Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

Θεωρούμε τους χώρους $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$, $n, m \in \mathbb{N}$ και $A \subseteq \mathbb{R}^n$.
Ένας κανόνας $\vec{f}$, που σε κάθε $\vec{x} \in A$ αντιστοιχεί το διάνυσμα $\vec{f}(\vec{x})$ λέγεται διανυσματική συνάρτηση n μεταβλητών.
Συμβολίζουμε

$$\vec{f} : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

Ειδικότερα, για $m=1$, η f με

$$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

λέγεται πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών.
Για $n=2$, ή $n=3$ και $m=1$, πολλές φορές γράφουμε
$z = f(x,y)$, $(x,y) \in A$ ή $w = f(x,y,z)$, $(x,y,z) \in A$.
Για $n=1$, $m=2$ (ή 3) και $A = I$ ένα διάστημα του $\mathbb{R}$ έχουμε τη διανυσματική συνάρτηση μιας μεταβλητής, που συνήθως συμβολίζεται με

$$\vec{r} : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \ (\text{ή } \mathbb{R}^3)$$

με $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ ή $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$
και εκφράζει μια καμπύλη στον $\mathbb{R}^2$ ή $\mathbb{R}^3$ αντίστοιχα.

Παραδείγματα:

1) $\vec{r}(t) = (a\cos t, a\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$

2) $\vec{r}(t) = (a\cos^3 t, a\sin^3 t)$, $t \in [0, 2\pi]$

Ακολουθίες στον $\mathbb{R}^n$

Όπως στις ακολουθίες του $\mathbb{R}$, έτσι και στον $\mathbb{R}^n$ ορίζουμε.

Ορισμός

Ακολουθία στον $\mathbb{R}^n$ είναι μία συνάρτηση

$$\vec{a} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

Συμβολίζουμε

$$\vec{a}_\nu = (a_{1\nu}, a_{2\nu}, \ldots a_{n\nu})$$

Σύγκλιση

Μία ακολουθία $(\vec{a}_\nu)$ του $\mathbb{R}^n$ συγκλίνει στο $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ όταν $\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε

$$\|\vec{a}_\nu - \vec{a}\| < \varepsilon \quad \forall \ \nu \geq N.$$

Συμβολίζουμε $\vec{a}_\nu \longrightarrow \vec{a}$ ή $\lim\limits_{\nu \to +\infty} \vec{a}_\nu = \vec{a}$.

Θεώρημα
(Βασική ιδιότητα)

Έστω $\vec{a}_\nu = (a_{1\nu}, a_{2\nu}, \ldots a_{n\nu})$ μία ακολουθία του $\mathbb{R}^n$ και $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}$.
Τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\lim_{\nu \to +\infty} \vec{a}_\nu = \vec{a} \Leftrightarrow \lim_{\nu \to +\infty} a_{i\nu} = a_i, \ \forall\, i = 1, 2, \ldots, n.$$

Παραδείγματα

1) $\vec{a}_\nu = \left(\frac{2\nu+1}{\nu+3}, \frac{1}{\nu} \right) \longrightarrow (2, 0)$

αφού $\frac{2\nu+1}{\nu+3} \longrightarrow 2$ και $\frac{1}{\nu} \longrightarrow 0$

2) $\vec{a}_\nu = \left(\frac{1}{\nu+1}, \frac{3\nu^2}{2\nu^2+1}, \frac{\nu+2}{\nu+1} \right) \longrightarrow \left(0, \frac{3}{2}, 1\right)$

αφού $\frac{1}{\nu+1} \longrightarrow 0$, $\frac{3\nu^2}{2\nu^2+1} \longrightarrow \frac{3}{2}$ και $\frac{\nu+2}{\nu+1} \longrightarrow 1$

3) $\vec{a}_\nu = \left(\frac{\sin\nu}{\nu}, \frac{(-1)^\nu}{\nu^2}, \frac{2\nu}{\nu+1} \right) \longrightarrow (0, 0, 2)$

αφού $\frac{\sin\nu}{\nu} \longrightarrow 0$ (μηδενική επί φραγμένη),

$\frac{(-1)^\nu}{\nu^2} \longrightarrow 0$, $\frac{2\nu}{\nu+1} \longrightarrow 2$

Όριο και συνέχεια πραγματικής συνάρτησης

Ορισμός ορίου: Η συνάρτηση $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ έχει όριο $\ell \in \mathbb{R}$ καθώς $\vec{x} \to \vec{\xi}$ όταν $\forall\, \varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ έτσι ώστε:

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \forall\, \vec{x} \in A \text{ με } \vec{x} \neq \vec{\xi} \text{ και } \|\vec{x} - \vec{\xi}\| < \delta$$

Συμβολίζουμε: $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{\xi}} f(\vec{x}) = \ell$

Παρατήρηση: Η έννοια αυτή του ορίου είναι παρόμοια με εκείνη του ορίου πραγματικής συνάρτησης μιας μεταβλητής. Υπάρχει όμως μια σημαντική διαφορά: Η ύπαρξη του ορίου εξαρτάται από τη διαδρομή που το $\vec{x}$ "πλησιάζει" στο $\vec{\xi}$. Συγκεκριμένα ισχύει το ακόλουθο,

Θεώρημα: (Κριτήριο μη ύπαρξης ορίου) Έστω $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση. Αν η f έχει διαφορετικά όρια καθώς $\vec{x} \to \vec{\xi}$ κατά μήκος δύο διαφορετικών διαδρομών ή υπάρχουν δύο ακολουθίες $\vec{x}_\nu$ και $\vec{y}_\nu$ του A με $\vec{x}_\nu \to \vec{\xi}$ και $\vec{y}_\nu \to \vec{\xi}$ και οι αντίστοιχες ακολουθίες $f(\vec{x}_\nu)$, $f(\vec{y}_\nu)$ των τιμών της συνάρτησης έχουν διαφορετικά όρια, τότε δεν υπάρχει το $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{\xi}} f(\vec{x})$.

Παραδείγματα:

1) Η συνάρτηση

$$f(x,y)=\frac{x^2y}{x^4+y^2}$$

δεν έχει όριο καθώς $(x,y)\to(0,0)$.
Πράγματι, κατά μήκος της παραβολής $y=\lambda x^2$, $x\neq 0$ είναι

$$\lim_{x\to 0} f(x,\lambda x^2)=\lim_{x\to 0}\frac{\lambda x^4}{x^4+\lambda^2x^4}=\frac{\lambda}{1+\lambda^2}$$

Το όριο εξαρτάται από την παράμετρο λ δηλαδή από τη διαδρομή. Επομένως δεν υπάρχει.

α) Ομοίως δεν υπάρχει το

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} x\sin\frac{1}{y}$$

Πράγματι· θεωρούμε τις ακολουθίες

$$\left(1,\frac{1}{2\nu\pi}\right)\to(1,0)\ ,\ \left(1,\frac{1}{2\nu\pi+\frac{\pi}{2}}\right)\to(1,0)$$

και

$$f\left(1,\frac{1}{2\nu\pi}\right)=\sin 2\nu\pi=0\to 0$$

$$f\left(1,\frac{1}{2\nu\pi+\frac{\pi}{2}}\right)=\sin\left(2\nu\pi+\frac{\pi}{2}\right)=1\to 1$$

Ορισμός συνέχειας: Η συνάρτηση $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ονομάζεται συνεχής σε ένα σημείο $\vec{\xi}$ του A, όταν

υπάρχει το $\lim_{\vec{x} \to \vec{\xi}} f(\vec{x})$ και ισχύει $\lim_{\vec{x} \to \vec{\xi}} f(\vec{x}) = f(\vec{\xi})$

το $\vec{\xi}$ λέγεται σημείο συνέχειας της συνάρτησης f. Όταν η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο $\vec{\xi}$, τότε αυτή λέγεται ασυνεχής στο $\vec{\xi}$ και το σημείο $\vec{\xi}$ ονομάζεται σημείο ασυνέχειας της συνάρτησης f. Η συνάρτηση f ονομάζεται συνεχής, όταν αυτή είναι συνεχής σε κάθε σημείο $\vec{\xi}$ του A.

Παραδείγματα:

1) Εξετάστε ως προς τη συνέχεια στο $(0,0)$ τη συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Έχουμε

$$|f(x,y)| = \frac{x^2|y|}{x^2+y^2} \leq \frac{x^2|y|}{x^2} = |y| \longrightarrow 0$$

(όταν το $(x,y) \longrightarrow (0,0)$), τότε $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

Δηλαδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(0,0)$ επειδή είναι και $f(0,0) = 0$.

2) Εξετάστε ως προς τη συνέχεια στα σημεία $(a,0)$ τη συνάρτηση.

$$f(x,y)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{y}, & y\neq 0 \\ 0, & y=0 \end{cases}$$

i) Για $a\neq 0$, θεωρούμε τις ακολουθίες

$$\left(a, \frac{1}{2\nu\pi}\right) \to (a,0)$$

και

$$\left(a, \frac{1}{2\nu\pi+\frac{\pi}{2}}\right) \to (\alpha,0)$$

Παρατηρούμε ότι,

$$f\left(a, \frac{1}{2\nu\pi}\right) = a\sin 2\nu\pi = 0 \to 0$$

$$f\left(a, \frac{1}{2\nu\pi+\frac{\pi}{2}}\right) = a\sin\left(2\nu\pi+\frac{\pi}{2}\right) = a \to a$$

Από την αρχή της μεταφοράς, δεν υπάρχ το $\lim\limits_{(x,y)\to(a,0)} f(x,y)$ και επομένως η f είναι ασυνέχ στα σημεία $(a,0)$, με $a\neq 0$.

ii) Για $a=0$, έχουμε

$$\left|x\sin\frac{1}{y}\right| = |x|\left|\sin\frac{1}{y}\right| \leq |x| \to 0$$

Έχουμε ότι $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$

Δηλαδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $(0,0)$.