1. Ακολουθίες πραγματικών αριθμών

1.1 Η έννοια της ακολουθίας

Ορισμός: Ακολουθία πραγματικών αριθμών είναι μία συνάρτηση $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ με πεδίο ορισμού τους φυσικούς αριθμούς και πραγματικές τιμές.

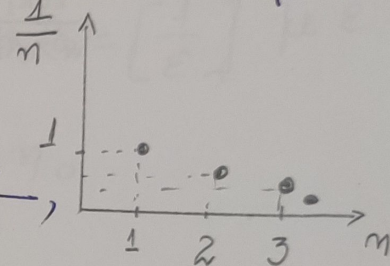
Για ένα φυσικό αριθμό n, η τιμή $a(n)$ συμβολίζεται a_n, και ονομάζεται n-οστός όρος της ακολουθίας.

Το σύνολο τιμών της ακολουθίας συμβολίζεται

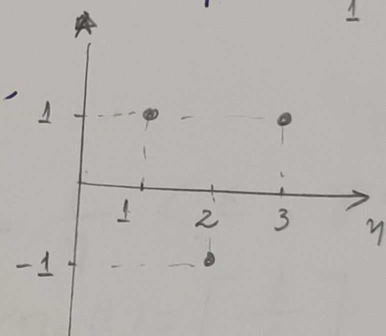
$$a(\mathbb{N}) := \{ a_n : n \in \mathbb{N} \} = \{ a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \}.$$

Παραδείγματα:

1. $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ή $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ με $a_n = \frac{1}{n}$,



2. $a_n = (-1)^{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$



2. Σύγκλιση ακολουθίας

Ορισμός: Μία ακολουθία (a_n) συγκλίνει στον $a \in \mathbb{R}$ και συμβολίζουμε $a_n \to a$ ή $\lim a_n = a$ ή $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει φυσικός αριθμός $n_0(\varepsilon)$ n_0 έτσι ώστε να ισχύει

$$|a_n - a| < \varepsilon \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N} \text{ με } n \geq n_0.$$

Πολλές φορές γράφουμε ισοδύναμα

$$a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N} \text{ με } n \geq n_0.$$

σύγκλιση στο $+\infty$ (ή $-\infty$) μιας ακολουθίας ②
ορίζεται:
$\lim a_n = +\infty$ ή $a_n \to +\infty$ αν $\forall K>0 \ \exists\, n_0(K)=n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $a_n > K$ ~~∀ n≥n₀~~. για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq n_0$.
$\lim a_n = -\infty$ ή $a_n \to -\infty$ άν $\forall K>0 \ \exists\, n_0(K)=n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $a_n < -K$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq n_0$.

*Παραδείγματα:
i) $a_n = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$
Πράγματι για τυχόν $\varepsilon > 0$ είναι:
$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$, δηλαδή
για το τυχόν $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ με ε
$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$.

ii) $a_n = \frac{n+1}{n} \longrightarrow 1$ για τυχόν $\varepsilon > 0$:
Πράγματι $\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$, για κάθε n φυσικό με $n \geq n_0(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$.

* Αν $a_n \longrightarrow a$ και $a \in \mathbb{R}$ λέμε ότι η ακολουθία συγκλίνει (συγκλίνουσα).
Ειδικότερα αν $a=0$ η ακολουθία λέγεται μηδενική.
Αν $a = +\infty$ (ή $-\infty$) λέμε ότι η ακολουθία αποκλίνει στο $+\infty$ (ή $-\infty$).

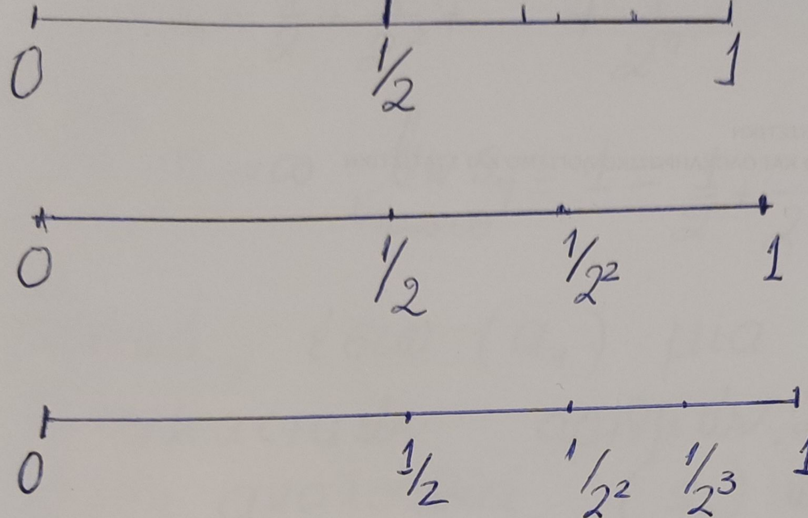
Βασικές ιδιότητες των ορίων.

1) Μοναδικότητα του ορίου.

Αν $a_n \to a$ και $a_n \to \beta$, τότε $a=\beta$

Απόδειξη με απαγωγή σε άτοπο.

Σειρές



Παράδειγμα:- Όταν διανύουμε ένα διάστημα μήκους 1. Διανύουμε το μισό αυτού (μήκους $1/2$), μετά το μισό του υπολοίπου μισού (μήκους $1/2^2$), μετά το μισό του υπολοίπου μισού (μήκους $1/2^3$) κ.ο.κ. Θα έχουμε το άπειρο άθροισμα

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots=1$$

Το άπειρο άθροισμα σχηματίστηκε από τους όρους της ακολουθίας $\left(\frac{1}{2^n}\right)$ $n=1,2,\ldots$, ως εξής:

$S_1 = \frac{1}{2}$

$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}$

. . . .

$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}$

και

για $n \to \infty$, $\lim_{n\to\infty} S_n = 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$

Γενικά, έστω (a_n) μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Σχηματίζουμε μια άλλη ακολουθία (s_n) ως εξής:

Θέτουμε

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

. . . .

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

. . .

κ.ο.κ.

Καθώς $n \to \infty$, το άπειρο άθροισμα

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

συμβολίζεται

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και καλείται <u>σειρά</u>.

Η ακολουθία (S_n) καλείται ακολουθία (3.)
των μερικών αθροισμάτων της σειράς,
S_n το n-οστό μερικό άθροισμα της σειράς
και ο n-οστός όρος a_n της ακολουθίας
(a_n) καλείται n-στός όρος της σειράς.

- Αν η ακολουθία (S_n) συγκλίνει σε ένα πραγματικό αριθμό s, (δηλ. $\lim_{n\to\infty} S_n = s \in \mathbb{R}$), τότε θα λέμε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$ συγκλίνει (ή αθροίζεται)

και έχει άθροισμα s.

- Αν η ακολουθία (S_n) δεν συγκλίνει, θα λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

Ειδικότερα:

Αν $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$, (αντίστοιχα $-\infty$),

τότε θα λέμε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$ αποκλίνει στο $(+\infty)$ [αντίστοιχα $-\infty$]

ή απειρίζεται θετικά
(αντίστοιχα αρνητικά).

Πρόταση:

Αν $a, \beta, \lambda \in \mathbb{R}$, ώστε

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = \beta, \quad S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n, \text{ τότε}$$

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lambda a$

ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm \beta_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = a \pm \beta$

iii) $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{N} a_n = a - S_N.$

Παρατήρηση: Αν απαλείψουμε πεπερασμένο πλήθος όρων μιας σειράς αυτό δεν επηρεάζει τη σύγκλιση ή την απόκλισή της.
Το ίδιο συμβαίνει και αν αλλάξουμε πεπερασμένο πλήθος των όρων της.

1. ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΚΑΙ ΣΕΙΡΕΣ

1.1 Ακολουθίες πραγματικών αριθμών

Ορισμός *Μια ακολουθία πραγματικών αριθμών* $\{a_n\}$ *είναι μια πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο* $\mathbb{N}$ *των φυσικών αριθμών. Οι τιμές της συνάρτησης αυτής,* $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ *είναι οι όροι της ακολουθίας.*

Παράδειγμα 1.1 Βρείτε τους 5 πρώτους όρους των ακολουθιών:

$$i)\ a_n = \frac{1}{n}, \qquad ii)\ \beta_n = \frac{1}{2^n}, \qquad iii)\ \gamma_n = \frac{n}{1+n^2}$$

Λύση:

$$i)\ \{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\right\}$$

$$ii)\ \{\beta_n\} = \left\{\frac{1}{2^n}\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots\right\}$$

$$iii)\ \{\gamma_n\} = \left\{\frac{n}{1+n^2}\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{4}{17}, \frac{5}{26}, \dots\right\}$$

Ορισμός *Θα λέμε ότι η ακολουθία* $\{a_n\}$ *συγκλίνει στον πραγματικό αριθμό* l *και θα συμβολίζουμε* $a_n \to l$ *ή* $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ *αν για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει φυσικός αριθμός* N *τέτοιος ώστε* $|a_n - l| < \varepsilon$ *για κάθε* $n > N$.
Αν τέτοιος αριθμός δεν υπάρχει θα λέμε ότι η ακολουθία δεν συγκλίνει. Ειδικότερα θα λέμε ότι απειρίζεται θετικά ($a_n \to +\infty$ *ή* $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$) *αν για κάθε* $M > 0$ *υπάρχει φυσικός αριθμός* N *τέτοιος ώστε* $a_n > M$ *για κάθε* $n > N$ *και απειρίζεται αρνητικά* ($a_n \to -\infty$ *ή* $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$) *αν* $a_n < -M$ *για κάθε* $n > N$.

Παράδειγμα 1.2 Αποδείξτε με χρήση του ορισμού ότι οι ακολουθίες συγκλίνουν

$$i)\ a_n = \frac{1}{n}, \qquad ii)\ \beta_n = \frac{2n+1}{3n+4},$$

Λύση: i)Ισχύει $a_n = \frac{1}{n} \to 0$.

Πράγματι· έστω τυχόν $\varepsilon > 0$, τότε

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Αν πάρουμε N τον μεγαλύτερο φυσικό που είναι μικρότερος του $\frac{1}{\varepsilon}$, θα έχουμε:

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon, \quad \text{για κάθε} \quad n > N$$

δηλαδή $\dfrac{1}{n} \to 0$.

ii) Ισχύει $a_n = \frac{2n+1}{3n+4} \to \frac{2}{3}$.

Πράγματι· έστω τυχόν $\varepsilon > 0$, τότε

$$\left|\frac{2n+1}{3n+4} - \frac{2}{3}\right| = \frac{5}{3(3n+4)} < \varepsilon$$

δηλαδή

$$n > \frac{5-12\varepsilon}{9\varepsilon}$$

Αν πάρουμε N ένα οποιοδήποτε φυσικό αριθμό που είναι μεγαλύτερος του $\frac{5-12\varepsilon}{9\varepsilon}$, τότε

$$\text{για κάθε} \quad n > N \quad \text{ισχύει} \quad \left|\frac{2n+1}{3n+4} - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon,$$

δηλαδή $\beta_n \to \dfrac{2}{3}$.

Ιδιότητες Αν $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$, $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = m$ τότε

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}(\lambda a_n + \mu\beta_n) &= \lambda l + \mu m \\ \lim_{n\to\infty}(a_n\beta_n) &= lm \end{aligned}$$

Ορισμός *Μια ακολουθία* $\{a_n\}$ *λέγεται* **αύξουσα** *όταν* $a_{n+1} \geq a_n$, *για κάθε* $n \epsilon \mathbb{N}$. *Αν* $a_{n+1} > a_n$, *τότε η* $\{a_n\}$ *λέγεται* **γνήσια αύξουσα**. *Αν* $a_{n+1} \leq a_n$, *τότε η* $\{a_n\}$ *λέγεται* **φθίνουσα** *και αν* $a_{n+1} < a_n$ *η* $\{a_n\}$ *λέγεται* **γνήσια φθίνουσα**. *Μία ακολουθία που είναι είτε αύξουσα είτε φθίνουσα λέγεται* **μονότονη**.

Παράδειγμα 1.3 $a_n = \frac{1}{n}$ είναι γνήσια φθίνουσα, αφού

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = a_n, \quad \text{για κάθε} \quad n \epsilon \mathbb{N}$$

Παράδειγμα 1.4 $a_n = \frac{n+1}{n+2}$ είναι γνήσια αύξουσα, αφού

$$a_{n+1} = \frac{n+2}{n+3} > \frac{n+1}{n+2} = a_n, \quad \text{για κάθε} \quad n \epsilon \mathbb{N}$$

Ορισμός *Η ακολουθία $\{a_n\}$ λέγεται άνω φραγμένη αν υπάρχει $M \epsilon \mathbb{R}$ με $a_n \leq M$ για κάθε $n \epsilon \mathbb{N}$. Η $\{a_n\}$ λέγεται κάτω φραγμένη αν υπάρχει $m \epsilon \mathbb{R}$ με $a_n \geq m$ για κάθε $n \epsilon \mathbb{N}$. Τέλος η $\{a_n\}$ λέγεται φραγμένη ακολουθία αν είναι άνω και κάτω φραγμένη, δηλαδή αν υπάρχει $\varphi > 0$, τέτοιο ώστε $|a_n| \leq \varphi$ για κάθε $n \epsilon \mathbb{N}$.*

Θεώρημα *Κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία είναι συγκλίνουσα.*

Παράδειγμα 1.5 Η ακολουθία $a_n = \frac{n+2}{n+3}$, είναι φραγμένη αφού

$$a_n = \frac{n+2}{n+3} < 1, \quad \text{για κάθε} \qquad n \in \mathbb{N}$$

Παράδειγμα 1.6 Η ακολουθία $a_n = \frac{2n}{n+3}$, είναι αύξουσα, αφού

$$a_{n+1} = \frac{2n+2}{n+4} \geq \frac{2n}{n+3} = a_n$$

και φραγμένη αφού $|a_n| = \frac{2n}{n+3} \leq 2$ για κάθε $n \epsilon \mathbb{N}$. Επομένως συγκλίνει και ισχύει

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2n}{n+3} = 2$$

1.2 Αριθμητικές Σειρές

Ορισμός *Εστω $\{a_n\}$ μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Σχηματίζουμε την ακολουθία $\{S_n\}$ ως εξής:*

$$\begin{aligned}
S_1 &= a_1 \\
S_2 &= a_1 + a_2 \\
&\vdots \\
S_n &= a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Αν $n \to +\infty$ το (σχηματικό) άπειρο άθροισμα

$$a_1 + a_2 + \ldots$$

συμβολίζεται με $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *και καλείται* **σειρά**. *Η ακολουθία* $\{S_n\}$ *είναι η ακολουθία των* **μερικών αθροισμάτων** *της σειράς και ο n-οστός όρος της* $\{S_n\}$ *είναι το n-οστό μερικό άθροισμα της σειράς.*

Έχουμε τρεις περιπτώσεις.

Ορισμός

1) Υπάρχει $lim_{n\to\infty} S_n = s \epsilon \mathbb{R}$, *τότε θα λέμε ότι η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει και έχει άθροισμα s.*

2) Το $lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$ *ή* $-\infty$ *και θα λέμε ότι η σειρά απειρίζεται θετικά ή αρνητικά*

3) Δεν υπάρχει το $lim_{n\to\infty} S_n$.

Για τις περιπτώσεις 2) και 3) θα λέμε ότι η σειρά **αποκλίνει.**

Ιδιότητες Αν $\lambda \epsilon \mathbb{R}$, $a, \beta \epsilon \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = \beta$, τότε

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda a$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm \beta_n) = a \pm \beta$

3) $\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{N} a_n = a - S_N$

Θεώρημα *Αν η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει, τότε* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. *Έτσι, αν* $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, *τότε η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *δεν συγκλίνει.*

Το θεώρημα αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν κριτήριο μη σύγκλισης μιας σειράς, π.χ. η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+2}$ δεν συγκλίνει αφού $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$.

Θεώρημα (Τηλεσκοπικές σειρές) Άν $a_n = \beta_n - \beta_{n+1}$ και $lim_{n\to\infty} \beta_n = \beta$ τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = (\beta_1 - \beta_2) + (\beta_2 - \beta_3) + \ldots + (\beta_n - \beta_{n+1}) + \ldots = \beta_1 - \lim_{n\to\infty} \beta_{n+1} = \beta_1 - \beta$$

Παράδειγμα 1.7 Να βρεθεί το άθροισμα της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, όπου

$$a_n = \frac{2}{4n^2 - 1}$$

Λύση: Η ακολουθία γράφεται

$$a_n = \frac{2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{(2n-1)} - \frac{1}{(2n+1)} = \beta_n - \beta_{n+1}$$

με $\beta_n = \frac{1}{2n-1}$. Άρα

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) + \ldots = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} = 1$$

Ορισμός *(γεωμετρική σειρά) Η σειρά*

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^n + \ldots \qquad (a \neq 0)$$

λέγεται **γεωμετρική** *σειρά.*

Θεώρημα *Η γεωμετρική σειρά*

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + \ldots$$

έχει τις ιδιότητες:

i) Αν $|r| \geq 1$, η σειρά αποκλίνει

ii) Αν $|r| < 1$, η σειρά συγκλίνει

και το άθροισμά της είναι $\dfrac{a}{1-r}$, δηλαδή

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$$

Παράδειγμα 1.8 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 3\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{3}{1-\frac{1}{2}} = 6$

Θεώρημα *Αν $0 \leq a_n \leq \beta_n$ τότε:*

i) Αν $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ συγκλίνει, τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει

ii) Αν $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ απειρίζεται, τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ απειρίζεται

Ορισμός *(Αρμονική σειρά) Η σειρά*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\rho}}$$

με $\rho \in \mathbb{R}$, ονομάζεται **αρμονική** *σειρά ρ-τάξης.*

Θεώρημα *Η αρμονική σειρά*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\rho}}$$

συγκλίνει τότε και μόνο τότε αν $\rho > 1$.

Παραδείγματα 1.9 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

Θεώρημα *(κριτήριο ριζών) Η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$:

i) συγκλίνει αν $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$

ii) αποκλίνει αν $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$

Παράδειγμα 1.10 Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n}}{n^n}$ συγκλίνει

Πράγματι,

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{e^{2n}}{n^n}} = lim_{n\to\infty} \frac{e^2}{n} = 0 < 1.$

Θεώρημα *(κριτήριο λόγων) Η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$:

i) συγκλίνει αν $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$

ii) αποκλίνει αν $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$

Παράδειγμα 1.11 Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!n!}$ αποκλίνει

Πράγματι, $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{4n+2}{n+1} \longrightarrow 4 > 1.$

Θεώρημα *(εναλλάσσουσα σειρά) Αν* $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq \ldots \geq 0$ *και* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *τότε η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ *συγκλίνει.*

Σφάλμα αποκοπής *Αν* S_n *το n-οστό μερικό άθροισμα της εναλλάσσουσας σειράς και* s *το άθροισμά της τότε*

$$|S_n - s| \leq a_{n+1}$$

Παράδειγμα 1.12 Η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ συγκλίνει, αφού $a_n = \frac{1}{n}$, ικανοποιεί τις υποθέσεις του παραπάνω θεωρήματος.

Το σφάλμα αποκοπής μετά από 100 όρους είναι

$$S_{100} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots - \frac{1}{100}$$

$$|S_{100} - s| \leq a_{101} = \frac{1}{101}$$

Απόλυτη σύγκλιση: *Αν* $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ *συγκλίνει τότε* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *συγκλίνει και ισχύει* $|\sum_{n=1}^{\infty}a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$.

2. ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ

2.1 Ορισμοί και ιδιότητες

Ορισμός *Αν* $\{a_n\}$ *ακολουθία πραγματικών αριθμών και* x *πραγματική μεταβλητή τότε η σειρά*

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

λέγεται **δυναμοσειρά** *κέντρου 0.*

Γενικότερα αν x_0 *πραγματικός αριθμός η σειρά*

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-x_0\right)^n = a_0 + a_1\left(x-x_0\right) + \ldots$$

λέγεται δυναμοσειρά κέντρου x_0.

Θεώρημα *Για την δυναμοσειρά* $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-x_0\right)^n$ *έχουμε τρεις δυνατότητες:*

i) η σειρά συγκλίνει μόνο για $x=x_0$

ii) η σειρά συγκλίνει για κάθε $x\epsilon\mathbb{R}$

iii) υπάρχει $R>0$ *τέτοιο ώστε η σειρά συγκλίνει για κάθε* x *με* $|x-x_0|<R$.

Τα άκρα του διαστήματος εξετάζονται κατά περίπτωση. Δηλαδή η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-x_0\right)^n$ συγκλίνει πάντα για κάθε x σε κάποιο διάστημα το οποίο καλούμε *διάστημα σύγκλισης*, το δε R καλείται *ακτίνα σύγκλισης* και υπολογίζεται από τους τύπους

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \qquad \text{ή} \qquad R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$$

που προκύπτουν από τα θεωρήματα (κριτήριο ριζών ή κριτήριο λόγου)

Παραδείγματα 2.1 Να βρεθεί η ακτίνα σύγκλισης και το διάστημα σύγκλισης των δυναμοσειρών

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+1)^n}{2^n}$

iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) x^n$ iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (x-2)^n$

Λύση:

i) $R = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} = 1$

ii) συγκλίνει για $\left|\frac{x+1}{2}\right| < 1 \Rightarrow -2 < x+1 < 2 \Rightarrow -3 < x < 1$

iii) ξεχωριστά οι γεωμετρικές σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}$ συγκλίνουν στα διαστήματα $(-2, 2)$ και $(-3, 3)$ αντίστοιχα και παίρνουμε το μικρότερο $-2 < x < 2$.

iv) Η ακτίνα σύγκλισης είναι

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

και το διάστημα σύγκλισης είναι $-1 < x-2 < 1$ δηλαδή $1 < x < 3$.

Θεώρημα *Αν* $f(x) = \frac{a}{x-\beta}$ *μια συνάρτηση τότε:*

i) η παράσταση σε δυναμοσειρά με κέντρο 0 της $f(x)$ *είναι*

$$\frac{a}{x-\beta} = -\frac{a}{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{\beta}\right)^n \qquad \text{για} \qquad |x| < |\beta| \neq 0$$

ii) η παράσταση σε δυναμοσειρά με κέντρο x_0 *είναι*

$$\frac{a}{x-\beta} = -\frac{a}{\beta - x_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-x_0}{\beta-x_0}\right)^n \qquad \text{για} \qquad |x-x_0| < |\beta - x_0| \neq 0.$$

Απόδειξη

i)

$$\frac{a}{x-\beta} = \frac{-a}{\beta - x} = \frac{-\frac{a}{\beta}}{1-\left(\frac{x}{\beta}\right)} = -\frac{a}{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{\beta}\right)^n, \qquad \text{για} \qquad \left|\frac{x}{\beta}\right| < 1$$

ii) Αφού $\beta \neq x_0$, έχουμε

$$\frac{a}{x-\beta} = \frac{-a}{\beta - x} = \frac{-a}{(\beta - x_0) - (x - x_0)} = \frac{-\frac{a}{\beta - x_0}}{1-\left(\frac{x-x_0}{\beta-x_0}\right)}$$

$$= \left(\frac{-a}{\beta - x_0}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-x_0}{\beta-x_0}\right)^n, \text{ για } \left|\frac{x-x_0}{\beta-x_0}\right| < 1$$

Παράδειγμα 2.2

$$
\begin{aligned}
f(x) = \frac{3}{x+2} &= \frac{3}{x-(-2)} \\
&= \frac{-3}{-2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{-2}\right)^n \\
&= \frac{3}{2}\left[1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{8} + \dots\right]
\end{aligned}
$$

Παράδειγμα 2.3

$$
\begin{aligned}
f(x) = \frac{5x-1}{x^2-x-2} &= \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-2} = \frac{2}{x-(-1)} + \frac{3}{x-2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n x^n + \frac{-3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left[2(-1)^{-n} - \frac{3}{2^{n+1}}\right]x^n \qquad \text{για} \qquad |x| < 1
\end{aligned}
$$

Θεώρημα *(Πράξεις δυναμοσειρών) Αν* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n x^n$ *τότε*

1) $f(kx) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n k^n x^n$

2) $f(x^N) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{nN}$

3) $f(x) \pm g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \pm \beta_n) x^n$

4) $f(x)\cdot g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n x^n$, *όπου* $\gamma_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \beta_{n-k}$,

(με διάστημα σύγκλισης το μικρότερο των f,g.)

Θεώρημα *Αν* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ *για κάθε* $|x-x_0| < R$,

τότε:

1) $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}$ *για κάθε* $|x-x_0| < R$

2) $\int_{x_0}^{x} f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$ *για κάθε* $|x-x_0| < R$.

Παράδειγμα 2.4 Είναι γνωστό ότι

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots \qquad \text{για} \qquad |x| < 1$$

Παραγωγίζουμε

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + x + 2x + \dots + nx^{n-1} + \dots \qquad \text{για} \qquad |x| < 1$$

Παράδειγμα 2.5 Παρόμοια

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + ... + (-1)^n x^n + ... \qquad \text{για} \qquad |x| < 1$$

Ολοκληρώνουμε

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^n \frac{x^n}{n} + ... \qquad \text{για} \qquad |x| < 1$$

Για $x = 1$ συγκλίνει (ως εναλλάσσουσα σειρά) οπότε

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - ... + \frac{(-1)^n}{n} + ...$$

2.2 Σειρές Taylor

Τέλος αν $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \forall \quad x \epsilon (-R, R)$ τότε παρατηρούμε ότι $a_n = \frac{f^n(0)}{n!}$. Αντίστροφα αν f συνάρτηση, η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ λέγεται σειρά Taylor(Mac-Laurin) της f.

Π.χ. δίνεται $f(x) = e^x$ τότε

$$f^{(n)}(x) = e^x, \quad \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{n!}.$$

Άρα

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Η σειρά συγκλίνει $\forall \ x \epsilon \mathbb{R}$.

Πράγματι,

$$R = \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = +\infty.$$