Λύσεις θεμάτων εξέτασης – 17/09/2025

Α′ Ομάδα

Κατηγορία Α

Α1. Δίνεται $f(x) = x^2 - 5x + 4$. Εφαρμόστε δύο επαναλήψεις της μεθόδου Newton-Raphson με αρχική τιμή $x_0 = 0.5$.

Λύση:

$$f(x) = x^2 - 5x + 4, \quad f'(x) = 2x - 5$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0.5 - \frac{(0.5)^2 - 5 \cdot 0.5 + 4}{2 \cdot 0.5 - 5} = 0.5 - \frac{0.25 - 2.5 + 4}{1 - 5} = 0.5 - \frac{1.75}{-4} = 0.5 + \frac{7}{16} = \frac{15}{16}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = \frac{15}{16} - \frac{(15/16)^2 - 5(15/16) + 4}{2 \cdot (15/16) - 5}$$

Υπολογίζουμε αριθμητικά:

$$f(x_1) = \frac{225}{256} - \frac{75}{16} + 4 = \frac{225 - 1200 + 1024}{256} = \frac{49}{256}, \quad f'(x_1) = \frac{30 - 80}{16} = -\frac{50}{16}$$

$$x_2 = \frac{15}{16} - \frac{49/256}{-50/16} = \frac{15}{16} + \frac{49 \cdot 16}{256 \cdot 50} = \frac{15}{16} + \frac{784}{12800} = \frac{12000 + 784}{12800} = \frac{12784}{12800} = \frac{799}{800}$$

Απάντηση: $x_1 = \frac{15}{16}, \quad x_2 = \frac{799}{800}$

Θέμα Α2. Να υπολογιστεί το άθροισμα της σειράς:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{11}{12}\right)^n$$

Η σειρά είναι γεωμετρική με λόγο $r = -\frac{11}{12}$ και $|r| < 1$, οπότε συγκλίνει. Το άθροισμά της είναι:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} = \frac{1}{1 + \frac{11}{12}} = \frac{1}{\frac{23}{12}} = \boxed{\frac{12}{23}}$$

Θέμα Α3. Να προσεγγιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\pi/2} \sin(x^2)\, dx$$

με χρήση του κανόνα του Simpson και βήμα $h = \frac{\pi}{8}$.

Αφού $h = \frac{\pi}{8}$, το διάστημα $[0, \frac{\pi}{2}]$ χωρίζεται σε $n = 4$ ίσα υποδιαστήματα και τα σημεία είναι:

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{\pi}{8}, \quad x_2 = \frac{\pi}{4}, \quad x_3 = \frac{3\pi}{8}, \quad x_4 = \frac{\pi}{2}$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση $f(x) = \sin(x^2)$, και υπολογίζουμε τις τιμές:

$$\begin{aligned}
f(x_0) &= \sin(0^2) = 0 \\
f(x_1) &= \sin\left(\left(\frac{\pi}{8}\right)^2\right) = \sin\left(\frac{\pi^2}{64}\right) \approx \sin(0.154) \approx 0.153 \\
f(x_2) &= \sin\left(\left(\frac{\pi}{4}\right)^2\right) = \sin\left(\frac{\pi^2}{16}\right) \approx \sin(0.617) \approx 0.578 \\
f(x_3) &= \sin\left(\left(\frac{3\pi}{8}\right)^2\right) = \sin\left(\frac{9\pi^2}{64}\right) \approx \sin(1.387) \approx 0.983 \\
f(x_4) &= \sin\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right) = \sin\left(\frac{\pi^2}{4}\right) \approx \sin(2.467) \approx 0.624
\end{aligned}$$

Εφαρμόζουμε τώρα τον τύπο του Simpson:

$$\int_0^{\pi/2} \sin(x^2)\, dx \approx \frac{h}{3} \left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\right]$$

$$= \frac{\pi}{24} \left[0 + 4 \cdot 0.153 + 2 \cdot 0.578 + 4 \cdot 0.983 + 0.624\right]$$

$$= \frac{\pi}{24} \cdot (0.612 + 1.156 + 3.932 + 0.623) = \frac{\pi}{24} \cdot 6.324 \approx 0.828$$

Άρα, η προσεγγιστική τιμή του ολοκληρώματος είναι: $\boxed{0.828}$

Α4. Να βρεθεί το ελάχιστο της συνάρτησης

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2x + 6y + xy + 1.$$

Υπολογισμός μερικών παραγώγων πρώτης τάξης:

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2 + y, \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = 4y + 6 + x.$$

Θέτουμε τις παραγώγους ίσες με μηδέν:

$$\begin{cases} 2x - 2 + y = 0 \\ 4y + 6 + x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 - 2x \\ 4(2 - 2x) + 6 + x = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y = 2 - 2x \\ 8 - 8x + 6 + x = 0 \Rightarrow -7x + 14 = 0 \Rightarrow x = 2 \end{cases} \Rightarrow y = -2.$$

Το κρίσιμο σημείο είναι $(x_0, y_0) = (2, -2)$.

Δεύτερες μερικές παράγωγοι και προσδιορισμός τύπου κρίσιμου σημείου:

$$f_{xx} = 2, \quad f_{yy} = 4, \quad f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1.$$

Ορίζουσα του εσ. πίνακα (Hessian):

$$H = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 1 \cdot 1 = 7 > 0.$$

Εφόσον $f_{xx} = 2 > 0$, το σημείο είναι τοπικό ελάχιστο (και λόγω κυρτότητας πολυωνύμου, ολικό ελάχιστο).

Υπολογισμός της τιμής στο ελάχιστο:

$$f(2, -2) = 2^2 + 2(-2)^2 - 2 \cdot 2 + 6(-2) + 2 \cdot (-2) + 1 = 4 + 8 - 4 - 12 - 4 + 1 = -7.$$

Τελική απάντηση: Η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο $\boxed{(2, -2)}$ με τιμή -7.

A5. Διαχωρίζουμε το κλάσμα σε δύο όρους:

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{2x - 3}{x^2 + 1}\, dx = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2x}{x^2 + 1}\, dx - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{3}{x^2 + 1}\, dx.$$

Υπολογίζουμε το πρώτο ολοκλήρωμα με αντικατάσταση:

Έστω $u = x^2 + 1 \Rightarrow du = 2x\, dx$.

Άρα:

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{2x}{x^2 + 1}\, dx = \int_{x=0}^{x=\sqrt{3}} \frac{1}{u}\, du = \ln(u)\Big|_{x=0}^{x=\sqrt{3}} = \ln(x^2 + 1)\Big|_0^{\sqrt{3}} = \ln(4) - \ln(1) = \ln 4.$$

Το δεύτερο ολοκλήρωμα είναι άμεσα γνωστό:

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{3}{x^2 + 1}\, dx = 3 \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2 + 1}\, dx = 3 \cdot \arctan(x)\Big|_0^{\sqrt{3}} = 3\left(\arctan(\sqrt{3}) - \arctan(0)\right) = 3 \cdot \frac{\pi}{3} = \pi.$$

Τελική απάντηση:

$$\boxed{\int_0^{\sqrt{3}} \frac{2x - 3}{x^2 + 1}\, dx = \ln 4 - \pi.}$$

A6. Λύστε το γραμμικό σύστημα:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 8 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 6 \end{cases}$$

Χρησιμοποιούμε απαλοιφή κατά Gauss.

Αρχικός επαυξημένος πίνακας:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & 8 \\ 4 & 1 & -1 & 6 \end{array}\right]$$

Απαλοιφή πρώτης στήλης:

- $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \Rightarrow (0,\, -7,\, -5,\, 2)$
- $L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \Rightarrow (0,\, -7,\, -13,\, -6)$

Νέος πίνακας:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -7 & -5 & 2 \\ 0 & -7 & -13 & -6 \end{array}\right]$$

Απαλοιφή δεύτερης στήλης:

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \Rightarrow (0,\, 0,\, -8,\, -8)$$

Τελικός τριγωνοποιημένος πίνακας:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -7 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -8 & -8 \end{array}\right]$$

Οπισθοαντικατάσταση:

$$x_3 = 1, \quad -7x_2 - 5(1) = 2 \Rightarrow x_2 = -1, \quad x_1 + 2(-1) + 3(1) = 3 \Rightarrow x_1 = 2$$

Άρα η λύση είναι:

$$\boxed{x_1 = 2, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 1}$$

A7. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$$\iint_D \sqrt{1-x^2}\, dx\, dy$$

όπου

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1\right\}.$$

Πρόκειται για το 1ο τεταρτημόριο του μοναδιαίου κύκλου, δηλαδή το τεταρτημόριο του δίσκου $x^2 + y^2 \leq 1$ στο οποίο ισχύει $x \geq 0,\ y \geq 0$.

Η προβολή της περιοχής D στον άξονα x είναι από $x = 0$ έως $x = 1$, και για κάθε τέτοιο x το y κυμαίνεται από 0 έως $\sqrt{1-x^2}$.

Άρα μπορούμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα ως εξής:

$$\iint_D \sqrt{1-x^2}\, dx\, dy = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2}\, dy \right) dx$$

Εσωτερικό ολοκλήρωμα:

$$\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2}\, dy = \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-x^2} = 1 - x^2.$$

Άρα:

$$\iint_D \sqrt{1-x^2}\, dx\, dy = \int_0^1 (1-x^2)\, dx = \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \boxed{\frac{2}{3}}.$$

Κατηγορία Β

Β1. (κίνο) Από 20 λευκά, 60 μαύρα, τραβάμε 5 χωρίς επανάθεση. Πιθανότητα για 3 λευκά: Χρησιμοποιούμε την υπεργεωμετρική κατανομή:

$$P = \frac{\binom{20}{3}\binom{60}{2}}{\binom{80}{5}} = \frac{1140 \cdot 1770}{24376320} = \frac{2017800}{24376320} \approx 0.0828$$

Β2. (πόκερ) Υπολογίστε την πιθανότητα να προκύψει four-of-a-kind (τετράδα ίδιου αριθμού, π.χ. τέσσερις 8) σε μία τυχαία διανομή 5 φύλλων από πλήρη τράπουλα 52 φύλλων. Δεν μας ενδιαφέρει η σειρά εμφάνισης.

Το καρέ four-of-a-kind αποτελείται από τέσσερα φύλλα της ίδιας αξίας (π.χ. τέσσερις Ντάμες) και ένα επιπλέον -αναγκαστικά- διαφορετικό φύλλο (το λεγόμενο kicker).

- Υπάρχουν 13 δυνατές αξίες για την τετράδα (2 έως Άσσος).
- Για κάθε τέτοια αξία, υπάρχουν $\binom{4}{4} = 1$ τρόποι να επιλεγούν και τα τέσσερα φύλλα.
- Για το πέμπτο φύλλο (το kicker), απομένουν $52 - 4 = 48$ φύλλα, **εκτός** από τα 4 ίδια.

Άρα το πλήθος των χεριών που ζητάμε είναι:

$$N_{\text{4-kind}} = 13 \cdot 48$$

Το συνολικό πλήθος όλων των δυνατών 5-φύλλων χεριών είναι:

$$N_{\text{σύνολο}} = \binom{52}{5}$$

Επομένως, η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P = \frac{13 \cdot 48}{\binom{52}{5}} = \frac{624}{2598960} = \frac{1}{4165} \approx 0.00024$$

Άρα η πιθανότητα να προκύψει καρέ σε μία τυχαία διανομή είναι περίπου 0.024%.

Β3. $X \sim \mathcal{N}(13, 2)$

α) $P(X < 13) = P(Z < 0) = 0.5$

β) $P(10 < X < 15) = P\left(-1.5 < Z < 1\right) = \Phi(1) - \Phi(-1.5) \approx 0.8413 - 0.0668 = 0.7745$

Β΄ Ομάδα

Κατηγορία Α

Α1. Δίνεται $f(x) = x^2 - 6x + 5$. Εφαρμόστε δύο επαναλήψεις της μεθόδου Newton-Raphson με αρχική τιμή $x_0 = 0.5$.

Λύση: Ξεκινάμε με την αρχική τιμή $x_0 = 0.5$, την οποία εκφράζουμε ως $\frac{1}{2}$.

Υπολογίζουμε την τιμή της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 6x + 5$ στο x_0:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 6\left(\frac{1}{2}\right) + 5 = \frac{1}{4} - 3 + 5 = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4}$$

Υπολογίζουμε την τιμή της παραγώγου $f'(x) = 2x - 6$ στο x_0:

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right) - 6 = 1 - 6 = -5$$

Εφαρμόζουμε τον τύπο της μεθόδου για να βρούμε την επόμενη προσέγγιση x_1:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = \frac{1}{2} - \frac{9/4}{-5} = \frac{1}{2} + \frac{9}{20} = \frac{10}{20} + \frac{9}{20} = \frac{19}{20}$$

2η επανάληψη: Χρησιμοποιούμε την τιμή που βρήκαμε, $x_1 = \frac{19}{20}$, για να υπολογίσουμε την x_2.

Υπολογίζουμε την τιμή της συνάρτησης $f(x)$ στο x_1:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{19}{20}\right) &= \left(\frac{19}{20}\right)^2 - 6\left(\frac{19}{20}\right) + 5 \\ &= \frac{361}{400} - \frac{114}{20} + 5 = \frac{361}{400} - \frac{2280}{400} + \frac{2000}{400} = \frac{361 - 2280 + 2000}{400} = \frac{81}{400} \end{aligned}$$

Υπολογίζουμε την παράγωγο στο x_1:

$$f'\left(\frac{19}{20}\right) = 2\left(\frac{19}{20}\right) - 6 = \frac{19}{10} - 6 = -\frac{41}{10}$$

Εφαρμόζουμε ξανά τον τύπο της μεθόδου:

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = \frac{19}{20} - \frac{81/400}{-41/10} \\ &= \frac{19}{20} + \frac{81}{400} \cdot \frac{10}{41} = \frac{19}{20} + \frac{81}{1640} \\ x_2 &= \frac{19 \cdot 82}{20 \cdot 82} + \frac{81}{1640} = \frac{1558}{1640} + \frac{81}{1640} = \frac{1639}{1640} \end{aligned}$$

Το τελικό αποτέλεσμα μετά από δύο επαναλήψεις, εκφρασμένο ως ρητός αριθμός, είναι: $\frac{1639}{1640}$.

Απάντηση: $x_1 = \dfrac{19}{20}, \quad x_2 = \dfrac{1639}{1640}$

Θέμα Α2. Να υπολογιστεί το άθροισμα της σειράς:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{7}{12}\right)^n.$$

Η σειρά είναι γεωμετρική με λόγο $r = -\dfrac{7}{12}$ και $|r| < 1$, οπότε συγκλίνει. Έχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{7}{12}\right)^n$$

Πρόκειται για μια γεωμετρική σειρά της μορφής $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$, όπου ο λόγος είναι $r = -\frac{7}{12}$.

Εφόσον η απόλυτη τιμή του λόγου είναι $|r| = \left|-\frac{7}{12}\right| = \frac{7}{12} < 1$, η σειρά συγκλίνει.

Το άθροισμα μιας γεωμετρικής σειράς που ξεκινάει από τον όρο $n = 1$ δίνεται από τον τύπο $S = \frac{r}{1-r}$. Εφαρμόζοντας τον τύπο, έχουμε:

$$S = \frac{-\frac{7}{12}}{1 - \left(-\frac{7}{12}\right)} = \frac{-\frac{7}{12}}{1 + \frac{7}{12}} = \frac{-\frac{7}{12}}{\frac{12+7}{12}} = \frac{-\frac{7}{12}}{\frac{19}{12}} = -\frac{7}{19}$$

Θέμα Α3. Να προσεγγιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\pi/2} \cos(x^2)\, dx$$

με χρήση του κανόνα του Simpson και βήμα $h = \frac{\pi}{8}$.

Αφού $h = \frac{\pi}{8}$, το διάστημα $[0, \frac{\pi}{2}]$ χωρίζεται σε $n = 4$ ίσα υποδιαστήματα και τα σημεία είναι: Τα σημεία που θα υπολογιστεί η συνάρτηση $f(x) = \cos(x^2)$ είναι:

- $x_0 = 0$
- $x_1 = \frac{\pi}{8}$
- $x_2 = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$
- $x_3 = \frac{3\pi}{8}$
- $x_4 = \frac{4\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$

Οι τιμές της συνάρτησης είναι:

$$\begin{aligned}
f(x_0) &= \cos(0^2) = 1 \\
f(x_1) &= \cos\left(\left(\frac{\pi}{8}\right)^2\right) \approx 0.9881 \\
f(x_2) &= \cos\left(\left(\frac{\pi}{4}\right)^2\right) \approx 0.8157 \\
f(x_3) &= \cos\left(\left(\frac{3\pi}{8}\right)^2\right) \approx 0.1819 \\
f(x_4) &= \cos\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right) \approx -0.7812
\end{aligned}$$

Εφαρμογή του Κανόνα του Simpson

Ο κανόνας του Simpson δίνεται από τον τύπο:

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{h}{3} \left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\right]$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές, έχουμε:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \cos(x^2)\,dx &\approx \frac{\pi/8}{3}\left[f(0)+4f\left(\frac{\pi}{8}\right)+2f\left(\frac{\pi}{4}\right)+4f\left(\frac{3\pi}{8}\right)+f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]\\ &\approx \frac{\pi}{24}\left[1+4(0.9881)+2(0.8157)+4(0.1819)+(-0.7812)\right]\\ &\approx \frac{\pi}{24}\left[1+3.9528+1.6312+0.7312-0.7818\right]\\ &\approx \frac{\pi}{24}(6.5302)\\ &\approx 0.8548\end{aligned}$$

A4. Να βρεθεί το ελάχιστο της συνάρτησης

$$f(x,y)=2x^2+y^2-x+3y+2xy+1.$$

Βήμα 1: Υπολογισμός των Μερικών Παραγώγων

Για να βρούμε τα κρίσιμα σημεία, υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους πρώτης τάξης και τις εξισώνουμε με το μηδέν.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 4x+2y-1\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2x+2y+3\end{aligned}$$

Βήμα 2: Επίλυση του Συστήματος

Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων:

$$\begin{aligned}4x+2y-1&=0 \qquad (1)\\ 2x+2y+3&=0 \qquad (2)\end{aligned}$$

Αφαιρώντας την εξίσωση (2) από την (1) έχουμε:

$$(4x+2y-1)-(2x+2y+3)=0 \implies 2x-4=0 \implies x=2$$

Αντικαθιστούμε το $x=2$ στην εξίσωση (2) για να βρούμε το y:

$$2(2)+2y+3=0 \implies 4+2y+3=0 \implies 2y=-7 \implies y=-\frac{7}{2}$$

Το κρίσιμο σημείο είναι το $\left(2,-\frac{7}{2}\right)$.

Βήμα 3: Έλεγχος της Φύσης του Σημείου

Χρησιμοποιούμε το τεστ της δεύτερης παραγώγου για να επιβεβαιώσουμε ότι πρόκειται για ελάχιστο.

$$\begin{aligned}f_{xx} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4\\ f_{yy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2\\ f_{xy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2\end{aligned}$$

Η ορίζουσα του πίνακα Hessian είναι:

$$D = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = (4)(2) - (2)^2 = 8 - 4 = 4$$

Εφόσον $D > 0$ και $f_{xx} > 0$, το σημείο $\left(2, -\frac{7}{2}\right)$ είναι τοπικό ελάχιστο. Δεδομένου ότι η συνάρτηση είναι κυρτή (πολυώνυμο δεύτερου βαθμού με θετικούς συντελεστές στις τετραγωνικές μεταβλητές), αυτό το σημείο είναι και το ολικό ελάχιστο.

Υπολογισμός της Ελάχιστης Τιμής: Αντικαθιστούμε το κρίσιμο σημείο στην αρχική συνάρτηση:

$$\begin{aligned}
f\left(2, -\frac{7}{2}\right) &= 2(2)^2 + \left(-\frac{7}{2}\right)^2 - (2) + 3\left(-\frac{7}{2}\right) + 2(2)\left(-\frac{7}{2}\right) + 1 \\
&= 8 + \frac{49}{4} - 2 - \frac{21}{2} - 14 + 1 \\
&= 8 + \frac{49}{4} - 2 - \frac{42}{4} - 14 + 1 \\
&= 8 - 2 - 14 + 1 + \frac{49 - 42}{4} \\
&= -7 + \frac{7}{4} = -\frac{28}{4} + \frac{7}{4} = -\frac{21}{4}
\end{aligned}$$

A5. Αρχικά, χωρίζουμε το ολοκλήρωμα σε δύο μέρη:

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{3x - 6}{x^2 + 1} dx = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{3x}{x^2 + 1} dx - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{6}{x^2 + 1} dx$$

Πρώτο Ολοκλήρωμα:

Για το πρώτο μέρος, $\int \frac{3x}{x^2 + 1} dx$, χρησιμοποιούμε αντικατάσταση. Έστω $u = x^2 + 1$, τότε $du = 2x\,dx$.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\sqrt{3}} \frac{3x}{x^2 + 1} dx &= \frac{3}{2} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2x}{x^2 + 1} dx \\
&= \frac{3}{2} \left[\ln(x^2 + 1)\right]_0^{\sqrt{3}} \\
&= \frac{3}{2} \left(\ln((\sqrt{3})^2 + 1) - \ln(0^2 + 1)\right) \\
&= \frac{3}{2}(\ln(4) - \ln(1)) \\
&= \frac{3}{2} \ln(4)
\end{aligned}$$

Δεύτερο Ολοκλήρωμα:

Το δεύτερο μέρος είναι ένα γνωστό ολοκλήρωμα:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\sqrt{3}} \frac{6}{x^2 + 1} dx &= 6\left[\arctan(x)\right]_0^{\sqrt{3}} \\
&= 6(\arctan(\sqrt{3}) - \arctan(0)) \\
&= 6\left(\frac{\pi}{3} - 0\right) \\
&= 2\pi
\end{aligned}$$

Τελικό Αποτέλεσμα. Συνδυάζοντας τα αποτελέσματα των δύο μερών, έχουμε:

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{3x-6}{x^2+1}dx = \frac{3}{2}\ln(4) - 2\pi$$

A6. Λύστε το γραμμικό σύστημα:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 3 && (1) \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 &= -8 && (2) \\ 4x_1 + x_2 - x_3 &= 6 && (3) \end{aligned}$$

Βήμα 1: Απαλοιφή του x_1: Πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση (1) επί 2 και την προσθέτουμε στην εξίσωση (2):

$$\begin{aligned} 2\cdot(1)+(2) \implies (2x_1+4x_2+6x_3)+(-2x_1+3x_2-x_3) &= 6+(-8) \\ 7x_2+5x_3 &= -2 && (4) \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση (1) επί -4 και την προσθέτουμε στην εξίσωση (3):

$$\begin{aligned} -4\cdot(1)+(3) \implies (-4x_1-8x_2-12x_3)+(4x_1+x_2-x_3) &= -12+6 \\ -7x_2-13x_3 &= -6 && (5) \end{aligned}$$

Βήμα 2: Επίλυση για το x_3: Έχουμε τώρα ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους. Προσθέτουμε την εξίσωση (4) στην (5):

$$\begin{aligned} (4)+(5) \implies (7x_2+5x_3)+(-7x_2-13x_3) &= -2+(-6) \\ -8x_3 &= -8 \\ x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Βήμα 3: Αντικατάσταση για τα x_2 και x_1: Αντικαθιστούμε την τιμή του x_3 στην εξίσωση (4) για να βρούμε το x_2:

$$7x_2+5(1) = -2 \implies 7x_2 = -7 \implies x_2 = -1$$

Τέλος, αντικαθιστούμε τις τιμές των x_2 και x_3 στην αρχική εξίσωση (1):

$$x_1+2(-1)+3(1) = 3 \implies x_1-2+3 = 3 \implies x_1+1 = 3 \implies x_1 = 2$$

Η λύση του συστήματος είναι:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 \\ x_2 &= -1 \\ x_3 &= 1 \end{aligned}$$

A7. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$$\iint_D \sqrt{4-x^2}\,dx\,dy$$

όπου

$$D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 0,\ y\geq 0,\ x^2+y^2\leq 4\right\}.$$

Λύση:

1. Μετατροπή σε Διαδοχικά Ολοκληρώματα: Το πεδίο D είναι το τεταρτοκύκλιο στο πρώτο τεταρτημόριο με ακτίνα 2. Ορίζουμε τα όρια ολοκλήρωσης:

$$\iint_D \sqrt{4-x^2}\,dx\,dy = \int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{4-x^2}\,dy \right) dx$$

2. Υπολογισμός του Εσωτερικού Ολοκληρώματος. Το εσωτερικό ολοκλήρωμα ως προς y έχει σταθερό ολοκληρωτέο:

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{4-x^2}\,dy &= \sqrt{4-x^2} \cdot [y]_0^{\sqrt{4-x^2}} \\ &= \sqrt{4-x^2} \cdot (\sqrt{4-x^2} - 0) \\ &= 4 - x^2\end{aligned}$$

3. Υπολογισμός του Εξωτερικού Ολοκληρώματος. Αντικαθιστούμε το αποτέλεσμα στο εξωτερικό ολοκλήρωμα ως προς x:

$$\begin{aligned}\int_0^2 (4-x^2)\,dx &= \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 \\ &= \left(4(2) - \frac{2^3}{3}\right) - \left(4(0) - \frac{0^3}{3}\right) \\ &= 8 - \frac{8}{3} \\ &= \frac{24-8}{3} = \frac{16}{3}\end{aligned}$$

Κατηγορία Β

Β1. (κίνο) Από 20 λευκά, 60 μαύρα, τραβάμε 6 χωρίς επανάθεση. Πιθανότητα για 4 λευκά: Χρησιμοποιούμε την υπεργεωμετρική κατανομή:

Λύση:

Συνολικός αριθμός δυνατών αποτελεσμάτων: Ο συνολικός αριθμός τρόπων επιλογής 6 σφαιριδίων από τα 80 είναι ένας συνδυασμός $\binom{80}{6}$:

$$\binom{80}{6} = \frac{80!}{6!(80-6)!} = \frac{80 \cdot 79 \cdot 78 \cdot 77 \cdot 76 \cdot 75}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 300500400$$

Αριθμός ευνοϊκών αποτελεσμάτων: Για να έχουμε ακριβώς 4 λευκά σφαιρίδια, πρέπει να επιλέξουμε:

- 4 λευκά από τα 20, με συνδυασμούς $\binom{20}{4}$:

$$\binom{20}{4} = \frac{20!}{4!(20-4)!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 4845$$

- 2 μαύρα από τα 60, με συνδυασμούς $\binom{60}{2}$:

$$\binom{60}{2} = \frac{60!}{2!(60-2)!} = \frac{60 \cdot 59}{2 \cdot 1} = 1770$$

Ο συνολικός αριθμός των ευνοϊκών αποτελεσμάτων είναι το γινόμενο των παραπάνω:

$$\text{Ευνοϊκά} = \binom{20}{4} \cdot \binom{60}{2} = 4.845 \cdot 1.770 = 8.582.650$$

Υπολογισμός της πιθανότητας: Η πιθανότητα P είναι ο λόγος των ευνοϊκών προς τα συνολικά αποτελέσματα:

$$P = \frac{\text{Ευνοϊκά}}{\text{Σύνολο}} = \frac{8.582.650}{300.500.400} \approx 0.02856$$

B2. (πόκερ) Υπολογίστε την πιθανότητα να επιλέξετε όλες τις κάρτες από το ίδιο `χρώμα` σε μία τυχαία διανομή 5 φύλλων από πλήρη τράπουλα 52 φύλλων (π.χ. όλα κούπες). Δεν μας ενδιαφέρει η σειρά εμφάνισης.

Συνολικός αριθμός δυνατών αποτελεσμάτων: Ο συνολικός αριθμός τρόπων επιλογής 5 φύλλων από τα 52 είναι ένας συνδυασμός $\binom{52}{5}$:

$$\binom{52}{5} = \frac{52!}{5!(52-5)!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 2598960$$

Αριθμός ευνοϊκών αποτελεσμάτων: Για να επιλέξουμε 5 κάρτες του ίδιου χρώματος, πρέπει να επιλέξουμε ένα από τα 4 χρώματα και στη συνέχεια να επιλέξουμε 5 φύλλα από τα 13 που ανήκουν σε αυτό το χρώμα.

$$\text{Ευνοϊκά} = \binom{4}{1} \cdot \binom{13}{5} = 4 \cdot \frac{13!}{5!8!} = 4 \cdot \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 4 \cdot 1.287 = 5148$$

Υπολογισμός της πιθανότητας: Η πιθανότητα P είναι ο λόγος των ευνοϊκών προς τα συνολικά αποτελέσματα:

$$P = \frac{\text{Ευνοϊκά}}{\text{Σύνολο}} = \frac{5.148}{2.598.960} \approx 0.00198$$

B3. Δίνεται η τυχαία μεταβλητή $X \sim N(\mu = 11, \sigma^2 = 2^2)$.

α) Ζητείται $P(X < 11)$: Τυποποιούμε τη μεταβλητή X:

$$P(X < 11) = P\left(Z < \frac{11-11}{2}\right) = P(Z < 0)$$

Από τη συμμετρία της κανονικής κατανομής, η πιθανότητα είναι: $P(Z < 0) = 0.5$

β) Ζητείται: $P(9 < X < 14)$. Τυποποιούμε τα όρια του διαστήματος:

$$\text{Για } x = 9: \quad z_1 = \frac{9-11}{2} = -1$$
$$\text{Για } x = 14: \quad z_2 = \frac{14-11}{2} = 1.5$$

Η πιθανότητα είναι $P(-1 < Z < 1.5)$. Από τους πίνακες της τυπικής κανονικής κατανομής:

$$\begin{aligned} P(-1 < Z < 1.5) &= P(Z < 1.5) - P(Z < -1) \\ &= P(Z < 1.5) - (1 - P(Z < 1)) \\ &\approx 0.9332 - (1 - 0.8413) \\ &= 0.9332 - 0.1587 \\ &= 0.7745 \end{aligned}$$