ταχυτήτων)

Το αντίστροφο πρόβλημα

$$\mathbf{d} = \mathbf{G}\mathbf{m}$$

$$G_{ij} = \frac{\partial d_i}{\partial m_j}$$

- Η σχέση $\mathbf{d}=\mathbf{G}\mathbf{m}$ εξακολουθεί να έχει τη μορφή του **ευθέος προβλήματος**, δηλαδή δίνουμε ένα μοντέλο $\mathbf{m}$ και υπολογίζουμε θεωρητικούς χρόνους άφιξης $\mathbf{d}$ (για την ακρίβεια, δίνουμε μεταβολή $\Delta\mathbf{m}$ και υπολογίζουμε μεταβολή $\Delta\mathbf{d}$).
- Το **αντίστροφο πρόβλημα** είναι να δώσουμε πίνακα $\Delta\mathbf{d}$ (χρονικά υπόλοιπα) και να πάρουμε πίνακα $\Delta\mathbf{m}$ (διόρθωση παραμέτρων μοντέλου).
- **Αν** είχαμε ακριβώς 4 στοιχεία στον πίνακα δεδομένων $\mathbf{d}$ (όσα τα στοιχεία του μοντέλου $\mathbf{m}$) θα μπορούσαμε (τυπικά) να κάνουμε την αντιστροφή ως εξής:

$$\mathbf{G}^{-1}\mathbf{d} = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}\cdot\mathbf{m} \Rightarrow \mathbf{m} = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{d}$$

- Όπου $\mathbf{G}^{-1}$ ο αντίστροφος πίνακας του $\mathbf{G}$, δηλαδή αυτός για τον οποίο ισχύει η σχέση $\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}=\mathbf{I}$, όπου $\mathbf{I}$ ο ταυτοτικός πίνακας.
- Σε ένα τέτοιο σύστημα 4x4 με σταθερούς συντελεστές μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο απαλοιφής Gauss για τον προσδιορισμό των αγνώστων.

Το αντίστροφο πρόβλημα

$$\mathbf{d} = \mathbf{G}\mathbf{m}$$

$$G_{ij} = \frac{\partial d_i}{\partial m_j}$$

$$\mathbf{G}^{-1}\mathbf{d} = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}\cdot\mathbf{m} \Rightarrow \mathbf{m} = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{d}$$

- Ωστόσο, στην πράξη η παραπάνω σχέση **δεν θα δώσει λύση**:
 1. Το $\mathbf{d}$ έχει πάντα σφάλματα (π.χ. σφάλμα ανάγνωσης χρόνου άφιξης)
 2. Το μοντέλο ταχυτήτων δεν ταυτίζεται με την πραγματική δομή της Γης
 3. Η κάλυψη των σταθμών είναι γενικά μονόπλευρη και αζιμουθιακά περιορισμένη
- Επίσης, η παραπάνω πράξη είναι και τυπικά αδύνατη όταν το σύστημα είναι υπερκαθορισμένο ($N > 4$) διότι:
 1. Ο πίνακας $\mathbf{G}$ ($N \times 4$) δεν είναι τετραγωνικός, και άρα δεν υπάρχει ο αντίστροφος $\mathbf{G}^{-1}$
 2. Δεν μπορεί να γίνει αυτός ο πολλαπλασιασμός πινάκων αν δεν ταιριάζουν οι εσωτερικές διαστάσεις τους (στήλες του 1^{ου} με γραμμές του 2^{ου} πίνακα).
- Σε τέτοιες περιπτώσεις, προχωράμε σε μια διαδικασία που ονομάζεται **γενικευμένη αντιστροφή**.

Το αντίστροφο πρόβλημα

$$\mathbf{d} = \mathbf{G}\mathbf{m}$$

ευθύ

$$G_{ij} = \frac{\partial d_i}{\partial m_j}$$

- Όταν ο πίνακας $\mathbf{G}$ είναι τετραγωνικός ($n \times n$) τότε εφόσον ορίζεται ο αντίστροφός του, $\mathbf{G}^{-1}$, μπορούμε να γράψουμε:

$$\mathbf{m} = \mathbf{G}^{-1} \cdot \mathbf{d}$$

- Ωστόσο για τους λόγους που προαναφέραμε (σφάλματα, άγνωστο πραγματικό μοντέλο ταχυτήτων) μια τέτοια απλή λύση δεν είναι χρήσιμη.
- Στη γενική περίπτωση ο $\mathbf{G}$ είναι ένας πίνακας $n \times m$ ($n > m$) όπου n ο αριθμός παρατηρήσεων και m ο αριθμός των παραμέτρων του μοντέλου (εδώ 4).

Το αντίστροφο πρόβλημα

$$\mathbf{d} = \mathbf{Gm}$$

ευθύ

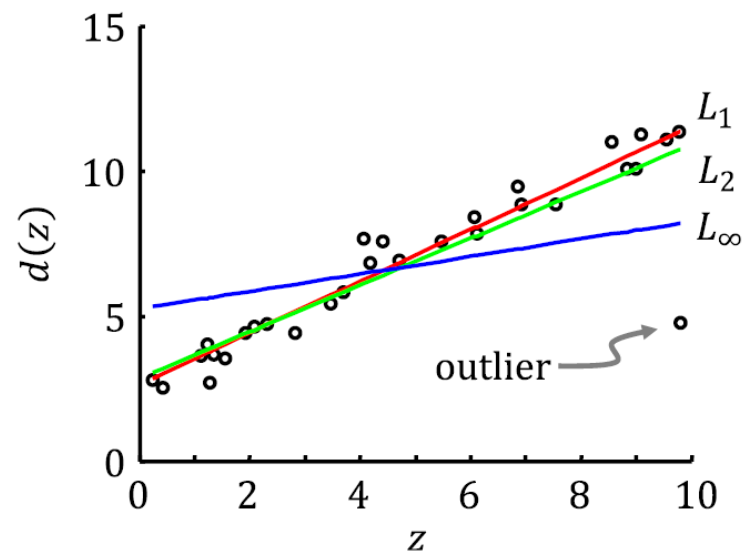
$$G_{ij} = \frac{\partial d_i}{\partial m_j}$$

- Σε ένα πραγματικό πρόβλημα εύρεσης εστιακών συντεταγμένων και χρόνου γένεσης σεισμού γνωρίζοντας πάνω από 4 χρόνους άφιξης καμία λύση δεν ικανοποιεί επακριβώς όλες τις εξισώσεις.
- Ψάχνουμε να βρούμε τη λύση εκείνη που **ελαχιστοποιεί** τα σφάλματα, και συγκεκριμένα το **τετραγωνικό σφάλμα** E^2

$\mathbf{E} = [\mathbf{d} - \mathbf{Gm}]$ (αποκλίσεις των προβλεπόμενων/υπολογιζόμενων από τους πραγματικούς χρόνους άφιξης)

$$E^2 = \sum_{i=1}^n \left(d_i - \sum_{j=1}^m G_{ij} m_j \right)^2$$

- Το E στον παραπάνω υπολογισμό είναι η νόρμα L_2 των χρονικών υπολοίπων.



Το αντίστροφο πρόβλημα

$$E^2 = \sum_{i=1}^n \left(d_i - \sum_{j=1}^m G_{ij} m_j \right)^2$$

- Για να ελαχιστοποιήσουμε το E^2 θέτουμε τις μερικές του παραγώγους ως προς τις παραμέτρους του μοντέλου, m_k , ίσες με το μηδέν:

$$\frac{\partial E^2}{\partial m_k} = 2E \frac{\partial E}{\partial m_k} = -2 \sum_{i=1}^n \left(d_i - \sum_{j=1}^m G_{ij} m_j \right) \cdot G_{ik} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n (d_i G_{ik}) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m G_{ij} m_j \right) \cdot G_{ik} \quad \Rightarrow G^T d = G^T G m$$

- Η έκφραση $\mathbf{G}^T \mathbf{d} = \mathbf{G}^T \mathbf{G} \mathbf{m}$ έχει τη μορφή **κανονικών εξισώσεων** (*normal equations*).

Γενικευμένος αντίστροφος

- Ο $n \times m$ πίνακας $\mathbf{G}$ ($n > m$) δεν είναι τετραγωνικός, αλλά ο πίνακας $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$ **είναι τετραγωνικός** ($m \times m$) και μάλιστα **συμμετρικός**:

$$\mathbf{G}^T \cdot \mathbf{d} = \mathbf{G}^T \mathbf{G} \cdot \mathbf{m} \Rightarrow \Delta \mathbf{m} = [\mathbf{G}^T \mathbf{G}]^{-1} \cdot \mathbf{G}^T \cdot \Delta \mathbf{d}$$

- Ο πίνακας $[\mathbf{G}^T \mathbf{G}]^{-1} \cdot \mathbf{G}^T = \mathbf{G}^{-g}$ καλείται **Αντίστροφος Ελαχίστων Τετραγώνων** του $\mathbf{G}_{n \times m}$
- Αν επιπλέον ο $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$ **δεν** είναι ιδιάζων: $|\mathbf{G}^T \mathbf{G}| \neq 0$ τότε ο $\mathbf{G}^{-g}$ καλείται **Γενικευμένος Αντίστροφος** του $\mathbf{G}_{n \times m}$
- Η παραπάνω εξίσωση μας δίνει την καλύτερη προσέγγιση του $\Delta \mathbf{m}$ με **μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων** και είναι πολύ χρήσιμη σχέση τόσο για γραμμικά όσο και για μη γραμμικά προβλήματα.

(Ιδιοτιμές / Ιδιοδιανύσματα)

- Αν $\mathbf{A}$ ένας τετραγωνικός πίνακας $n \times n$, ορίζεται ως πρόβλημα ιδιοτιμών (*eigenvalues*) η εξίσωση:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{d} = \lambda \mathbf{d} \Rightarrow [\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}] \cdot \mathbf{d} = \mathbf{O}_n$$

- Το παραπάνω ομογενές σύστημα έχει μη-μηδενικές λύσεις μόνο όταν η ορίζουσα: $|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = 0$
- Η οποία γράφεται υπό τη μορφή του χαρακτηριστικού πολυωνύμου: $\lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1\lambda + \alpha_0 = 0$
- Οι ρίζες λ_i ($i=1,2,\dots,n$) της εξίσωσης ονομάζονται ιδιοτιμές (*eigenvalues*), και ισχύει ότι: $\mathbf{A}\mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i$
- Όπου $\mathbf{u}_i$ τα ιδιοδιανύσματα (*eigenvectors*) του $\mathbf{A}$, ένα για κάθε ιδιοτιμή λ_i .
- Ή υπό μορφή πινάκων: $\mathbf{A}\mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}$

(Ιδιοτιμές / Ιδιοδιανύσματα)

$$\mathbf{A}\mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}$$

- Ο ανάστροφος $\mathbf{A}^T$ έχει τις ίδιες ιδιοτιμές με τον $\mathbf{A}$, και γράφουμε:
 $\mathbf{A}^T\mathbf{V} = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}$
- $\mathbf{V}$: πίνακας ιδιοδιανυσμάτων του $\mathbf{A}^T$, με $\mathbf{V}^T$ και $\mathbf{U}$ ορθογώνιους, ή $\mathbf{V}^T\mathbf{U}=\mathbf{I}$, δηλαδή: $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{V}^T$ και επίσης $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}$
- Εφόσον ο $\mathbf{A}$ είναι τετραγωνικός και υπάρχει ο $\mathbf{U}^{-1}$, με λίγη άλγεβρα προκύπτει η αποσύνθεση **ιδιοζουσών τιμών** (singular value decomposition, ή SVD) του $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^T$$

- Και:

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{V}^T$$

- Δηλαδή οι $\mathbf{A}$ και $\mathbf{A}^{-1}$ γράφονται υπό τη μορφή ενός γινομένου ορθογωνίων ιδιοδιανυσμάτων βάσης και ιδιοτιμών.

(Αναλυτικότερα στο παράρτημα, στο τέλος της παρουσίασης)

Γενικευμένος αντίστροφος

ευθύ

 $d = Gm$

αντίστροφο

$$\Delta m = [G^T G]^{-1} \cdot G^T \cdot \Delta d$$

- Ο Πίνακας $G^T G$ είναι τετραγωνικός (σε αντίθεση με τον $G_{n \times m}$) οπότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι αν V ο πίνακας ορθογωνίων ιδιοδιανυσμάτων του $G^T G$ με $V^{-1} = V^T$, τότε αναλύεται στη μορφή:

$$G^T G = V \cdot \Lambda \cdot \Lambda^T \cdot V^T = V \cdot \Lambda_{m(2)} \cdot V^T \Rightarrow [G^T G]^{-1} = V \cdot [\Lambda_{m(2)}]^{-1} \cdot V^T$$

- Κατά όμοιο τρόπο με το $A^{-1} = U \Lambda^{-1} V^T$ που είπαμε νωρίτερα για έναν τετραγωνικό πίνακα A .
- Εδώ ο $\Lambda_{m(2)}$ περιέχει τις m ιδιοτιμές του $G_{n \times m}$ υψωμένες στο τετράγωνο.
- Ομοίως: $GG^T = U \Lambda_{n(2)} U^T$ (με U τον $n \times n$ πίνακα ιδιοδιανυσμάτων στον χώρο δεδομένων)
- Επειδή G και G^T έχουν ίδιες ιδιοτιμές αλλά $n > m$, συνεπάγεται ότι μόνο m ιδιοτιμές θα είναι μη-μηδενικές.

Αποσύνθεση ιδιαζουσών τιμών

ευθύ

 $d = Gm$

αντίστροφο

$$\Delta m = [G^T G]^{-1} \cdot G^T \cdot \Delta d$$

$$G^{-g} = [G^T G]^{-1} \cdot G^T = \{V \cdot [\Lambda_{m(2)}]^{-1} \cdot V^T\} \cdot \{V \cdot \Lambda_m \cdot U^T\}$$

$$\Rightarrow G^{-g} = V \cdot [\Lambda_{m(2)}]^{-1} \cdot \Lambda_m U^T = V \cdot \Lambda_m^{-1} \cdot U^T$$

καθώς τα στοιχεία του $\Lambda_{m(2)}$ είναι ίδια με του Λ_m στο τετράγωνο (ή αντιστρόφως, τα στοιχεία του Λ_m είναι οι τετραγωνικές ρίζες των ιδιοτιμών του $G^T G$).

- Δηλαδή καταλήξαμε ότι για οποιονδήποτε μη ιδιάζοντα πίνακα $G_{n \times m}$:

$$G = U \Lambda V^T \quad \text{και} \quad G^{-g} = V \Lambda^{-1} U^T$$

Η παραπάνω διαδικασία είναι εφαρμογή της αποσύνθεσης ιδιαζουσών τιμών ή **Singular Value Decomposition** (SVD) του πίνακα G σε πίνακες U , Λ , V .

Εκτίμηση σφαλμάτων και ποιότητας της αντιστροφής

- Προκειμένου να ισχύουν όλα τα προηγούμενα, θεωρούμε ότι:
 1. Όλα τα δεδομένα (π.χ. χρόνοι άφιξης κυμάτων) είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους.
 2. Οι παράμετροι του μοντέλου (π.χ., εστιακές παράμετροι σεισμού) επηρεάζουν όλα τα δεδομένα.
- Το παραπάνω είναι γενικά αληθές στο (υπερκαθορισμένο) πρόβλημα της επίλυσης εστιακών παραμέτρων, αλλά σε άλλα γεωφυσικά προβλήματα (π.χ., σεισμική τομογραφία) δεν είναι αυτονόητο ότι ισχύει.
- Σε μια τέτοια περίπτωση, ο $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$ θα είναι ιδιάζων, με τουλάχιστον μια (σχεδόν) μηδενική ιδιοτιμή.
- Για να μπορέσει να επιλυθεί η γενικευμένη αντιστροφή, θα πρέπει να τροποποιηθούν οι πίνακες $\mathbf{V}$, $\mathbf{\Lambda}$, $\mathbf{U}$ ώστε να εξετάζουν μόνο τις p μη-μηδενικές ιδιοτιμές.

Εκτίμηση σφαλμάτων και ποιότητας της αντιστροφής

- Καθώς $\mathbf{G}_{n \times m}$ με $n > m$ είναι $\mathbf{U}_{n \times n}$, $\mathbf{V}_{m \times m}$ και συνεπώς τα ιδιοδιανύσματα του $\mathbf{U}$ είναι περισσότερα από τις m μη-μηδενικές ιδιοτιμές.
- Αν αφαιρέσουμε τις τελευταίες $n-m$ στήλες του $\mathbf{U}$ προκύπτει ένας πίνακας $\mathbf{U}_m$, που γενικά θα τον συμβολίζουμε με $\mathbf{U}_p$ ($n \times p$).
- Αντίστοιχα, για τα ιδιοδιανύσματα του $\mathbf{G}^T$: $\mathbf{V}_p$ ($m \times p$)
- Ο $\mathbf{G}$ γράφεται (SVD): $\mathbf{G} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}^T = \mathbf{U}_p \mathbf{\Lambda}_p \mathbf{V}_p^T$
- Ο γενικευμένος αντίστροφος: $\mathbf{G}_p^{-1} = \mathbf{V}_p \mathbf{\Lambda}_p^{-1} \mathbf{U}_p^T = \mathbf{G}^g$
- Αν έχουμε $p < m$, αυτό σημαίνει πως υπάρχουν **παράμετροι του μοντέλου** οι οποίες **δεν** είναι επιλύσιμες μέσω της αντιστροφής (είναι μη ανιχνεύσιμες με βάση τα ιδιοδιανύσματα $\mathbf{V}_p$).
- Η αντίστοιχη περιγραφή για τα ιδιοδιανύσματα $\mathbf{U}_p$ στον χώρο δεδομένων σημαίνει ότι υπάρχουν πτυχές των **δεδομένων** που **δεν** μπορούν να προσαρμοστούν στο μοντέλο.
- Η αντιστροφή θα δώσει *κάποια* λύση, αλλά υπάρχουν περιορισμοί στις δυνατότητές της.

Πίνακας επιλυσιμότητας (Resolution matrix)

$$\mathbf{R} = \mathbf{V}_p \mathbf{V}_p^T$$

- Με βάση τον νέο φορμαλισμό για τις p μη-μηδενικές ιδιοτιμές, επανερχόμαστε στην εξίσωση που μας δίνει τη διόρθωση στο αρχικό μοντέλο $\Delta \mathbf{m} = \mathbf{m}_p$

$$\mathbf{m}_p = \mathbf{G}_p^{-1} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{G}_p^{-1} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{m} = \{\mathbf{V}_p \cdot \boldsymbol{\Lambda}_p^{-1} \cdot \mathbf{U}_p^T\} \cdot \{\mathbf{U}_p \cdot \boldsymbol{\Lambda}_p \cdot \mathbf{V}_p^T\} \cdot \mathbf{m} = \mathbf{V}_p \cdot \mathbf{V}_p^T \cdot \mathbf{m} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{m}$$

όπου $\mathbf{m}_p$ το μοντέλο της αντιστροφής και $\mathbf{m}$ το “πραγματικό” μοντέλο.

- Το $\mathbf{R} = \mathbf{V}_p \mathbf{V}_p^T$ καλείται **πίνακας επιλυσιμότητας** του μοντέλου (**model resolution matrix**) και στην ιδανική περίπτωση είναι ο ταυτοτικός πίνακας $\mathbf{I}_p$, όταν υπάρχει πλήρης αντιστοιχία μεταξύ των παραμέτρων του μοντέλου αντιστροφής και του πραγματικού μοντέλου.
- Οι στήλες του $\mathbf{R}$ εκτιμούν κατά πόσο η τιμή μιας παραμέτρου του πραγματικού μοντέλου $\mathbf{m}$ “αναμιγνύεται” (*smearing effect*) στις τιμές των άλλων παραμέτρων του μοντέλου της αντιστροφής, $\mathbf{m}_p$.
- Ιδανικά, τα στοιχεία της διαγωνίου πρέπει να πλησιάζουν τη μονάδα και να είναι πολύ μεγαλύτερα από τα στοιχεία εκτός διαγωνίου της ίδιας στήλης.
- Ο υπολογισμός του πίνακα επιλυσιμότητας $\mathbf{R}$ είναι σημαντικός για την εκτίμηση της ποιότητας της αντιστροφής.

Πίνακας επιλυσιμότητας (Resolution matrix)

$$\mathbf{R} = \mathbf{V}_p \mathbf{V}_p^T$$

- Παράγοντες που μπορούν να δημιουργήσουν προβλήματα στην επιλυσιμότητα ($\mathbf{R}$) της αντιστροφής εστιακών παραμέτρων (x_o, y_o, z_o, t_o):
 - Μη ιδανική γεωμετρία δικτύου σταθμών (μονόπλευρη κατανομή σταθμών, μεγάλο αζιμουθιακό κενό).
 - Μη ομοιόμορφη κατανομή επικεντρικών αποστάσεων σταθμών.
 - Ισχυρές παράμετροι απόσβεσης (*damping*) κατά την αντιστροφή.
 - Απουσία ή μειωμένος αριθμός φάσεων διαφορετικού τύπου (π.χ. S).
- Τα παραπάνω μπορούν:
 - να προκαλέσουν σφάλματα μεροληψίας (*bias*), όπως η μετατόπιση του επικέντρου προς μια ορισμένη κατεύθυνση,
 - να δημιουργήσουν αυξημένη αβεβαιότητα σε μία ή όλες τις παραμέτρους,
 - να δημιουργήσουν συσχέτιση ανάμεσα σε παραμέτρους του μοντέλου (οι τιμές της μίας να επηρεάζουν τις τιμές της άλλης).

Πίνακας πυκνότητας πληροφορίας

(Information density matrix)

$$\mathbf{D} = \mathbf{U}_p \mathbf{U}_p^T$$

- Από τον μειωμένο κατά n - m στήλες πίνακα $\mathbf{U}_p$ ($n \times p$) παίρνουμε:

$$\mathbf{D} = \mathbf{U}_p \mathbf{U}_p^T \neq \mathbf{I}$$

- Ο πίνακας $\mathbf{D}$ ονομάζεται **πίνακας πυκνότητας πληροφορίας** (information density matrix) ή **μήτρα διακριτικής ικανότητας των δεδομένων** (data resolution matrix).
- Παρέχει πληροφορία σχετικά με το ποια μέρη του διανύσματος δεδομένων $\mathbf{d}$ μπορούν να αναπαρασταθούν στον υποχώρο των παρατηρήσιμων συνιστωσών, ο οποίος ορίζεται από τα ιδιοδιανύσματα $\mathbf{U}_p$ που αντιστοιχούν στις p μη-μηδενικές ιδιάζουσες τιμές.
- Τα διαγώνια στοιχεία του $\mathbf{D}$ (με τιμές μεταξύ 0 και 1) δείχνουν πόσο συμβάλλει η αντίστοιχη παρατήρηση (π.χ., χρόνος άφιξης) στη διαδικασία αντιστροφής και στον περιορισμό της λύσης (όσο πιο κοντά στο 1 τόσο ισχυρότερη η συμβολή).
- Άρα ο πίνακας $\mathbf{D}$ είναι ένας δείκτης της **ποιότητας των δεδομένων**.

Αριθμός συνθήκης ή κατάστασης (condition number)

$$\kappa = \frac{|\lambda_{max}|}{|\lambda_{min}|}$$

- Ένας τρόπος να μετρήσουμε πόσο σταθερή είναι η αντιστροφή είναι μέσω του αριθμού συνθήκης (condition number, CND), κ :

$$\kappa = \frac{|\lambda_{max}|}{|\lambda_{min}|}$$

- Όπου λ_{max} και λ_{min} η μέγιστη και ελάχιστη μη-μηδενική ιδιοτιμή, αντίστοιχα.
- Για περισσότερες σταθερές λύσεις πρέπει το κ να είναι σχετικά μικρό (π.χ., $\kappa < 30$).
- Μεγάλες τιμές κ είναι ενδεικτικές αστάθειας: μικρές μεταβολές στα δεδομένα μπορεί να προκαλέσουν μεγάλες μεταβολές στις παραμέτρους του μοντέλου.

Πίνακας συνδιακύμανσης

$$\mathbf{c} = \mathbf{V}_p \mathbf{\Lambda}_p^{-2} \mathbf{V}_p^T$$

- Χρήσιμος επίσης είναι και ο λεγόμενος πίνακας συνδιακύμανσης (**covariance matrix**) των παραμέτρων του μοντέλου:

$$\mathbf{c} = \mathbf{V}_p \mathbf{\Lambda}_p^{-2} \mathbf{V}_p^T = \sigma^2 [\mathbf{G}^T \mathbf{G}]^{-1}$$

- Όπου τα στοιχεία του $\mathbf{\Lambda}_p^{-2}$ είναι $(1/\lambda_i^2)$, σ^2 η διασπορά των σφαλμάτων των δεδομένων (χρονικών υπολοίπων).
- Τα στοιχεία της διαγωνίου του $\mathbf{c}$ ($p \times p$) είναι η διασπορά της κάθε παραμέτρου του μοντέλου (που αντιστοιχεί στις p μη-μηδενικές ιδιάζουσες τιμές).
- Τα εκτός διαγωνίου στοιχεία δείχνουν τον βαθμό συσχέτισης (θετικής ή αρνητικής) μεταξύ παραμέτρων του μοντέλου κατά την επίλυσή τους.
- Από το παραπάνω προκύπτει ότι όσο μικρότερες είναι οι ιδιάζουσες τιμές (*singular values*) ή ιδιοτιμές του $\mathbf{G}_p$, τόσο μεγαλύτερη διακύμανση (άρα και αστάθεια ή αβεβαιότητα) προκαλούν στις λύσεις των παραμέτρων του μοντέλου.
- Αν αφαιρεθούν κάποιες *μικρές* ιδιάζουσες τιμές, η σταθερότητα της αντιστροφής αυξάνεται, αλλά ο $\mathbf{R}$ απομακρύνεται περισσότερο από τον ταυτοτικό πίνακα.
- Παράδειγμα: αδυναμία επίλυσης εστιακού βάθους.

Εκτίμηση σφαλμάτων παραμέτρων μοντέλου

$$\mathbf{c} = \mathbf{V}_p \mathbf{\Lambda}_p^{-2} \mathbf{V}_p^T$$

$$\mathbf{c} = \sigma^2 [\mathbf{G}^T \mathbf{G}]^{-1}$$

- Τα σφάλματα των μετρήσεων (χρόνων άφιξης), ή η ανακρίβειες στο μοντέλο ταχυτήτων κτλ., συσσωρεύονται στη διασπορά σ^2 :

$$\sigma^2 = \frac{1}{N - p} \sum_{i=1}^N (d_i^{obs} - d_i^{cal})^2$$

- Το σ^2 επηρεάζει τα σφάλματα στην εκτίμηση των παραμέτρων του μοντέλου.
- Με την παραδοχή ότι τα σφάλματα των μετρήσεων είναι «τυχαία» και ακολουθούν Γκαουσιανή κατανομή, με 95% πιθανότητα οι πραγματικές τιμές να βρίσκονται εντός εύρους $\pm 2\sigma$ από τις παρατηρηθείσες, τα σφάλματα στις παραμέτρους m_i του μοντέλου μπορούν να εκτιμηθούν από τη σχέση:

$$\sigma_{m_i} = \sqrt{c_{ii}}$$

- Όπου c_{ii} το i -οστό στοιχείο της διαγωνίου του πίνακα συνδιακύμανσης $\mathbf{c}$.

Βάρη δεδομένων

(data weighting)

- Οι αβεβαιότητες που έχουν τα δεδομένα (χρόνοι άφιξης) μπορούν να περιγραφούν υπό τη μορφή βάρους w_i της εκάστοτε μέτρησης.
- Μια μέτρηση με ελαττωμένο βάρος συνεισφέρει λιγότερο στην επίλυση του αντίστροφου προβλήματος, καθώς επηρεάζει λιγότερο το τετράγωνο των χρονικών υπολοίπων που παίζει τον καθοριστικό ρόλο στη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων.

$$E^2 = \sum_{i=1}^N w_i^2 (d_i^{obs} - d_i^{cal})^2 \quad \text{ή} \quad E^2 = \|\mathbf{W}(\mathbf{d} - \mathbf{G}\mathbf{m})\|^2$$

- Όπου $\mathbf{W}$ ο πίνακας βαρών, διαγώνιος με στοιχεία συνήθως της μορφής $1/\sigma_i$, όπου σ_i η αβεβαιότητα της κάθε μέτρησης.
- Το αντίστροφο πρόβλημα παίρνει τη μορφή:

$$\Delta\mathbf{m} = [\mathbf{G}^T \cdot \mathbf{W}^T \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{G}]^{-1} \cdot \mathbf{G}^T \cdot \mathbf{W}^T \cdot \mathbf{W} \cdot \Delta\mathbf{d}$$

Αντιστροφή με απόσβεση

(damped least-squares)

- Σε περιπτώσεις που το πρόβλημα είναι υποκαθορισμένο (*ill-conditioned*), π.χ. λιγότερα δεδομένα απ' ότι παράμετροι του μοντέλου, ή υπάρχουν παράμετροι του μοντέλου με πολύ μικρές ιδιάζουσες τιμές, κρίνεται απαραίτητο η αντιστροφή να γίνει με απόσβεση, ώστε να γίνει πιο σταθερή.
- Το αντίστροφο πρόβλημα (χωρίς βάρη δεδομένων για απλούστευση) παίρνει τη μορφή:

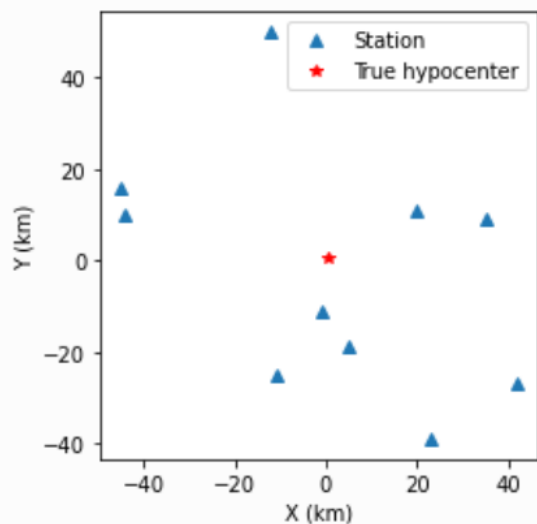
$$\Delta \mathbf{m} = [\mathbf{G}^T \cdot \mathbf{G} + b^2 \cdot \mathbf{I}]^{-1} \cdot \mathbf{G}^T \cdot \Delta \mathbf{d}$$

- Όπου το b είναι ένας παράγων απόσβεσης (damping factor).
- Με τη χρήση του b , οι διορθώσεις $\Delta \mathbf{m}$ γίνονται πιο «συντηρητικές».
- Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να περιορίζεται η επίδραση των μικρών ιδιαιζουσών τιμών στην αντιστροφή, που προκαλούν αστάθεια/υπερβολικές διορθώσεις.
- Η σύγκλιση γίνεται πιο αργά, αλλά πιο σταθερά και αξιόπιστα.
- Η βέλτιστη επιλογή του b γίνεται συνήθως ύστερα από δοκιμές, με σκοπό τον συμβιβασμό (trade-off) **καλής προσαρμογής** στα δεδομένα με τη **ελάχιστη συνολική διόρθωση** στο μοντέλο.

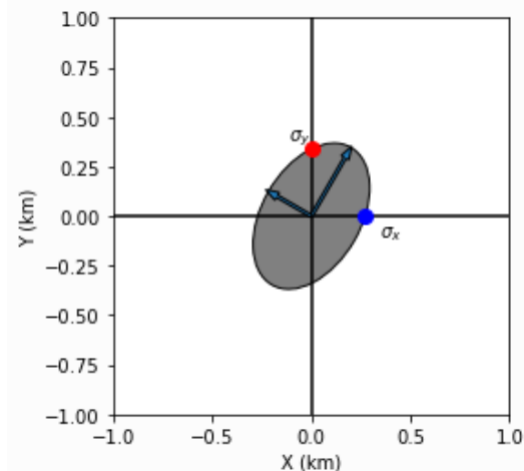
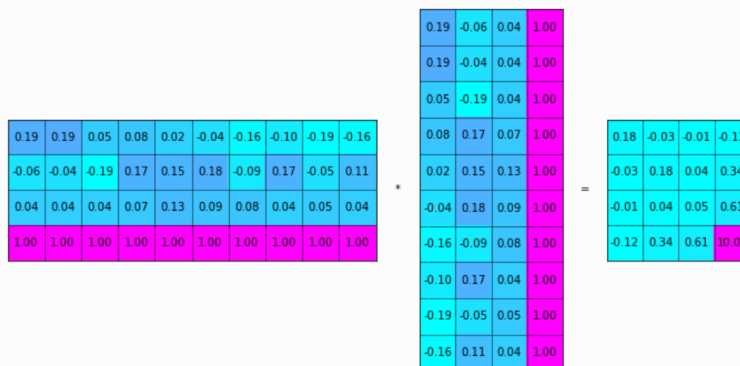
Εφαρμογή αντιστροφής σε Python

- Μπορείτε να πειραματιστείτε με τη διαδικασία της γενικευμένης αντιστροφής για τον προσδιορισμό εστιακών παραμέτρων χρησιμοποιώντας ένα παράδειγμα σε ανοιχτό κώδικα Python που δίνεται στον παρακάτω σύνδεσμο:

https://cuseistut.readthedocs.io/en/latest/abs_loc/index.html



```
GTG = np.matmul(G.T,G)  
matrix_show(G.T,"*",G,"=",GTG)
```



HypolInverse

- Το HypolInverse είναι ένα πρόγραμμα επίλυσης των εστιακών παραμέτρων (x, y, z, t) μέσω γενικευμένης αντιστροφής.
- Καθώς το πρόβλημα είναι εν γένει μη γραμμικό, η επίλυση γίνεται μέσω επαναληπτικών βημάτων.
- Στόχος είναι η ελαχιστοποίηση της σταθμισμένης ρίζας του μέσου τετραγώνου των χρονικών αποκλίσεων (weighted RMS, ή wRMS error):

$$wRMS = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (w_i R_i)^2}{\sum_{i=1}^N w_i^2}}$$

- Όπου w_i το βάρος της εκάστοτε μέτρησης χρόνου άφιξης (P ή S) σε κάθε σταθμό.

Αντιστροφή με Hypolnverse

- Το Hypolnverse χρησιμοποιεί μια διαδικασία παρόμοια με αυτή που ήδη περιγράφηκε.
- Το διάνυσμα διόρθωσης μοντέλου ($\delta \mathbf{m}$) εδώ καλείται $\mathbf{DX}$, και έχει τη μορφή:

$$\underset{n}{\mathbf{DX}} = \underset{n \times n}{\mathbf{V}} \cdot \underset{n \times n}{\mathbf{S}^{-1}} \cdot \underset{n \times m}{\mathbf{U}^T} \cdot \underset{m}{\mathbf{R}}$$

- Όπου εδώ m ο αριθμός μετρήσεων, και n ο αριθμός παραμέτρων ($n=4$), $\mathbf{S}$ ο πίνακας ιδιοτιμών, $\mathbf{R}$ ο πίνακας χρονικών υπολοίπων ($\mathbf{d}$ στον προηγούμενο φορμαλισμό), $\mathbf{V}$ και $\mathbf{U}$ οι πίνακες ιδιοδιανυσμάτων.

Αντιστροφή με Hypolnverse

$$\begin{matrix} \mathbf{DX} & = & \mathbf{V} & \cdot & \mathbf{S}^{-1} & \cdot & \mathbf{U}^T & \cdot & \mathbf{R} \\ n & & n \times n & & n \times n & & n \times m & & m \end{matrix}$$

- Ο πίνακας συνδιακύμανσης $\mathbf{C}$ για τη διόρθωση κατά $\mathbf{DX}$:

$$\begin{matrix} \mathbf{C} & = & w^2 & & \mathbf{V} & \cdot & \mathbf{S}^{-2} & \cdot & \mathbf{V}^T \\ n \times n & & & & n \times n & & n \times n & & n \times n \end{matrix}$$

- Όπου w μια σταθερά (αντίστοιχη του σ^2 που είδαμε νωρίτερα).
- Φαίνεται και εδώ ότι οι μικρές ιδιοτιμές:
 - Προκαλούν μεγάλες διορθώσεις (πίνακας $\mathbf{DX}$) προς την αντίστοιχη κατεύθυνση (κατά $1/\lambda_i$)
 - Αυξάνουν την αβεβαιότητα (πίνακας $\mathbf{C}$) (κατά $1/\lambda_i^2$).
- Συνήθως η μικρότερη ιδιοτιμή $\lambda_{\min}$ αντιστοιχεί στο βάθος (η δυσκολότερη παράμετρος στον προσδιορισμό).
- Συνήθως η μεγαλύτερη ιδιοτιμή $\lambda_{\max}$ αντιστοιχεί στον χρόνο γένεσης (η ευκολότερη παράμετρος στον προσδιορισμό).

Αντιστροφή με HypolInverse

- Το $\lambda_{\max}$ είναι συνήθως της τάξεως του 5, ενώ για τις χωρικές παραμέτρους τα λ κυμαίνονται μεταξύ 0.3 και 0.7.
- Η μεγάλη διαφορά μεταξύ $\lambda_{\max}$ (χρόνου γένεσης) και των λ_i των χωρικών παραμέτρων έγκειται στο γεγονός ότι χρειάζεται μεταβολή αρκετών km στο υπόκεντρο για να προκληθεί η ίδια μεταβολή στους υπολογιζόμενους χρόνους άφιξης σε σχέση με τη μεταβολή 1 sec στον χρόνο γένεσης.
- Η λύση γίνεται ασταθής αν π.χ. $\lambda_{\min} < 0.02$
- Αντίστοιχα, η λύση γίνεται ασταθής αν ο αριθμός συνθήκης $\kappa = \lambda_{\max} / \lambda_{\min} > 200$

Πυκνότητα πληροφορίας

- Η σημαντικότητα ενός σταθμού που υπολογίζεται από τον πίνακα πυκνότητας πληροφορίας D λαμβάνει υπόψη τα βάρη των μετρήσεων και εξαρτάται από το είδος του σεισμικού κύματος.
- Αν οι μερικές παράγωγοι του Ιακωβιανού πίνακα είναι μεγάλες για ορισμένο σταθμό, αυτό αυξάνει τη σημαντικότητα του σταθμού (παίζει σημαντικότερο ρόλο στη συνολική διόρθωση του μοντέλου).
- Σταθμοί που βρίσκονται πολλοί συγκεντρωμένοι στο ίδιο αζιμούθιο αποκτούν ο καθένας τους μικρότερη σημαντικότητα.
- Σταθμός που είναι μοναδικός σε ορισμένο αζιμούθιο, κλείνοντας ένα «κενό» έχει μεγαλύτερη σημαντικότητα/βαρύτητα στη διόρθωση του μοντέλου (ισχυρή γεωμετρική επιρροή).

Πυκνότητα πληροφορίας

- Οι χρόνοι άφιξης των κυμάτων S παίζουν σημαντικότερο ρόλο στη διόρθωση (μεγαλύτερες τιμές στον πίνακα πυκνότητας πληροφορίας).
- Αυτό οφείλεται στο ότι, λόγω μικρότερης ταχύτητας διάδοσης, οι μερικές παράγωγοι των χρόνων άφιξης ως προς τις χωρικές παραμέτρους το μοντέλου είναι μεγαλύτερες από τις αντίστοιχες των κυμάτων P για τον ίδιο σταθμό κατά έναν παράγοντα T_S/T_P .
- Προς αντιστάθμιση αυτής της ισχυρότερη επιρροής, και λόγω του συνήθως μεγαλύτερου σφάλματος ανάγνωσης των χρόνων άφιξης των κυμάτων S , συνήθως δίνονται μικρότερα βάρη στα S .

Σφάλματα με HypolInverse

$$\underset{n}{\mathbf{D}\mathbf{X}} = \underset{n \times n}{\mathbf{V}} \cdot \underset{n \times n}{\mathbf{S}^{-1}} \cdot \underset{n \times m}{\mathbf{U}^T} \cdot \underset{m}{\mathbf{R}}$$

$$\underset{n \times n}{\mathbf{C}} = \underset{n \times n}{w^2} \cdot \underset{n \times n}{\mathbf{V}} \cdot \underset{n \times n}{\mathbf{S}^{-2}} \cdot \underset{n \times n}{\mathbf{V}^T}$$

- Τα τυπικά σφάλματα των παραμέτρων του μοντέλου προκύπτουν από τις τετραγωνικές ρίζες των στοιχείων της διαγωνίου του:
 - Σε sec για τον χρόνο γένεσης
 - Σε km για τις χωρικές παραμέτρους (τα γεωγρ. πλάτη και μήκη μετατρέπονται σε συντεταγμένες x, y στον Ευκλείδειο χώρο).
- Αν αφαιρεθεί η στήλη/γραμμή που αντιστοιχεί στον χρόνο γένεσης, με εφαρμογή αποσύνθεσης ιδιαζουσών τιμών (που εδώ ισοδυναμεί με ανάλυση κύριων συνιστωσών) στον υποπίνακα $\mathbf{C}$ ορίζονται οι κύριοι άξονες (ιδιοδιανύσματα) και τα μήκη τους (ιδιοτιμές) στο ελλειψοειδές χωρικού σφάλματος (error ellipsoid).

Σφάλματα με HypolInverse

$$\underset{n}{\mathbf{D}\mathbf{X}} = \underset{n \times n}{\mathbf{V}} \cdot \underset{n \times n}{\mathbf{S}^{-1}} \cdot \underset{n \times m}{\mathbf{U}^T} \cdot \underset{m}{\mathbf{R}}$$

$$\underset{n \times n}{\mathbf{C}} = \underset{n \times n}{w^2} \cdot \underset{n \times n}{\mathbf{V}} \cdot \underset{n \times n}{\mathbf{S}^{-2}} \cdot \underset{n \times n}{\mathbf{V}^T}$$

- Με βάση τα στοιχεία του τελικού βήματος προσδιορισμού, το υπόκεντρο βρίσκεται με 32% πιθανότητα εντός του ελλειψοειδούς, ή με 95% πιθανότητα αν τα μήκη των αξόνων (τυπικά σφάλματα) πολλαπλασιαστούν με 2.4.
- Από την προβολή των αξόνων του ελλειψοειδούς σφάλματος σε A-Δ, B-N, πάνω-κάτω, υπολογίζονται τα χωρικά σφάλματα ERX, ERY, ERZ.
- Σημείωση:
 - Το υπολογιζόμενο χωρικό σφάλμα βασίζεται μόνο στις μερικές παραγώγους που υπολογίζονται στη θέση του τελικού υποκέντρου.
 - Το σφάλμα αυτό είναι απλώς μια εκτίμηση που προκύπτει από την αντιστροφή, και δεν λαμβάνει υπόψη τις τυχόν αβεβαιότητες στο μοντέλο ταχυτήτων που έχει χρησιμοποιηθεί ή σε ασυνέχειες πάνω ή κάτω από το υπόκεντρο.

Βήματα διαδικασίας

- Η μέθοδος εντοπισμού περιλαμβάνει:
 1. Εκτίμηση αρχικού / δοκιμαστικού (trial) μοντέλου (δίνεται για κάθε σεισμό ή εκτιμάται από τον αλγόριθμο)
 2. Υπολογισμό wRMS για το δοκιμαστικό μοντέλο
 3. Υπολογισμό διανύσματος διόρθωσης προς ελαχιστοποίηση του wRMS
 4. Εφαρμογή της διόρθωσης ή κάποιας τροποποίησής της (αν η επικείμενη διόρθωση είναι προβληματική)
 5. Επανάληψη των βημάτων 2–4 μέχρι να υπάρξει σύγκλιση ή να πληρούνται τα κριτήρια τερματισμού

Δοκιμαστικό μοντέλο

- Το αρχικό, «δοκιμαστικό» μοντέλο (υποθετικό υπόκεντρο και χρόνος γένεσης) είτε δίνεται από τον χρήστη για τον κάθε σεισμό, ή το ορίζει το πρόγραμμα ως εξής:
- Αρχικός χρόνος: Ορίζεται 2 sec πριν από την πρώτη άφιξη σεισμικού κύματος.
- Αρχικό επίκεντρο: Τοποθετείται ακριβώς στη θέση του σταθμούς που κατέγραψε την πρώτη άφιξη.
- Αρχικό βάθος: Ορίζεται από την τιμή της παραμέτρου ZTR που δίνεται στο πρόγραμμα.
- Κατά τις πρώτες επαναλήψεις, το βάθος παραμένει σταθερό μέχρι η οριζόντια διόρθωση να γίνει μικρότερη μια τιμή «DXFIX» που δίνεται στο πρόγραμμα με την παράμετρο DAM.
- Αν η τιμή ZTR είναι αρνητική, τότε όλα τα γεγονότα σε αυτή την εκτέλεση διατηρούνται σε αυτό το βάθος (τη θετική του τιμή), εκτός αν έχει οριστεί προσωρινά διαφορετικό βάθος ένα συγκεκριμένο γεγονός.

Διαδικασία αντιστροφής

- Η διαδικασία εντοπισμού του υποκέντρου μπορεί να προσαρμοστεί μέσω παραμέτρων απόσβεσης στις διορθώσεις, ειδικά όταν αυτές γίνονται μεγάλες ή ασταθείς.
- Η παράμετρος DAM (DAMP) είναι ένας πολλαπλασιαστικός παράγοντας απόσβεσης (*damping*) για τη διόρθωση του υποκέντρου πριν από κάθε επαναληπτικό βήμα.
 - Στο τελευταίο 1/3 των επιτρεπόμενων επαναλήψεων, το DAMP μειώνεται στο μισό για να αυξηθεί η απόσβεση.
 - Έχει βρεθεί εμπειρικά ότι αν οι τελευταίες επαναλήψεις έχουν πιο «ήπιες» διορθώσεις, αυτό βοηθάει στη σύγκλιση.

Έλεγχοι διορθώσεων

- Αποφυγή αρνητικών βαθών: Αν ένα βήμα τοποθετεί το υπόκεντρο πάνω από την επιφάνεια («αεροσεισμός», ή «air-quake»), τότε το υπόκεντρο μετακινείται σε βάθος ίσο με ένα ποσοστό του τρέχοντος βάθους.
- Αν η τιμή RMS αυξηθεί περισσότερο από μια τιμή RBACK μετά από μια επανάληψη, το υπόκεντρο μετακινείται πίσω προς την προηγούμενη θέση κατά ένα ποσοστό BACFAC.
- Αυτό μπορεί να συμβεί αν το υποκέντρο περνάει από μια περιοχή με ισχυρή ασυνέχεια στο μοντέλο ταχυτήτων.
- Οι ιδιοτιμές που βρίσκονται κάτω από ένα όριο EIGTOL θεωρούνται ασταθείς και αγνοούνται (δεν γίνεται διόρθωση στην παράμετρο του μοντέλου που αντιστοιχεί σε προβληματικά μικρή ιδιοτιμή).
- Το μέγιστο επιτρεπτό βήμα διόρθωσης υποκέντρου σε κάθε επανάληψη ορίζεται με μια παράμετρο DXMAX, ώστε να αποφεύγονται υπερβολικά μεγάλες διορθώσεις.
- Αν η επικεντρική απόσταση από τον δεύτερο πλησιέστερο σταθμό υπερβαίνει την τιμή D2FAR (π.χ. 250 km), η διαδικασία επαναλήψεων σταματά (π.χ., το γεγονός βρίσκεται εκτός του δικτύου και δεν μπορεί να εντοπιστεί αξιόπιστα.)

Τερματισμός αντιστροφής

- Η διαδικασία εντοπισμού του υποκέντρου μπορεί να τερματιστεί με έναν από τους εξής τρεις τρόπους:
 1. Όριο επαναλήψεων: Όταν ο αριθμός επαναλήψεων φτάσει ένα μέγιστο επιτρεπτό όριο ITRLIM.
 2. Μικρή μεταβολή RMS: Όταν η μεταβολή της τιμής RMS μεταξύ δύο επαναλήψεων γίνει μικρότερη από μια τιμή DRQT.
 3. Μικρή διόρθωση υποκέντρου: Όταν το διάνυσμα διόρθωσης του υποκέντρου γίνει μικρότερο από μια τιμή DQUI.T σε km.

Βάρη μετρήσεων

- Τα βάρη των μετρήσεων P και S στο HypolInverse τίθενται από τον αναλυτή υπό τη μορφή κλάσης ποιότητας (quality class), με έναν αριθμό 0 (καλή μέτρηση, ισχυρό βάρος) έως 4 (μηδενικό βάρος, απόρριψη μέτρησης).
- Οι κλάσεις ποιότητας τυπικά αντιπροσωπεύουν μια αβεβαιότητα σε msec ως προς τη μέτρηση του χρόνου άφιξης (σφάλμα ανάγνωσης).
- Το μέσο εκτιμώμενο σφάλμα ανάγνωσης τίθεται από τον χρήστη στην παράμετρο ERR του προγράμματος και συνεκτιμάται κατά τον προσδιορισμό των χωρικών αβεβαιοτήτων.

Table 1. Weight assignments and associated uncertainty intervals used for the automated repicking of P -phases.

Quality class	Error ε_{qP} (s)	Weight (per cent)	# Observations
0	± 0.050	100	5387
1	± 0.100	50	4875
2	± 0.200	25	1822
3	± 0.400	12.5	1225
4	> 0.400	0.0	Not considered

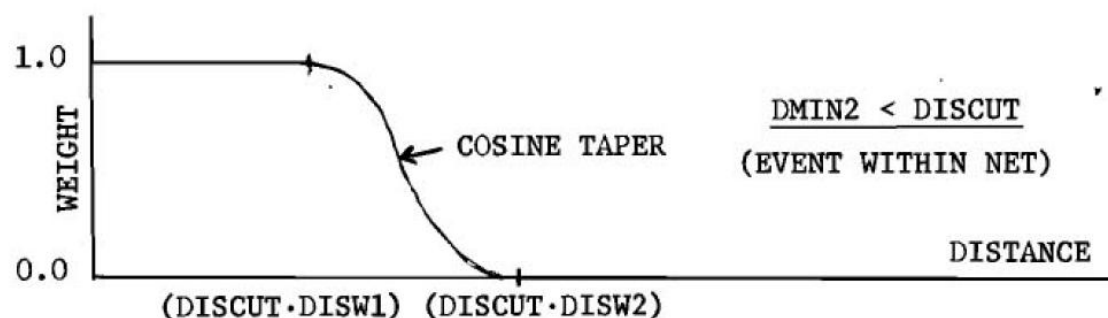
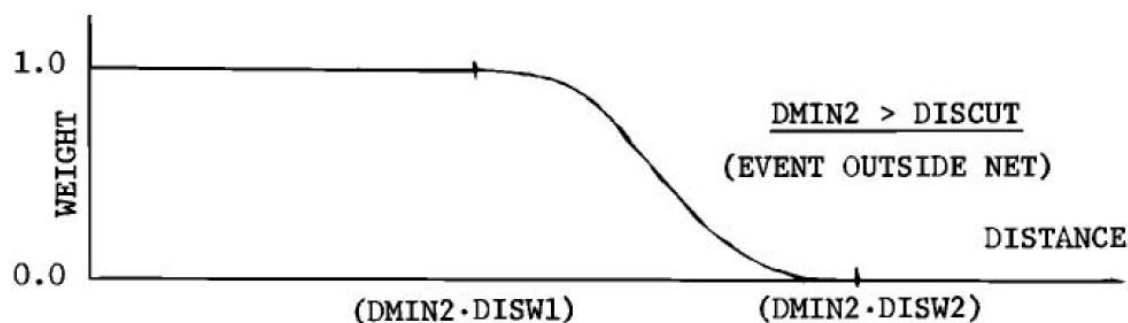
Βάρη αποστάσεων

- Επιπλέον, το Hypoinverse ρυθμίζει τα βάρη των μετρήσεων με βάση την επικεντρική απόσταση των σταθμών.
- Οι σταθμοί σε μικρές επικεντρικές αποστάσεις οφείλουν γενικά να έχουν σημαντικότερο ρόλο έναντι των μακρινών στην επίλυση του προβλήματος, καθώς:
 - Οι καταγραφές τους έχουν ισχυρότερο λόγο σήματος προς θόρυβο, συνεπώς οι χρόνοι τους έχουν μικρότερο σφάλμα ανάγνωσης.
 - Περιορίζουν περισσότερο το εστιακό βάθος
 - Μικρές αλλαγές στο υπόκεντρο ($\delta\mathbf{m}$) επιφέρουν ισχυρότερες σχετικές μεταβολές στους χρόνους διαδρομής ($\delta T/T$), συνεπώς είναι πιο «ευαίσθητοι» και συμβάλλουν περισσότερο στην αντιστροφή.
 - Οι σεισμικές ακτίνες που φτάνουν σε αυτούς είναι πιθανόν ανοδικές και γενικά μικρότερου μήκους / μικρότερη επίδραση από μη μοντελοποιημένες ετερογένειες της δομής
 - Για να φτάσουν σε μακρινούς σταθμούς, οι σεισμικές ακτίνες ταξιδεύουν βαθύτερα, ενδεχομένως σε βάθη στα οποία το απλό 1D μοντέλο ταχυτήτων δεν περιέχει πληροφορία.

Βάρη αποστάσεων

- Το HypInverse ρυθμίζει τα βάρη αποστάσεων με την παράμετρο DIS, λαμβάνοντας υπόψη:
 - Ο αριθμός επανάληψης ITRDIS για την έναρξη της στάθμισης βάσει απόστασης
 - Ένα ελάχιστο όριο απόστασης DISCUT
 - Την απόσταση του 2^{ου} πλησιέστερου σταθμού (DMIN2)
 - Δύο πολλαπλασιαστικούς παράγοντες DISW1, DISW2 για την αρχή και τη λήξη της σταδιακής ελάττωσης βάρους με αυξανόμενη απόσταση.
- Οι παράμετροι αυτές ορίζονται από τον χρήστη, ανάλογα με τη γεωμετρία του δικτύου και την αναμενόμενη κατανομή των επικεντρικών αποστάσεων.

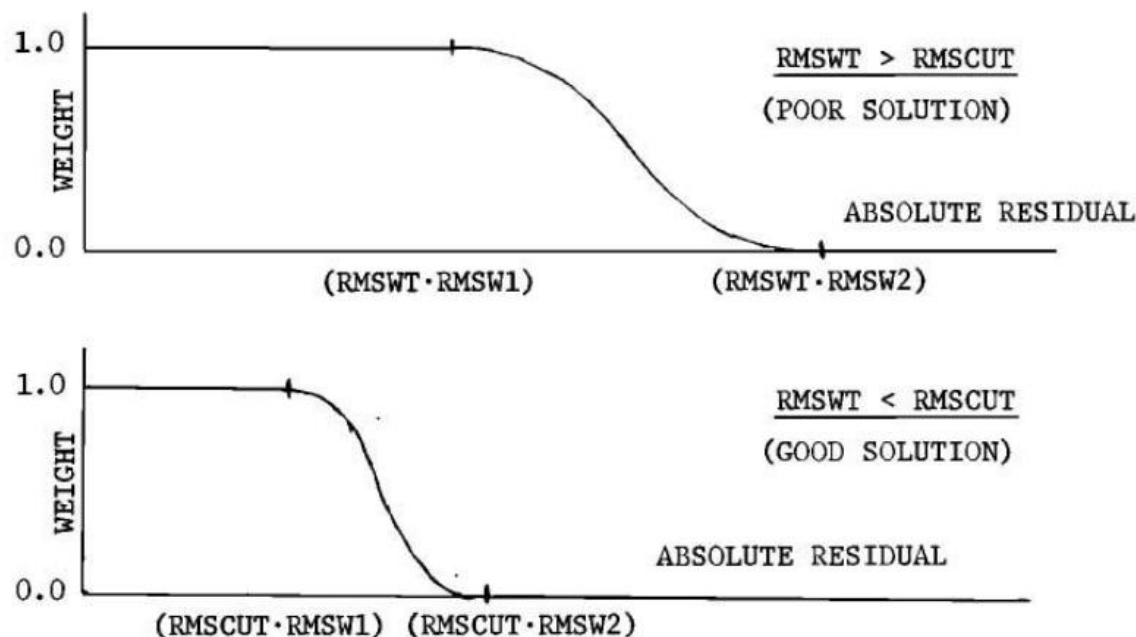
Βάρη αποστάσεων



- Οι παράμετροι αυτές ορίζονται από τον χρήστη, ανάλογα με τη γεωμετρία του δικτύου και την αναμενόμενη κατανομή των επικεντρικών αποστάσεων.
- Με αυτό το σχήμα στάθμισης βάσει απόστασης, το Hypolnverse πετυχαίνει:
 - Μείωση βάρους των μακρινών σταθμών όταν ο σεισμός είναι **εντός** του δικτύου
 - Χρήση όλων των σταθμών όταν ο σεισμός είναι **εκτός** του δικτύου.

Βάρη χρονικών υπολοίπων

- Το HypoInverse απομειώνει αυτόματα τα βάρη μετρήσεων οι οποίες παράγουν ανώμαλα υψηλά χρονικά υπόλοιπα.
- Τέτοιες περιπτώσεις μπορεί να οφείλονται:
 - σε προβληματική μέτρηση / λάθος από τον αναλυτή, ή σε μέτρηση κάποιας δευτερεύουσας φάσης αντί της κύριας P ή S που «προβλέπεται» από το μοντέλο ταχυτήτων
 - σε πρόβλημα στον χρονισμό του σταθμού (συστηματική απόκλιση του ρολογιού του σταθμού από τον σωστό χρόνο GMT)



Μοντέλα ταχυτήτων

- Η επιλογή ενός κατάλληλου μοντέλου ταχυτήτων παίζει σημαντικό ρόλο στην επίλυση του προβλήματος προσδιορισμού των εστιακών παραμέτρων.
- Ένα 1Δ μοντέλο ταχυτήτων, αποτελούμενο από διακριτά ομοιογενή οριζόντια στρώματα, πρέπει να προσεγγίζει τη γενική εικόνα της πραγματικής δομής σε «μεγάλη κλίμακα», εξισορροπώντας τις πλευρικές ανομοιογένειες.
- Οι ασυνέχειες σε ένα 1Δ μοντέλο ταχυτήτων μπορεί να αντιπροσωπεύουν πραγματικές ασυνέχειες στη δομή (π.χ., ασυνέχεια Moho) ή να χρησιμεύουν στο να δημιουργήσουν μια ψευδο-βαθμίδα ταχύτητας ώστε να προκαλέσουν κάμψη στις σεισμικές ακτίνες.
- Ένα «προβληματικό» μοντέλο ταχυτήτων μπορεί:
 - Να προκαλέσει συστηματικά σφάλματα στις εστιακές παραμέτρους (π.χ., να μετατοπίσει όλα τα υπόκεντρα βαθύτερα ή ρηχότερα απ' ότι πρέπει).
 - Να δημιουργήσει τεχνητά κενά ή συγκεντρώσεις υποκέντρων κοντά σε ασυνέχειες ή εντός ορισμένου στρώματος.
 - Σε συνδυασμό με τα παραπάνω, μπορεί να επηρεάσει τη διαδρομή των σεισμικών ακτινών και την κατανομή των σταθμών πάνω στην εστιακή σφαίρα (σημαντικό π.χ. για μηχανισμούς γένεσης).

Επίδραση στην επίλυση μηχανισμών γένεσης

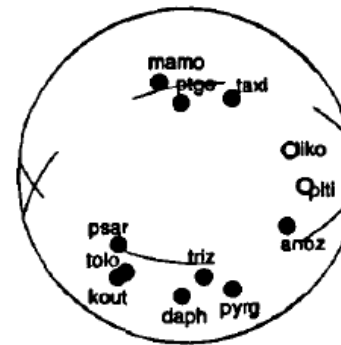
- Παράδειγμα εύρεσης μηχανισμών γένεσης με τη βοήθεια ενός βελτιωμένου μοντέλου ταχυτήτων (Model 2).

Table 1. P-wave velocity models used for the earthquake locations. $V_p/V_s = 1.80$.

	Model 1	Model 2
Depth (km)	V_p (km/s)	V_p (km/s)
0.0 - 4.0	5.6	4.8
4.0 - 7.2		5.2
7.2 - 8.2		5.8
8.2 - 10.4		6.1
10.4 - 15.0		6.3
15.0 - 30.0	6.5	6.5
> 30.0	7.0	7.0

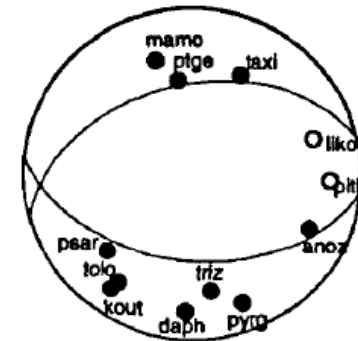
Model 1

188



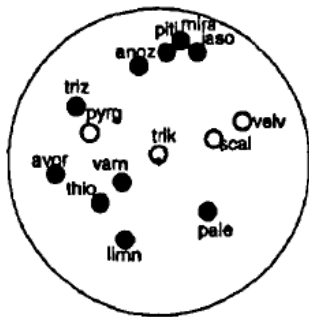
Model 2

188



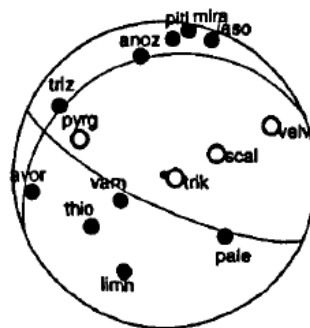
Model 1

398

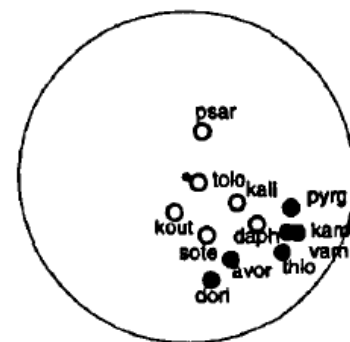


Model 2

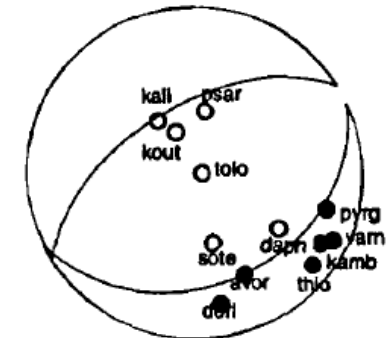
398



97



97



Αναζήτηση σε κάνναβο

- Ένας τρόπος να κατασκευάσουμε ένα νέο ή να βελτιώσουμε ένα υπάρχον μοντέλο ταχυτήτων για μια περιοχή είναι με τη μέθοδο αναζήτησης σε κάνναβο (grid-search).
- Έστω ότι ξεκινάμε με ένα αρχικό μοντέλο, π.χ., μοντέλο Rigo et al. (1996) για τον Δ. Κορινθιακό κόλπο.

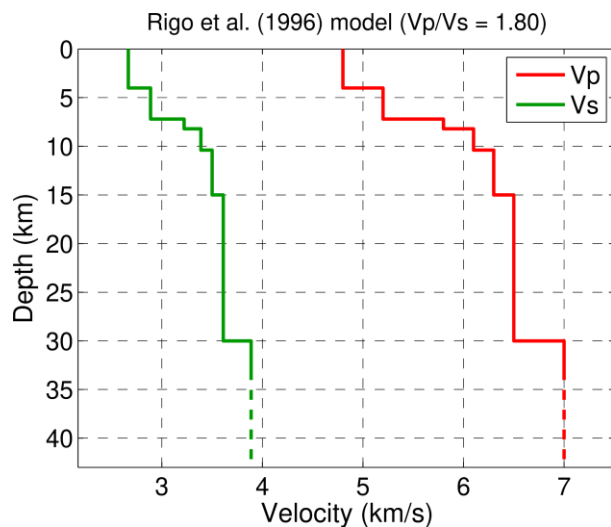


Table 1. *P*-wave velocity models used for the earthquake locations. $V_p/V_s = 1.80$.

	Model 1	Model 2
Depth (km)	V_p (km/s)	V_p (km/s)
0.0 - 4.0	5.6	4.8
4.0 - 7.2		5.2
7.2 - 8.2		5.8
8.2 - 10.4		6.1
10.4 - 15.0		6.3
15.0 - 30.0	6.5	6.5
> 30.0	7.0	7.0

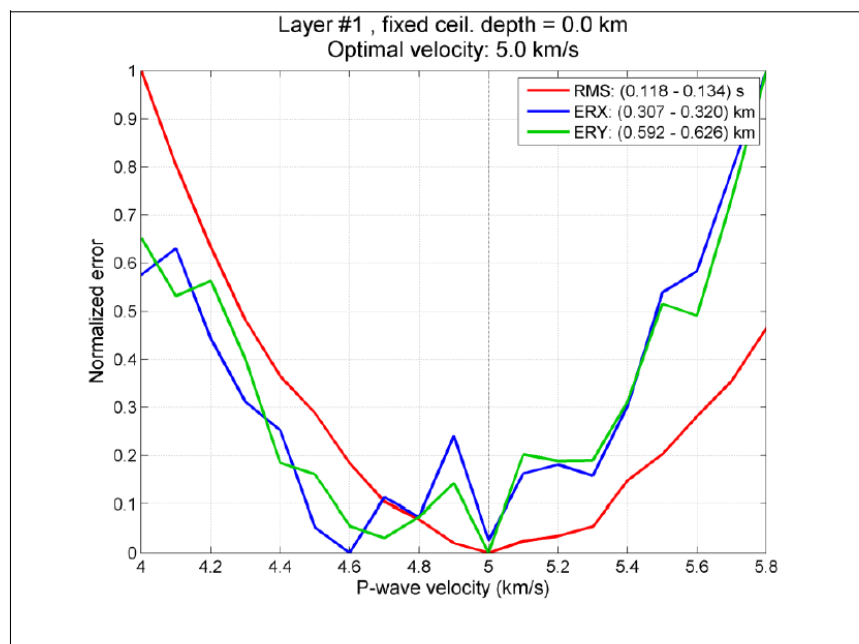
	1	2	3
Rigo et al. (1996) ($V_p/V_s=1.80$)	4.8	0.0	
	5.2	4.0	
	5.8	7.2	
	6.1	8.2	
	6.3	10.4	
	6.5	15.0	
	7.0	30.0	

Αναζήτηση σε κάνναβο

- Για την κατασκευή ενός βελτιωμένου μοντέλου ταχυτήτων είναι απαραίτητο να ξεκινήσουμε με κατάλληλη επιλογή καλά προσδιορισμένων σεισμών με επαρκή δεδομένα, εξετάζοντας τα παρακάτω κριτήρια (Καρακωνσταντής, 2017):
 - Σχετικά ομοιόμορφη χωρική κατανομή των επικέντρων στην υπό μελέτη περιοχή (αποφυγή χρήσης πολλών σεισμών συγκεντρωμένους σε χωρικές συστάδες).
 - Διαθεσιμότητα χρόνων άφιξης P και S σε επαρκή αριθμό σταθμών (π.χ., >8) εντός του εύρους που λαμβάνει υπόψη το λογισμικό προσδιορισμού εστιακών παραμέτρων (π.χ. HypoInverse).
 - Έλεγχος των χωρικών (ERH, ERZ) και χρονικών σφαλμάτων (RMS), και επιλογή υποσυνόλου σεισμών με σχετικά μικρά σφάλματα.
 - Ομοιόμορφη κατανομή υποκέντρων ανά βάθος.
 - Εξαίρεση φάσεων Pn, Sn, λόγω συνήθως μεγάλων σφαλμάτων.
- Σκοπός είναι να προσδιοριστούν:
 - Ο βέλτιστος αριθμός στρωμάτων.
 - Τα πάχη των στρωμάτων.
 - Οι ταχύτητες V_p σε κάθε στρώμα.
 - Ο μέσος λόγος V_p/V_s .

Αναζήτηση σε κάνναβο

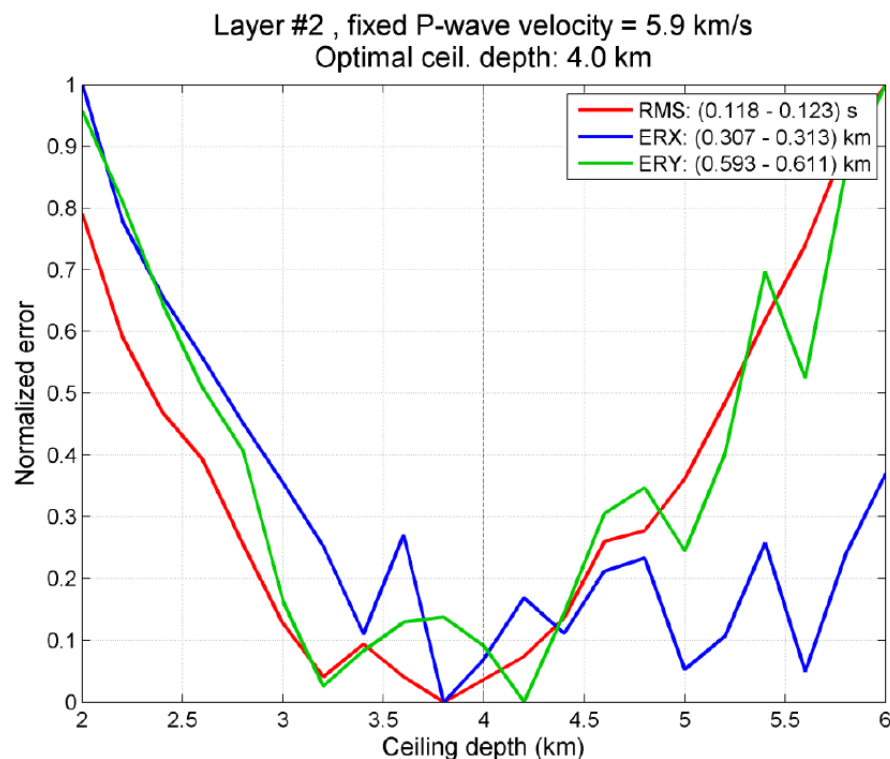
- Ξεκινώντας από το 1^ο στρώμα (επιφανειακό) του αρχικού μοντέλου, ορίζεται ένα εύρος τιμών ταχυτήτων V_p για μια σειρά δοκιμών.
- Για κάθε «δοκιμή» διαφορετικής ταχύτητας, εκτελείται το πρόγραμμα προσδιορισμού εστιακών παραμέτρων (π.χ., HypoInverse) και υπολογίζονται τα μέσα χωρικά και χρονικά σφάλματα.
- Εντοπίζεται η τιμή ταχύτητας που ελαχιστοποιεί το σφάλμα RMS (κατά κύριο λόγο), και δευτερευόντως τα χωρικά σφάλματα.



Εικ. 3.4 Ενδεικτικό παράδειγμα γραφικών παραστάσεων υπολογισμού ταχύτητας διάδοσης των κυμάτων P του πρώτου στρώματος.

Αναζήτηση σε κάνναβο

- Αντίστοιχη διαδικασία εκτελείται και για τον προσδιορισμό του βάθους μιας ασυνέχειας, εξετάζοντας ένα εύρος επιτρεπτών τιμών και διατηρώντας όλες τις άλλες παραμέτρους σταθερές (ταχύτητες στρωμάτων και βάθη άλλων ασυνεχειών).



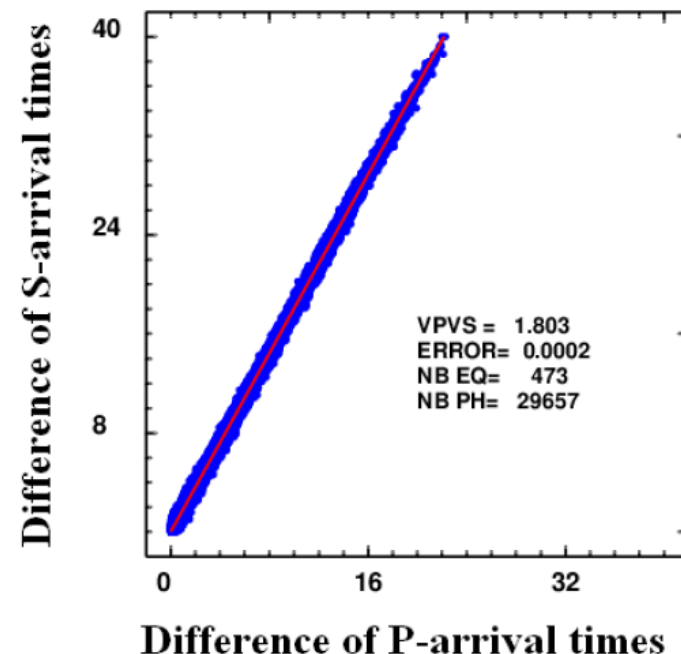
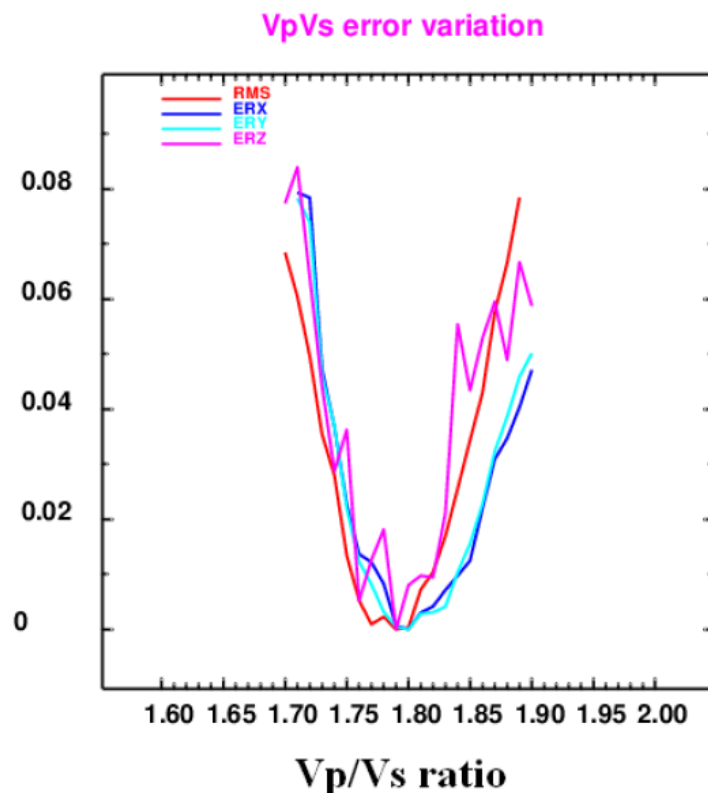
Εικ. 3.5 Ενδεικτικό παράδειγμα γραφικών παραστάσεων υπολογισμού βάθους οροφής του δεύτερου στρώματος.

Αναζήτηση σε κάνναβο

- Από τον τρόπο που διαμορφώνονται οι καμπύλες των σφαλμάτων, μπορεί να χρειαστεί να προστεθεί ή να αφαιρεθεί ένα στρώμα.
- Για να βρεθεί ένα βέλτιστο μοντέλο χρειάζονται πολλές σειρές δοκιμών, τόσο με το σύνολο των δεδομένων όσο και με επιλογές υποσυνόλου δεδομένων (π.χ., σεισμοί με εστιακά βάθη μόνο λίγο βαθύτερα από το εκτιμώμενο βάθος της υπό προσδιορισμό ασυνέχειας (Καρακωνσταντής, 2017)).
- Εξετάζονται εναλλακτικά αρχικά μοντέλα καθώς και η πλήρης κατασκευή μοντέλου ξεκινώντας από έναν απλό ημιχώρο.

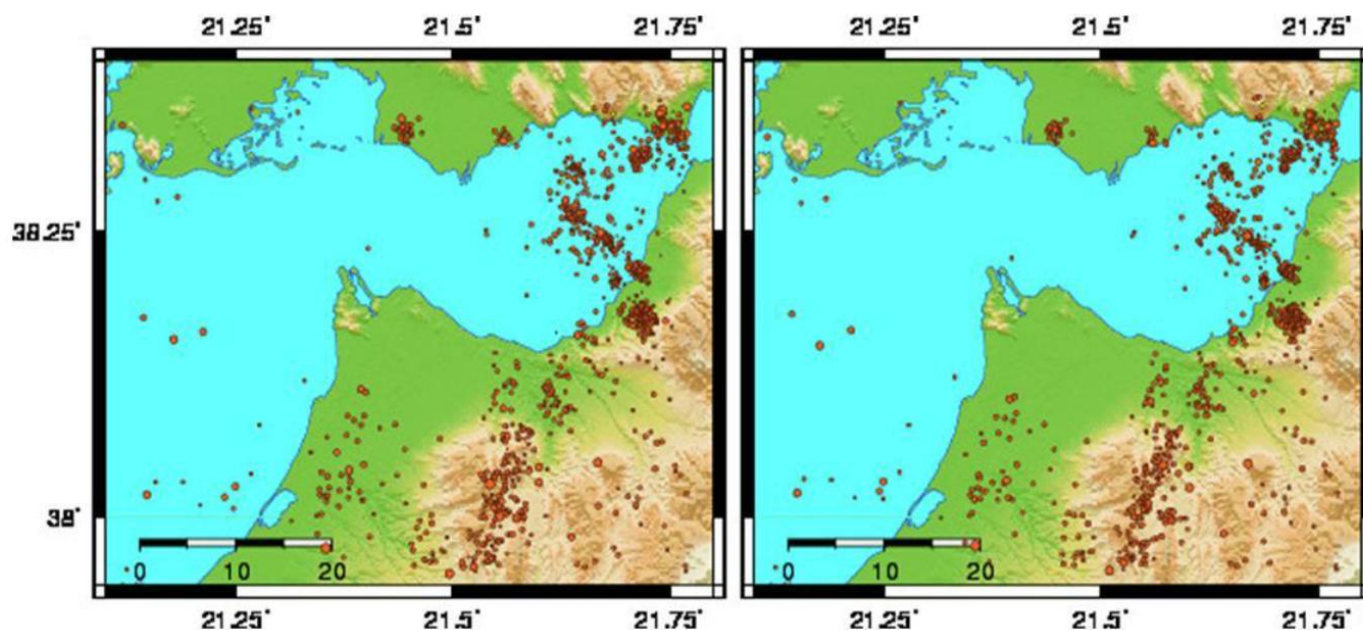
Αναζήτηση σε κάνναβο

- Αφού βρεθεί ένα κατάλληλο 1Δ μοντέλο για τις ταχύτητες V_p , ο λόγος V_p/V_s μπορεί να προσδιοριστεί:
 - Είτε με εκ νέου αναζήτηση σε κάνναβο, δοκιμάζοντας ένα εύρος αποδεκτών τιμών V_p/V_s
 - Είτε με μεθόδους όπως η Wadati (1933) και η Chatelain (1978).



Εστιακές παράμετροι με βελτιωμένο μοντέλο ταχυτήτων

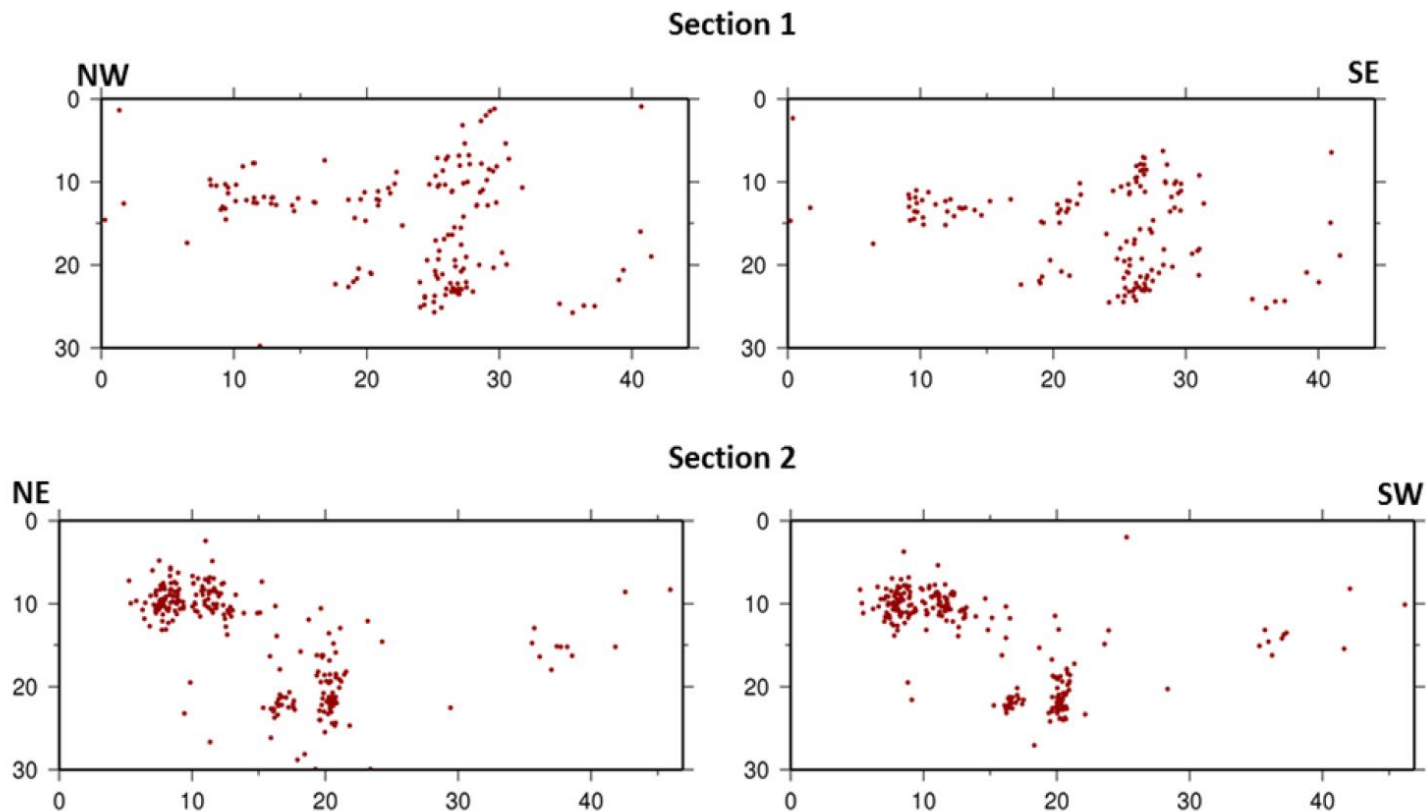
- Η χρήση ενός βέλτιστου 1Δ μοντέλου ταχυτήτων επιφέρει μείωση των RMS χρονικών υπολοίπων αλλά και των χωρικών αβεβαιοτήτων απόλυτου εντοπισμού των υποκέντρων.
- Το δεύτερο έχει ως συνέπεια να μειώνεται η διασπορά στην κατανομή των υποκέντρων ανάμεσα σε χωρικά συσχετισμένους σεισμούς (που ανήκουν σε ίδιες ενεργές δομές).



Εικ. 3.38 Επιλεγμένα επίκεντρα προσδιορισμένα με το γενικό (αριστερά) 1-Δ μοντέλο και το τοπικό (δεξιά) που κατασκευάστηκε με τα παρόντα δεδομένα.

Εστιακές παράμετροι με βελτιωμένο μοντέλο ταχυτήτων

- Πολλές φορές οι βελτιώσεις μπορούν να γίνουν περισσότερο αντιληπτές στην κατανομή των εστιακών βαθών.



Εικ. 3.39 Τομές για τα επιλεγμένα στην περιοχή σεισμικά γεγονότα, προσδιορισμένα με το αρχικό (αριστερά) και τελικό (δεξιά) 1-Δ πρότυπο στρωματοποιημένης δομής ταχυτήτων κυμάτων χώρου.

- Diehl, T., Kissling, E., Husen, S., Aldersons, F., 2009. Consistent phase picking for regional tomography models: application to the greater Alpine region. *Geophys. J. Int.* 176, 542–554. <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2008.03985.x>
- Klein, F.W., 2002. User's guide to HYPOINVERSE-2000: a Fortran program to solve for earthquake locations and magnitudes. U.S. Geol. Surv. Prof. Pap., Open File Report rep. 02-17, 1–123.
- Lay, T. and Wallace, T. , 1995. *Modern Global Seismology*. Academic Press, Inc., Cambridge, MA, 521 p.
- Menke, W. (2024). *Geophysical Data Analysis and Inverse Theory with MATLAB® and Python* (5th ed.). Academic Press.
- Rigo, A., Lyon-Caen, H., Armijo, R., Deschamps, A., Hatzfeld, D., Makropoulos, K., Papadimitriou, P., Kassaras, I., 1996. A microseismic study in the western part of the Gulf of Corinth (Greece): Implications for large-scale normal faulting mechanisms. *Geophys. J. Int.* 126, 663–688. <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1996.tb04697.x>
- Καρακωνσταντής, Α., 2017. Προσομοίωση τρισδιάστατης δομής φλοιού και ανώτερου μανδύα ελλαδικού χώρου με σεισμική τομογραφία, διδακτορική διατριβή, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών (ΕΚΠΑ). Σχολή Θετικών Επιστημών. Τμήμα Γεωλογίας και Γεωπεριβάλλοντος. Τομέας Γεωφυσικής - Γεωθερμίας. <https://www.didaktorika.gr/eadd/handle/10442/40719>

Παράρτημα

Στοιχεία από γραμμική άλγεβρα

Πρόβλημα ιδιοτιμών

- Ως **πρόβλημα ιδιοτιμών** (eigenvalues) ορίζεται η εξίσωση:

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{d} = \lambda \mathbf{d}$$

- Όπου $\mathbf{G}$ ένας **τετραγωνικός** πίνακας $n \times n$

Το ομογενές σύστημα: $[\mathbf{G} - \lambda \mathbf{I}] \cdot \mathbf{d} = \mathbf{O}_n$

έχει μη-μηδενικές λύσεις μόνο όταν η ορίζουσα: $|\mathbf{G} - \lambda \mathbf{I}| = 0$

(όπου $\mathbf{I} = \mathbf{I}_n$ ο ταυτοτικός $n \times n$ πίνακας ενώ $\mathbf{O}_n$ ο μηδενικός)

Χαρακτηριστική Εξίσωση

$$|\mathbf{G} - \lambda \mathbf{I}| = 0 \Rightarrow \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1\lambda + \alpha_0 = 0$$

- Το παραπάνω πολυώνυμο ονομάζεται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** και η εξίσωση **χαρακτηριστική εξίσωση** του $\mathbf{G}$
- Οι ρίζες της εξίσωσης ονομάζονται **ιδιοτιμές** (eigenvalues)
- Για τις ιδιοτιμές λ_i ($i=1,2,\dots,n$) ισχύει: $\mathbf{G}\mathbf{u}_i = \lambda_i\mathbf{u}_i$
- Τα $\mathbf{u}_i$ είναι τα **ιδιοδιανύσματα** (eigenvectors) του $\mathbf{G}$.
- Σε κάθε $\mathbf{u}_i$ αντιστοιχεί μια συγκεκριμένη ιδιοτιμή λ_i

Χαρακτηριστική Εξίσωση

- Ορίζουμε τον πίνακα ιδιοτιμών: $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$

- και τον πίνακα ιδιοδιανυσμάτων: $U = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^1 & \mathbf{u}_1^2 & \dots & \mathbf{u}_1^n \\ \mathbf{u}_2^1 & \mathbf{u}_2^2 & \dots & \mathbf{u}_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{u}_n^1 & \mathbf{u}_n^2 & \dots & \mathbf{u}_n^n \end{bmatrix}$
(κάθε στήλη αντιστοιχεί σε
ένα ιδιοάνυσμα $\mathbf{u}_i$)

- Τώρα γράφεται: **$\mathbf{GU} = \mathbf{U}\Lambda$**

Αντίστροφος πίνακας

- Ο αντίστροφος (*inverse*) πίνακας $\mathbf{U}^{-1}$ του τετραγωνικού πίνακα $\mathbf{U}$ είναι ένας πίνακας τέτοιος που να δίνει:

$$\mathbf{U}^{-1}\mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{I}$$

- Για να έχει αντίστροφο ένας τετραγωνικός πίνακας $\mathbf{U}$ θα πρέπει απαραίτητα $|\mathbf{U}| \neq 0$ (μη-μηδενική ορίζουσα)
- Πρέπει δηλαδή ο $\mathbf{U}$ να **μην** είναι ιδιάζων (singular), και κατά προτίμηση να «απέχει» αρκετά από το να είναι ιδιάζων.
- Στην περίπτωση ενός **μη-ιδιάζοντος** 2×2 πίνακα $\mathbf{A}$, ο αντίστροφος δίνεται ως:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

Αντίστροφος πίνακας

- Στην περίπτωση ενός **μη-ιδιάζοντος** 3×3 πίνακα **A**, ο αντίστροφος δίνεται ως:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \alpha_{13} & \alpha_{12} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \alpha_{33} & \alpha_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \alpha_{23} & \alpha_{21} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \alpha_{13} & \alpha_{11} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \alpha_{33} & \alpha_{31} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \alpha_{23} & \alpha_{21} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{11} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \alpha_{32} & \alpha_{31} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

Αντίστροφος πίνακας

- Στην γενική περίπτωση ενός μη-ιδιάζοντος $n \times n$ πίνακα $\mathbf{A}$ ο αντίστροφος μπορεί να βρεθεί με τη μέθοδο απαλοιφής Jordan-Gauss:
- Δημιουργούμε έναν νέο, *επαυξημένο* πίνακα συνδυάζοντας τον $\mathbf{A}_{n \times n}$ και τον αντίστοιχο ταυτοτικό $\mathbf{I}_n$

$$[\mathbf{A} \mid \mathbf{I}] = \left[\begin{array}{ccc|cccc} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right]$$

Αντίστροφος πίνακας

- Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε τη μέθοδο απαλοιφής Gauss για να μετασχηματίσουμε τον προηγούμενο επαυξημένο πίνακα σε έναν νέο της μορφής:

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & \beta_{11} & \cdots & \beta_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \beta_{21} & \cdots & \beta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \beta_{n1} & \cdots & \beta_{nn} \end{array} \right] = [I \mid B]$$

- Ο πίνακας **B** είναι ο ζητούμενος αντίστροφος: **B** = **A**⁻¹

Ανάστροφος πίνακας

- Ο ανάστροφος (*transpose*) πίνακας $\mathbf{G}^T$ του $\mathbf{G}$ είναι ένας πίνακας που έχει στοιχεία $G_{ij}^T = G_{ji}$ (δηλαδή οι γραμμές γίνονται στήλες και οι στήλες γίνονται γραμμές).
- Τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου παραμένουν ίδια.
- Ο ανάστροφος πίνακας $\mathbf{G}^T$ έχει τις *ίδιες ιδιοτιμές* με τον $\mathbf{G}$.
- Συμβολίζουμε με $\mathbf{V}$ τον πίνακα ιδιοδιανυσμάτων του ανάστροφου $\mathbf{G}^T$:

$$G^T V = V \Lambda \xRightarrow{(\text{transpose})} V^T G = \Lambda V^T \xRightarrow{(\cdot U)} V^T G U = \Lambda V^T U$$

$$\xRightarrow{GU=U\Lambda} (V^T U) \Lambda = \Lambda (V^T U) \Leftrightarrow V^T U = I$$

Ορθογωνιότητα ιδιοδιανυσμάτων

- Το $\mathbf{V}^T \mathbf{U} = \mathbf{I}$ μας δείχνει ότι οι πίνακες ιδιοτιμών $\mathbf{V}^T$ και $\mathbf{U}$ είναι **ορθογώνιοι** μεταξύ τους
- Αυτό σημαίνει πως τα ιδιοδιανύσματα $\mathbf{u}_i$ ενός πίνακα αποτελούν **βάση**: οποιοδήποτε άλλο άνυσμα που επιλύει το πρόβλημα ιδιοτιμών μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{u}_i$
- Κλασσικό παράδειγμα βάσης είναι τα μοναδιαία ανύσματα του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων

Αντίστροφος πίνακας

$$GU = U\Lambda \Rightarrow G = U\Lambda U^{-1} \stackrel{(\cdot U^{-1})}{=} \stackrel{(U^{-1}=U^T)}{=} U\Lambda U^T \Rightarrow G = U\Lambda U^T$$
$$G^{-1} = U\Lambda^{-1}U^T$$

$$\Lambda^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/\lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1/\lambda_n \end{bmatrix}$$