Πίνακες.

Βασικές έννοιες.

Θεωρούμε τους πραγματικούς αριθμούς a_{ij}, $i=1,2,\ldots,m$, $j=1,2,\ldots,n$, πλήθους $m\cdot n$. Μια ορθογώνια διάταξη των αριθμών αυτών σε m οριζόντιες σειρές και n κατακόρυφες σειρές της μορφής

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

λέγεται πίνακας $m\times n$. Οι οριζόντιες σειρές λέγονται γραμμές και οι κατακόρυφες σειρέ λέγονται στήλες και οι αριθμοί a_{ij} είναι τα στοιχεία του. Το σύνολο των $m\times n$ πινάκων με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς συμβολίζεται με $\mathbb{R}^{m\times n}$.

Ισότητα πινάκων: Έστω $A=(a_{ij})_{m\times n}$ και $B=(\beta_{ij})_{m\times n}$ Ορίζουμε:

$$A=B \iff a_{ij}=\beta_{ij}\,,\ i=1,2,\ldots,m\,,\ j=1,2,\ldots,n$$

Τετραγωνικός πίνακας: Αν $m=n$, ο $n\times n$ πίνακας ονομάζεται τετραγωνικός. Για ένα τετραγωνικό πίνακα $A=(a_{ij})_{n\times n}$ τα στοιχεία $a_{11}, a_{22}, \ldots a_{nn}$ ορίζουν την κύρια διαγώνιο. Αν $a_{ij}=0$ για $i>j$, δηλαδή αν όλα τα στοιχεία του που βρίσκοντα κάτω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδέν, τότε ο τετραγωνικός πίνακας $(a_{ij})_{n\times n}$

λέγεται <u>άνω τριγωνικός</u>. Αν είναι $a_{ij}=0$ για $i<j$, δηλαδή αν όλα τα στοιχεία του που βρίσκονται πάνω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδέν, τότε λέγεται <u>κάτω τριγωνικός</u> πίνακας.

<u>Ανάστροφος πίνακας</u>: Αν $A=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{m\times n}$, τότε ο πίνακας

$$A^T=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{n\times m}$$

δηλαδή ο πίνακας που προκύπτει με εναλλαγή γραμμών - στηλών λέγεται <u>ανάστροφος</u>.

<u>Παράδειγμα</u>

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad A^T=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

<u>Πράξεις πινάκων</u>

<u>Πρόσθεση</u>: Έστω $A=(a_{ij})_{m\times n}$ και $B=(\beta_{ij})_{m\times n}$ δύο πίνακες του $\mathbb{R}^{m\times n}$. Η <u>πρόσθεση</u> στον $\mathbb{R}^{m\times n}$ είναι μια πράξη, η οποία σε κάθε δύο πίνακες Α και Β αντιστοιχεί ένα πίνακα $\Gamma=(\gamma_{ij})_{m\times n}$ του $\mathbb{R}^{m\times n}$ με

$$\gamma_{ij}=a_{ij}+\beta_{ij}$$

Γράφουμε $A+B=\Gamma$ και ο πίνακας Γ λέγεται <u>άθροισμα</u>.

<u>Παράδειγμα</u>: Για τους πίνακες

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

έχουμε

$$A+B=\begin{bmatrix} 1+0 & 2+(-1) & 3+5 \\ -4+6 & 0 & 2+1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

<u>Πολλαπλασιασμός αριθμού επί πίνακα</u>: Έστω $A=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $\lambda\in\mathbb{R}$. Ορίζουμε

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})_{m\times n}$$

Παράδειγμα: Για $\lambda = 3$ και $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -8 & 5 \end{bmatrix}$ έχουμε

$$3\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -8 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -24 & 15 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα: Δίνονται οι πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 2x-1 & 6 \\ a & \beta+1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 3y+1 \\ 2 & a+6 \end{bmatrix}$$

Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί a, β, x, y όταν ισχύει $2A - 3B = I$.

Λύση: Η εξίσωση $2A - 3B = I$ γράφεται

$$2\begin{bmatrix} 2x-1 & 6 \\ a & \beta+1 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 5 & 3y+1 \\ 2 & a+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4x-2-15 & 12-9y-3 \\ 2a-6 & 2\beta+2-3a-18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 17 = 1 \\ -9y + 9 = 0 \\ 2a - 6 = 0 \\ 2\beta - 3a - 16 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9/2 \\ y = 1 \\ a = 3 \\ \beta = 13 \end{cases}$$

Πολλαπλασιασμός πινάκων: Θεωρούμε τους πίνακες $A = (a_{ij})_{m\times n}$ και $B = (\beta_{jk})_{n\times \ell}$. Το γινόμενο AB είναι ένας $m\times \ell$ πίνακας Γ, γράφουμε

$AB = \Gamma$, όπου

$\Gamma = (\gamma_{ik})_{m\times \ell}$ με $\gamma_{ik} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir}\beta_{rk}$.

Αν $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (τετραγωνικός πίνακας), τότε ορίζουμε τις δυνάμεις:

$A^0 = I$, $A^1 = A$, $A^2 = AA$, $A^n = A^{n-1}A$, $n=2,3,\dots$

Παράδειγμα: Αν

$$A = \underset{2\times 3}{\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}}, \quad B = \underset{3\times 2}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}}, \quad \Gamma = \underset{2\times 2}{\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot1-1\cdot2+3\cdot3 & 2\cdot0-1\cdot1-1\cdot3 \\ 0\cdot1+1\cdot2+4\cdot3 & 0+1\cdot1-14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ 14 & -3 \end{bmatrix}$$

$$B\cdot\Gamma = \underset{3\times 2}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}} \cdot \underset{2\times 2}{\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}} = \underset{3\times 2}{\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -4 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}}$$

$$B\cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 10 \\ 6 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι $AB \neq BA$ και ότι το γινόμενο ΓB δεν ορίζεται.

Αν $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ να βρεθούν τα A^2, A^3.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A\cdot A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Αντίστροφος πίνακας: Αν για τον πίνακα $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ υπάρχει $X\in\mathbb{R}^{n\times n}$, τέτοιος ώστε

$$AX = XA = I,$$

τότε λέμε ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και X είναι ο αντίστροφος πίνακας του A $X = A^{-1}$. Ισχύουν οι ιδιότητες

$$(A^{-1})^{-1} = A \quad \text{και} \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Ορίζουσες

i) Θεωρούμε τον τετραγωνικό πίνακα $A\in\mathbb{R}^{2\times 2}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Ορίζουμε ως ορίζουσα του πίνακα A και συμβολίζουμε $\det A$ ή $|A|$ τον πραγματικό αριθμό

$$|A| = \det(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

ii) Θεωρούμε τον τετραγωνικό πίνακα $A\in\mathbb{R}^{3\times 3}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Η ορίζουσα, η οποία αντιστοιχεί στον πίνακα A, ορίζεται

$$|A| = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Στην περίπτωση αυτή έχουμε αναπτύξει την ορίζουσα κατά τα στοιχεία της πρώτης γραμμής. Με ανάλογο ή κατά τα στοιχεία της j-στήλης είναι:

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj},$$

όπου

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$$

<u>Υπολογισμός αντίστροφου πίνακα.</u>

Ο αντίστροφος A^{-1}, αν υπάρχει, δίνεται από τον τύπο

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A,$$

όπου $\operatorname{adj} A$ είναι ο συμπληρωματικός (ανάδρομος, adjoint) και ισούται με

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

<u>Παράδειγμα</u>: Ο αντίστροφος του πίνακα

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

είναι $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \operatorname{adj} A$, όπου

$\det A = 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ (ανάπτυγμα κατά τα στοιχεία της πρώτης στήλης)

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 13 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>Παράδειγμα</u>: Ο αντίστροφος του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

είναι

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

<u>Παράδειγμα</u>: Να λυθεί η εξίσωση $A\vec{x} = \vec{b}$, όπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Λύση:

$$A\vec{x} = \vec{b} \iff \vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

$$\iff \vec{x} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ιδιοτιμές - ιδιοδιανύσματα

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ένας τετραγωνικός πίνακας $n\times n$. Ένα διάνυσμα $\vec{u} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ ονομάζεται ιδιοδιάνυσμα (ή χαρακτηριστικό διάνυσμα) του πίνακα A αν ικανοποιεί την εξίσωση

$$A\vec{u} = \lambda \vec{u}, \quad (\vec{u} \neq \vec{0}, \lambda \in \mathbb{C}). \quad (1)$$

Η τιμή του λ που ικανοποιεί την (1) λέγεται ιδιοτιμή (ή χαρακτηριστική τιμή) του πίνακα A.

Η εξίσωση (1) γράφεται

$$(A - \lambda I_n)\cdot \vec{u} = \vec{0} \quad (2)$$

Η εξίσωση (2) εκφράζει ένα ομογενές γραμμικό σύστημα. Όπως είναι γνωστό, το σύστημα (2) για να έχει λύσεις, εκτός της μηδενικής, πρέπει

$$\det(A - \lambda I_n) = 0. \quad (3)$$

Η εξίσωση (3) λέγεται χαρακτηριστική εξίσωση του πίνακα A και το πολυώνυμο $\det(A-\lambda I_n)$ λέγεται χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A. Επομένως, οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης. Το σύνολο των ιδιοτιμών του A λέγεται φάσμα του A και συμβολίζεται με $\sigma(A)$.

Παράδειγμα

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι ιδιοσυναρτήσεις του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

Λύση

(i) Βρίσκουμε τη χαρακτηριστική εξίσωση του A.

$$|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)(\lambda-2) = 0$$

(ii) Οι ιδιοτιμές του A είναι:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2$$

(iii) Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$, έστω $\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix}$ το ζητούμενο ιδιοδιάνυσμα. Τότε

$$(A - \lambda_1 I) \cdot \vec{u}_1 = \vec{0}$$

δηλαδή

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 a_1 - \beta_1 = 0 \\ 0 \cdot a_1 + \beta_1 = 0 \end{cases}$$

δηλαδή $\beta_1 = 0$ και $a_1 = c_1$ (αυθαίρετο).

Επομένως το ζητούμενο ιδιοδιάνυσμα είναι

$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{για } c_1 = 1)$$

Για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 2$, έστω $\vec{u}_2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$ το ζητούμενο ιδιοδιάνυσμα. Τότε

$$(A - \lambda_2 I) \cdot \vec{u}_2 = \vec{0}$$

δηλαδή

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow a_2 + \beta_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a_2 = c_2 \\ \beta_2 = -c_2 \end{cases}$$

Επομένως το ζητούμενο ιδιοδιάνυσμα είναι

$$\vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (\text{για } c_2 = 1)$$

Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας
Παραδείγματα και Ασκήσεις

Παράδειγμα διαγωνίων πινάκων:
Ποιοί από τους παρακάτω πίνακες είναι διαγώνιοι:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \ , \ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \ , \ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}$$

Οι πίνακες A, B είναι διαγώνιοι. Ο πίνακας C δεν είναι διαγώνιος.

Παράδειγμα μοναδιαίου πίνακα:

Ο πίνακας $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ είναι μοναδιαίος ενώ ο $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ δεν είναι.

Παράδειγμα άνω τριγωνικών πινάκων:

Οι πίνακες $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ είναι άνω τριγωνικοί.

Οι πίνακες $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ δεν είναι άνω τριγωνικοί.

Οι πίνακες $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ είναι άνω τριγωνικοί (και μάλιστα είναι αυστηρά άνω τριγωνικοί).

Παράδειγμα κάτω τριγωνικών πινάκων:

Οι πίνακες $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ είναι κάτω τριγωνικοί.

Οι πίνακες $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ δεν είναι κάτω τριγωνικοί.

Οι πίνακες $F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, $G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ είναι κάτω τριγωνικοί (και μάλιστα είναι αυστηρά κάτω τριγωνικοί).

Παράδειγμα ανάστροφων πινάκων:

Έστω οι πίνακες $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$, $C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$.

Οι ανάστροφοι πίνακες τους είναι οι

$$A^\top = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \ , \ B^\top = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2} \ , \ C^\top = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3} \ .$$

Παράδειγμα συμμετρικού πίνακα:

Ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 5 \\ -4 & 5 & 10 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ είναι συμμετρικός ενώ ο $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ δεν είναι συμμετρικός.

Παράδειγμα ισότητας πινάκων:

Έστω οι πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3} \ , \ B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3} \ .$$

Έχουμε ότι $A = B$ αν και μόνο αν $a_{11} = 1$, $a_{12} = 3$, $a_{13} = 2$, $a_{21} = 0$, $a_{22} = 2$, $a_{23} = 5$.

Ερώτημα:

Έστω οι πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2} \ , \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3} \ .$$

Μπορούμε να πούμε ότι $A = B$; Όχι, δεν έχουν ίδιες διαστάσεις.

Παραδείγματα πρόσθεσης πινάκων:

1) Έστω $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ και $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 7 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Το άθροισμα $A + B$ είναι ο 3×3 πίνακας:

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 1+2 & 3+1 & 3+6 \\ 2+7 & 1+3 & 0-1 \\ 0+1 & 2+3 & 4+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 9 \\ 9 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

2) Έστω $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ και $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & -7 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$. Το άθροισμα $A + B$ είναι ο 2×3 πίνακας:

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 1+2 & 1+0 & 0+4 \\ 2+1 & 4-7 & 1+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}.$$

3) Έστω $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ και $B = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 7 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$. Το άθροισμα $A + B$ είναι ο 3×2 πίνακας:

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 2-1 & 2+5 \\ 1+7 & 1-1 \\ 5-5 & 4+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 8 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}.$$

Σημείωση Η αφαίρεση $A - B$ δύο πινάκων $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ είναι η πρόσθεση του A με τον αντίθετο του B.

Παράδειγμα αφαίρεσης πινάκων:

Έστω $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ και $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & -7 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$. Η αφαίρεση $A - B$ είναι ο 2×3 πίνακας:

$$C = A - B = A + (-B) = \begin{bmatrix} 1-2 & 1-0 & 0-4 \\ 2-1 & 4+7 & 1-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -4 \\ 1 & 11 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}.$$

Παραδείγματα βαθμωτού γινομένου:

1) Έστω $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ και $\lambda = 2 \in \mathbb{R}$. Τότε το βαθμωτό γινόμενο $2A$ είναι ο πίνακας:

$$C = 2A = \begin{bmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 3 & 2\cdot 1 \\ 2\cdot 2 & 2\cdot 0 & 2\cdot 1 \\ 2\cdot 5 & 2\cdot 2 & 2\cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \\ 10 & 4 & 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} .$$

2) Έστω $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ και $\lambda = -3 \in \mathbb{R}$. Τότε το βαθμωτό γινόμενο $-3A$ είναι ο πίνακας:

$$C = -3A = \begin{bmatrix} (-3)\cdot 3 & (-3)\cdot(-1) & (-3)\cdot 2 \\ (-3)\cdot 1 & (-3)\cdot 0 & (-3)\cdot(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 3 & -6 \\ -3 & 0 & 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3} .$$

Παράδειγμα γινομένου πινάκων:

Έστω οι πίνακες $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ και $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$.

Το γινόμενο AB είναι ένας πίνακας $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ με στοιχεία:

$$\begin{aligned} c_{11} &= 4\cdot 1 + (-2)\cdot(-4) = 12 , \\ c_{12} &= 4\cdot 2 + (-2)\cdot 3 = 2 , \\ c_{13} &= 4\cdot 0 + (-2)\cdot 1 = -2 , \\ c_{21} &= (-1)\cdot 1 + 2\cdot(-4) = -9 , \\ c_{22} &= (-1)\cdot 2 + 2\cdot 3 = 4 , \\ c_{23} &= (-1)\cdot 0 + 2\cdot 1 = 2 . \end{aligned}$$

Επομένως

$$C = AB = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 2 & -2 \\ -9 & 4 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3} .$$

Ασκήσεις (Γινόμενο πινάκων)

1) Έστω οι πίνακες $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. Να υπολογιστούν τα γινόμενα AB και BA.

Έχουμε ότι $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ και $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Επομένως ορίζονται τα γινόμενα $AB \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ και $BA \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 2 + 2\cdot(-1) & 1\cdot 0 + 2\cdot 2 \\ (-1)\cdot(2) + 3\cdot(-1) & (-1)\cdot 0 + 3\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 1 + 0\cdot(-1) & 2\cdot 2 + 0\cdot 3 \\ (-1)\cdot 1 + 2\cdot(-1) & (-1)\cdot 2 + 2\cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Σχόλιο: Προσοχή ότι AB δεν είναι γενικά ίσο με BA. Το βλέπουμε και σε αυτήν την άσκηση ότι $AB \neq BA$.

2) Έστω $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ -2 & 5 & 11 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Να υπολογιστούν τα γινόμενα AB και BA.

Έχουμε ότι $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ και $B \in \mathbb{R}^{3\times 2}$. Επομένως ορίζεται το γινόμενό $AB \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ και ορίζεται το γινόμενό $BA \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ -2 & 5 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 8 + (-2)\cdot 1 + (-5)\cdot 1 & 1\cdot(-1) + (-2)\cdot 2 + (-5)\cdot(-1) \\ (-2)\cdot 8 + 5\cdot 1 + 11\cdot 1 & (-2)\cdot(-1) + 5\cdot 2 + 11\cdot(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ -2 & 5 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8\cdot 1 + (-1)\cdot(-2) & 8\cdot(-2) + (-1)\cdot 5 & 8\cdot(-5) + (-1)\cdot 11 \\ 1\cdot 1 + 2\cdot(-2) & 1\cdot(-2) + 2\cdot(5) & 1\cdot(-5) + 2\cdot 11 \\ 1\cdot 1 + (-1)\cdot(-2) & 1\cdot(-2) + (-1)\cdot 5 & 1\cdot(-5) + (-1)\cdot 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -21 & -55 \\ -3 & 8 & 17 \\ 3 & -7 & -16 \end{bmatrix}$$

3) Έστω $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 8 \\ 5 & 4 & 6 & 3 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 9 & -1 \end{bmatrix}$. Ορίζονται τα γινόμενα AB και BA; Αν ναι, να υπολογιστούν.

Έχουμε ότι $A \in \mathbb{R}^{2\times 4}$ και $B \in \mathbb{R}^{3\times 2}$. Επομένως δεν ορίζεται το γινόμενο AB αλλά ορίζεται το γινόμενο $BA \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ και είναι ίσο με

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 9 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 8 \\ 5 & 4 & 6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 0 + 2\cdot 5 & 1\cdot 2 + 2\cdot 4 & 1\cdot 1 + 2\cdot 6 & 1\cdot 8 + 2\cdot 3 \\ 0\cdot 0 + 3\cdot 5 & 0\cdot 2 + 3\cdot 4 & 0\cdot 1 + 3\cdot 6 & 0\cdot 8 + 3\cdot 3 \\ 9\cdot 0 + (-1)\cdot 5 & 9\cdot 2 + (-1)\cdot 4 & 9\cdot 1 + (-1)\cdot 6 & 9\cdot 8 + (-1)\cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 13 & 14 \\ 15 & 12 & 18 & 9 \\ -5 & 14 & 3 & 69 \end{bmatrix}$$

Άσκηση (Γινόμενο και Ισότητα πινάκων)

Δίνεται ο $A = \begin{bmatrix} x+2 & -1 \\ 4 & -x-2 \end{bmatrix}$. Να βρεθεί το $x \in \mathbb{R}$ ώστε **i**) $A^2 = \mathbb{O}$ και **ii**) $A^2 = I_2$.

Λύση:

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} x+2 & -1 \\ 4 & -x-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x+2 & -1 \\ 4 & -x-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x+2)\cdot(x+2) + (-1)\cdot 4 & (x+2)\cdot(-1) + (-1)\cdot(-x-2) \\ 4\cdot(x+2) + (-x-2)\cdot 4 & 4\cdot(-1) + (-x-2)\cdot(-x-2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x^2 + 4x + 4 - 4 & -x - 2 + x + 2 \\ 4x + 8 - 4x - 8 & -4 + x^2 + 4x + 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 + 4x & 0 \\ 0 & x^2 + 4x \end{bmatrix}$$

i) Για να ισχύει ότι $A^2 = \mathbb{O}$ δηλαδή $A^2 = \begin{bmatrix} x^2 + 4x & 0 \\ 0 & x^2 + 4x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbb{O}$
πρέπει $x^2 + 4x = 0 \Rightarrow x(x+4) = 0 \Rightarrow \ x = 0$ ή $x = -4$.

ii) Για να ισχύει ότι $A^2 = I_2$ δηλαδή $A^2 = \begin{bmatrix} x^2+4x & 0 \\ 0 & x^2+4x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$ πρέπει $x^2 + 4x = 1 \Rightarrow x^2 + 4x - 1 = 0$. Άρα μελετάμε αυτό το τριώνυμο και βλέπουμε ότι υπάρχουν τελικά οι παρακάτω δύο λύσεις: $x = \dfrac{-4+\sqrt{20}}{2}$ ή $x = \dfrac{-4-\sqrt{20}}{2}$.

Παραδείγματα (Αντιστρέψιμος πίνακας)

1) Ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος με αντίστροφο $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ αφού

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

και

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

2) Ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ δεν είναι αντιστρέψιμος καθώς για οποιονδήποτε $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ έχουμε

$$BA = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b_{11}+2b_{12} \\ 0 & b_{21}+2b_{22} \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2 \qquad \text{(Ομοίως για } AB\text{)}.$$

Άσκηση (Αντιστρέψιμος πίνακας)

Να εξετάσετε αν οι παρακάτω πίνακες είναι αντιστρέψιμοι και αν ναι να υπολογίσετε τους αντιστρόφους τους.

i) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, **ii)** $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Λύση:

Για να είναι ο A αντιστρέψιμος πρέπει να υπάρχει $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ώστε να ισχύει $AB = BA = I_2$.

i)

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{11}+b_{21} & b_{12}+b_{22} \end{bmatrix}$$

Άρα για να είναι $AB = I_2$ πρέπει

$$\begin{aligned} b_{21} &= 1\ , & b_{22} &= 0\ , \\ b_{11}+b_{21} &= 0\ , & b_{12}+b_{22} &= 1 \end{aligned}$$

το οποίο έχει λύση: $b_{21} = 1$, $b_{22} = 0$, $b_{11} = -1$, $b_{12} = 1$, δηλαδή $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Επιπλέον, για το BA έχουμε $BA = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$.

Επομένως ο A είναι αντιστρέψιμος με αντίστροφο τον B.

ii)

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}+b_{21} & b_{12}+b_{22} \\ b_{11}+b_{21} & b_{12}+b_{22} \end{bmatrix}$$

Άρα για να είναι $AB = I_2$ πρέπει

$$\begin{aligned} b_{11}+b_{21} &= 1\ , & b_{12}+b_{22} &= 0 \\ b_{11}+b_{21} &= 0\ , & b_{12}+b_{22} &= 1 \end{aligned}$$

το οποίο δεν έχει λύση και άρα ο A δεν είναι αντιστρέψιμος.

Πρόταση (Ανάπτυγμα *Laplace*)
Έστω $n \in \mathbb{N}$ με $n \geqslant 2$ και πίνακας $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ με $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$.
Η απεικόνιση ορίζουσας δίνεται από:

$$D(A) \;=\; \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} D(A_{ij}) \;=\; (-1)^{1+j} a_{1j} D(A_{1j}) + (-1)^{2+j} a_{2j} D(A_{2j}) + \;...\; + (-1)^{n+j} a_{nj} D(A_{nj})$$

και λέγεται το ανάπτυγμα *Laplace* του πίνακα A ως πρός την j-στήλη.
Αντίστοιχα, δίνεται από:

$$D(A) \;=\; \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} D(A_{ij}) \;=\; (-1)^{i+1} a_{i1} D(A_{i1}) + (-1)^{i+2} a_{i2} D(A_{i2}) + \;...\; + (-1)^{i+n} a_{in} D(A_{in})$$

και λέγεται το ανάπτυγμα *Laplace* ως προς την i-γραμμή του A.

Το πρόσημο του $(-1)^{i+j}$ δίνεται από το σχήμα

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \cdots & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

Συμβολισμός: Η ορίζουσα ενός πίνακα A συμβολίζεται με $D(A)$ ή $det(A)$ ή $|A|$.

Παράδειγμα (Ορίζουσα πίνακα 2×2)

Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Η ορίζουσά του είναι $D(A) = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2$.

Παραδείγματα (Ορίζουσα πίνακα 3×3)

1) Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. Να βρεθεί η ορίζουσα του A.

Θα πάρουμε το ανάπτυγμα *Laplace* ως προς μία γραμμή του A ή ως προς μία στήλη του A.
Παίρνουμε το ανάπτυγμα *Laplace* ως προς j-στήλη (έστω π.χ. ως προς την 1η στήλη) του A:

$$\begin{aligned} D(A) \;=\; \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+1} a_{i1} D(A_{i1}) \;&=\; (-1)^{1+1} a_{11} D(A_{11}) + (-1)^{2+1} a_{21} D(A_{21}) + (-1)^{3+1} a_{31} D(A_{31}) \\ &= (-1)^2 \cdot 1 \cdot D(A_{11}) + (-1)^3 \cdot 1 \cdot D(A_{21}) + (-1)^4 \cdot 3 \cdot D(A_{31}) \;, \end{aligned}$$

όπου

- $A_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ με $D(A_{11}) = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 1 = 6 - 1 = 5$.
- $A_{21} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ με $D(A_{21}) = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 3 = 6 - 3 = 3$.
- $A_{31} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ με $D(A_{31}) = 1 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 2 - 6 = -4$.

Άρα

$$D(A) = 1 \cdot 1 \cdot 5 - 1 \cdot 1 \cdot 3 + 1 \cdot 3 \cdot (-4) = 5 - 3 - 12 = -10 \;.$$

Αντίστοιχα θα μπορούσαμε να πάρουμε το ανάπτυγμα *Laplace* ως προς την i-γραμμή (έστω π.χ. ως προς τη 2η γραμμή):

$$\begin{aligned} D(A) = \sum_{j=1}^{3}(-1)^{2+j}a_{2j}D(A_{2j}) &= (-1)^{2+1}a_{21}D(A_{21}) + (-1)^{2+2}a_{22}D(A_{22}) + (-1)^{2+3}a_{23}D(A_{23}) \\ &= (-1)^3 \cdot 1 \cdot D(A_{21}) + (-1)^4 \cdot 2 \cdot D(A_{22}) + (-1)^5 \cdot 1 \cdot D(A_{23}) \ , \end{aligned}$$

όπου

- $A_{21} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ με $D(A_{21}) = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 3 = 6 - 3 = 3$.
- $A_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ με $D(A_{22}) = 1 \cdot 3 - 3 \cdot 3 = 3 - 9 = -6$.
- $A_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ με $D(A_{23}) = 1 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = 1 - 6 = -5$.

Άρα

$$D(A) = -1 \cdot 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot (-6) - 1 \cdot 1 \cdot (-5) = -3 - 12 + 5 = -10$$

Ομοίως μπορούσαμε να πάρουμε το ανάπτυγμα ως προς τις υπόλοιπες γραμμές ή στήλες.

2) Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$. Να βρεθεί η ορίζουσά του.

(Αρκεί να θυμόμαστε ότι 1η γραμμή ή 1η στήλη πάει + - +)
Παίρνοντας το ανάπτυγμα *Laplace* π.χ. ως προς την 1η-γραμμή του A έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} D(A) &= \sum_{j=1}^{3}(-1)^{1+j}a_{1j}D(A_{1j}) = (-1)^{1+1}a_{11}D(A_{11}) + (-1)^{1+2}a_{12}D(A_{12}) + (-1)^{1+3}a_{13}D(A_{13}) \\ &= 1 \cdot D\left(\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\right) - 0 \cdot D\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right) + 1 \cdot D\left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\right) \\ &= 1 \cdot (6-3) - 0 + 1 \cdot (6-3) = 3 - 0 + 3 = 6 \end{aligned}$$

Θα μπορούσαμε αντίστοιχα να πάρουμε το ανάπτυγμα *Laplace* π.χ. ως προς την 1η-στήλη του A και να έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} D(A) &= \sum_{i=1}^{3}(-1)^{i+1}a_{i1}D(A_{i1}) = (-1)^{1+1}a_{11}D(A_{11}) + (-1)^{2+1}a_{21}D(A_{21}) + (-1)^{3+1}a_{31}D(A_{31}) \\ &= 1 \cdot D\left(\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\right) - 2 \cdot D\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\right) + 1 \cdot D\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\right) \\ &= 1 \cdot (6-3) - 2 \cdot (0-3) + 1 \cdot (0-3) = 3 + 6 - 3 = 6 \end{aligned}$$

Παράδειγμα (σε κάποιες από τις ιδιότητες ορίζουσας πίνακα):
Έστω $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες οριζουσών

- $D(A^\top) = D(A)$.
- $D(AB) = D(A)D(B)$.
- $D(\lambda A) = \lambda^n D(A)$.

Δίνονται οι πίνακες $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ και $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.
Έχουμε ότι $D(A) = 1 \cdot 5 - 2 \cdot 3 = 5 - 6 = -1$ και $D(B) = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 4 - 3 = 1$.

Τότε

$$D(A^\top) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot 5 - 3\cdot 2 = 5 - 6 = -1 = D(A)\ .$$

$$D(AB) = \begin{vmatrix} 1\cdot 2 + 3\cdot 3 & 1\cdot 1 + 3\cdot 2 \\ 2\cdot 2 + 5\cdot 3 & 2\cdot 1 + 5\cdot 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & 7 \\ 19 & 12 \end{vmatrix} = 11\cdot 12 - 19\cdot 7 = 132 - 133 = -1 = (-1)\cdot 1 = D(A)\,D(B)\ .$$

$$D(2A) = \begin{vmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 3 \\ 2\cdot 2 & 2\cdot 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} = 2\cdot 10 - 4\cdot 6 = 20 - 24 = -4 = 2^2(-1) = 2^2 D(A).$$

Παραδείγματα (Μη αντιστρέψιμος πίνακας):
Από τη θεωρία έχουμε ότι για έναν $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ πίνακα τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- ο A είναι αντιστρέψιμος.
- $D(A) \neq 0$.

Δηλαδή ένας τετραγωνικός πίνακας είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν η ορίζουσά του είναι διάφορη του 0.

1) Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Είναι ο A αντιστρέψιμος ή οχι ;
Έχουμε ότι $D(A) = 0\cdot 2 - 0\cdot 1 = 0$, άρα ο πίνακας A δεν είναι αντιστρέψιμος. (Έχουμε ήδη δει σε προηγούμενο παράδειγμα αυτών των σημειώσεων οτι αυτός ο πίνακας δεν είναι αντστρέψιμος. Εδώ βλέπουμε ότι μπορούμε να το μελετήσουμε και μέσω της ορίζουσας).

2) Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 8 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Είναι ο A αντιστρέψιμος ή οχι;

Έχουμε ότι

$$D(A) = 1\cdot \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 4\cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 2\cdot \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(0-4) - 4\cdot(0+4) + 2\cdot(2+8) = -4 - 16 + 20 = 0$$

άρα ο A δεν είναι αντιστέψιμος.

Παράδειγμα (Αντίστροφος πίνακας):
Από τη θεωρία έχουμε ότι αν $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ πίνακας, τότε ο πίνακας $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ με στοιχεία $b_{ij} = (-1)^{i+j} D(A_{ji})$ λέγεται συμπληρωματικός ή προσαρτημένος ή *adjoint* πίνακας του A και συμβολίζεται με $adj(A)$.
Επιπλέον αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος τότε ο αντίστροφός του δίνεται από τον τύπο $A^{-1} = \dfrac{1}{D(A)}\, adj(A)$.

Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Είναι ο A αντιστρέψιμος ή όχι; Αν ναι να βρεθεί ο αντίστροφός του.

Αρχικά βλέπουμε ότι $D(A) = 1\cdot 0 - (-2)\cdot 4 = 0 + 8 = 8 \neq 0$ άρα ο A είναι αντιστέψιμος.

Ο αντίστροφός του A λοιπόν δίνεται από τον τύπο $A^{-1} = \dfrac{1}{D(A)}\, adj(A)$,
όπου $adj(A) = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1} D(A_{11}) & (-1)^{1+2} D(A_{21}) \\ (-1)^{2+1} D(A_{12}) & (-1)^{2+2} D(A_{22}) \end{bmatrix}$
με

- $D(A_{11}) = D(0) = 0$.
- $D(A_{21}) = D(4) = 4$.
- $D(A_{12}) = D(-2) = -2$.
- $D(A_{22}) = D(1) = 1$.

Άρα $adj(A) = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ και επομένως $A^{-1} = \dfrac{1}{8}\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$.

Για να ελέγξουμε τώρα αν όντως βρήκαμε σωστά τον αντίστοφο θέλουμε να ισχύει ότι $A\,A^{-1} = A^{-1}\,A = I_2$. Επομένως υπολογίζουμε

$$A\,A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 0 + 4\cdot\frac{1}{4} & 1\cdot(-\frac{1}{2}) + 4\cdot\frac{1}{8} \\ (-2)\cdot 0 + 0\cdot\frac{1}{4} & (-2)\cdot(-\frac{1}{2}) + 0\cdot\frac{1}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

$$A^{-1}\,A = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\cdot 1 + (-\frac{1}{2})\cdot(-2) & 0\cdot 4 + (-\frac{1}{2})\cdot 0 \\ \frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{1}{8}\cdot(-2) & \frac{1}{4}\cdot 4 + \frac{1}{8}\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

- Για έναν $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ αντιστρέψιμο, έχουμε ότι $A^{-1} = \frac{1}{detA}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

Άσκηση (Πράξεις πινάκων)

Για τους $A = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$. Να δείξετε ότι $A^2 + B^2 = \mathbb{O}$.

Λύση

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ -4 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ -4 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6\cdot 6 + 8\cdot(-4) & 6\cdot 8 + 8\cdot(-6) \\ -4\cdot 6 + (-6)\cdot(-4) & (-4)\cdot 8 + (-6)\cdot(-6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B^2 = BB = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\cdot 0 + (-2)\cdot 2 & 0\cdot(-2) + (-2)\cdot 0 \\ 2\cdot 0 + 0\cdot 2 & 2\cdot(-2) + 0\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Οπότε

$$A^2 + B^2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbb{O}$$

Άσκηση

Να βρείτε τους πίνακες A και B, αν ισχύει:

$$A[1\ 2] + B[-2\ 0] = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Λύση

Αρχικά πρέπει να βρούμε τις διαστάσεις τους. Πρέπει $A[1\ 2]$ και $B[-2\ 0]$ να είναι 2×2 πίνακες. Επομένως πρέπει A και B να είναι 2×1 πίνακες. Έστω λοιπόν $A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ και $B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1}$.

Επομένως έχουμε:

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & 2a_{11} \\ a_{21} & 2a_{21} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2b_{11} & 0 \\ -2b_{21} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} - 2b_{11} & 2a_{11} \\ a_{21} - 2b_{21} & 2a_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Άρα $a_{11} = 0$, $a_{21} = 1$, $b_{11} = 1$ και $b_{21} = -2$. Δηλαδή $A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Άσκηση (Αντίστροφος πίνακας)
Να υπολογιστεί ο αντίστροφος αν υπάρχει για τους παρακάτω πίνακες:
1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, 2) $B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Λύση:
1) $det(A) = 1 \cdot (-2) - 0 \cdot 3 = -2 \neq 0$. Άρα A αντ/μος με αντίστροφο:

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} adjA = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2) Για τον B έχουμε ότι μία γραμμή του είναι μόνο 0 άρα απευθείας $det(B) = 0$ δηλαδή όχι αντι/μος.

Επίλυση Γραμμικών Συστημάτων
Έστω ένα σύστημα n γραμμικών εξισώσεων με n αγνώστους:

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \ + \ ... \ + \ a_{1n}x_n = b_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \ + \ ... \ + \ a_{2n}x_n = b_2 \\ &\vdots \\ &a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 \ + \ ... \ + \ a_{nn}x_n = b_n \end{aligned}$$

Τότε το γραμμικό σύστημα γράφεται ισοδύναμα στη μορφή $AX = B$ όπου:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad , \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad .$$

Επομένως η λύση του συστήματος δίνεται από $X = A^{-1}B$ (αν ο A είναι αντιστρέψιμος).

Άσκηση (Επίλυση γραμμικού συστήματος μέσω πινάκων)
Να βρεθεί με χρήση πινάκων η λύση του γραμμικού συστήματος:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 2 \\ x - y &= 1 \end{aligned}$$

Λύση:
Το σύστημα γράφεται ισοδύναμα ως:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

δηλαδή στη μορφή $AX = B$ με $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Για να βρούμε τη λύση του συστήματος αρκεί να βρούμε τον A^{-1} αν υπάρχει. Αρχικά θα δούμε αν A αντ/μος.

- $det(A) = 2 \cdot (-1) - 3 \cdot 1 = -5 \neq 0$. Άρα ο A είναι αντιστρέψιμος.
- $adjA = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.
- $A^{-1} = \dfrac{1}{det(A)} adj(A) = \dfrac{1}{-5} \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{5} & \dfrac{3}{5} \\ \dfrac{1}{5} & -\dfrac{2}{5} \end{bmatrix}$.

- $X = A^{-1}B \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} - \frac{2}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Άρα $x = 1$ και $y = 0$ μοναδική λύση του συστήματος.

Ασκήσεις προς επίλυση:

1. Να υπολογισθεί ο αντίστροφος των $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$
2. Να λυθεί με την βοήθεια πινάκων το σύστημα:
$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ 3x - 2y &= 2 \end{aligned}$$

Άσκηση (Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα πίνακα)

Έστω πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του A.

Λύση:

- $A - \lambda I_2 = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{bmatrix}$.
- $det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)(3-\lambda) - 8 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$ (χαρακτηριστικό πολυώνυμο).
Άρα ο A έχει ιδιοτιμές τις λύσεις του χαρακτηριστικού πολυωνύμου. $\lambda_1 = 5$ και $\lambda_2 = -1$.

- Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 5$: Θεωρούμε $\overrightarrow{u_1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το οποίο δίνεται από το ομογενές σύστημα:
$$(A - \lambda_1 I_2)\,\overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1-5 & 2 \\ 4 & 3-5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
Επομένως έχουμε το ομογενές σύστημα
$$\begin{aligned} -4x_1 + 2y_1 &= 0 \\ 4x_1 - 2y_1 &= 0 \end{aligned}$$
Από οποιαδήποτε από τις δύο εξισώσεις του συστηματος έχουμε $y_1 = 2x_1$ άρα
$$\overrightarrow{u_1} = (x_1, y_1) = (x_1, 2x_1) = x_1(1, 2)$$
για οποιοδήποτε $x_1 \neq 0$. Άρα ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = -5$ είναι το $\overrightarrow{u_1} = (1, 2)$.

- Για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = -1$: Θεωρούμε $\overrightarrow{u_2} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα τέτοιο ώστε:
$$(A - \lambda_2 I_2)\,\overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1-(-1) & 2 \\ 4 & 3-(-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
Δηλαδή καταλήγουμε στο ομογενές σύστημα
$$\begin{aligned} 2x_2 + 2y_2 &= 0 \\ 4x_2 + 4y_2 &= 0 \end{aligned}$$
Από οποιαδήποτε από τις δύο παίρνουμε $x_2 = -y_2$, άρα $\overrightarrow{u_2} = (x_2, y_2) = (-y_2, y_2) = y_2(-1, 1)$ για κάθε $y_2 \neq 0$. Επομένως ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = -1$ είναι το $\overrightarrow{u_2} = (-1, 1)$.