Παράγωγος συνάρτησης

Ορισμός: Έστω $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών. Η συνάρτηση f ονομάζεται **παραγωγίσιμη στο σημείο** $\overrightarrow{a}$ του A όταν A όταν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $f_{x_1}(\overrightarrow{a}),\ f_{x_2}(\overrightarrow{a}),\ \dots ,f_{x_n}(\overrightarrow{a})$. Τότε ως ολική παράγωγο της συνάρτησης στο σημείο $\overrightarrow{a}$ ορίζουμε τον $1 \times n$ πίνακα:

$$f'(\overrightarrow{a}) = [\, f_{x_1}(\overrightarrow{a})\ \ f_{x_2}(\overrightarrow{a})\ \ \dots\ \ f_{x_n}(\overrightarrow{a}) \,] \ .$$

Στην περίπτωση που η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $\overrightarrow{x} \in A$, δηλαδή όταν υπάρχουν όλες οι μερικές παράγωγοι $f_{x_i}(\overrightarrow{x})$ για κάθε $\overrightarrow{x} \in A$ και $1 \leq i \leq n$, τότε η f ονομάζεται **παραγωγίσιμη συνάρτηση (στο** A**)** και ως **παράγωγος της συνάρτησης** f ορίζεται ο συναρτησιακός $1 \times n$ πίνακας:

$$f' = [\, f_{x_1}\ \ f_{x_2}\ \ \dots\ \ f_{x_n} \,] \ .$$

(**Συμβολισμός:** $f' = \dfrac{df}{d\overrightarrow{x}} = Jf$).

Θεώρημα : Έστω $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο σημείο $\overrightarrow{x} \in A$. Τότε οι συναρτήσεις $f+g$, λf για $\lambda \in \mathbb{R}$, fg και f/g είναι παραγωγίσιμες στο σημείο $\overrightarrow{x} \in A$ και ισχύουν οι σχέσεις:

$$1)\ (f+g)'(\overrightarrow{x}) = f'(\overrightarrow{x}) + g'(\overrightarrow{x}) \ ,$$

$$2)\ (\lambda f)'(\overrightarrow{x}) = \lambda f'(\overrightarrow{x}) \ ,$$

$$3)\ (fg)'(\overrightarrow{x}) = f'(\overrightarrow{x})g(\overrightarrow{x}) + f(\overrightarrow{x})g'(\overrightarrow{x}) \ ,$$

$$4)\ \left(\frac{f}{g}\right)'(\overrightarrow{x}) = \frac{f'(\overrightarrow{x})g(\overrightarrow{x}) - f(\overrightarrow{x})g'(\overrightarrow{x})}{\left(g(\overrightarrow{x})\right)^2} \ ,$$

όπου στην τελευταία περίπτωση πρέπει $g(\overrightarrow{y}) \neq 0$ για κάθε $\overrightarrow{y} \in B_\delta(\overrightarrow{x}) \subseteq A$ για κάποιο $\delta > 0$.

Παρατήρηση 1: Μία συνάρτηση $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, για $n \geq 2$, που είναι παραγωγίσιμη σε ενα σημείο $\overrightarrow{a} \in A$, δεν είναι αναγκαστικά συνεχής στο $\overrightarrow{a} \in A$.

Κλίση συνάρτησης

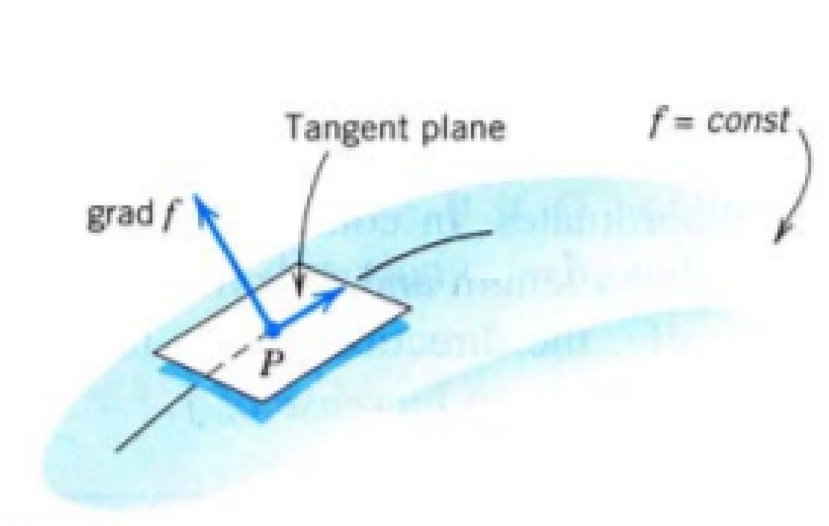
Ορισμός: Έστω $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών που είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο $\overrightarrow{a} \in A$. Τότε ως **κλίση (ή ανάδελτα) της συνάρτησης f στο σημείο $\overrightarrow{a}$** ορίζουμε το διάνυσμα

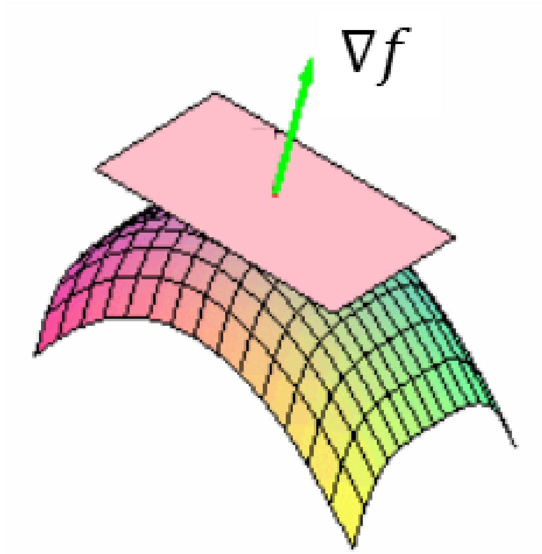
$$\nabla f(\overrightarrow{a}) = (f_{x_1}(\overrightarrow{a}),\, f_{x_2}(\overrightarrow{a}),\, \dots,\, f_{x_n}(\overrightarrow{a}))\ .$$

Αν η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη (στο A) τότε ως **κλίση (ή ανάδελτα) της συνάρτησης** f ορίζεται η διανυσματική συνάρτηση $\nabla f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, με τύπο

$$\nabla f(\overrightarrow{x}) = (f_{x_1}(\overrightarrow{x}),\, f_{x_2}(\overrightarrow{x}),\, \dots,\, f_{x_n}(\overrightarrow{x}))$$

(**Συμβολισμός:** $\nabla f = gradf$).





Γεωμετρική ερμηνεία

Έστω S επιφάνεια που αναπαριστά την $f(x, y, z) = c$ (σταθερά).
Αν το $gradf$ δεν είναι μηδέν τότε είναι το κάθετο διάνυσμα της S στο σημείο P (δηλαδή κάθετο στο εφαπτόμενο επίπεδο της S στο P).

Παρατήρηση 2: Έστω $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση n μεταβλητών στο σημείο $\overrightarrow{x} \in A$. Τότε μεταξύ της παραγώγου $f'(\overrightarrow{x})$ και της κλίσης $\nabla f(\overrightarrow{x})$ ισχύει η σχέση

$$f'(\overrightarrow{x}) = \nabla f(\overrightarrow{x})^\top$$

όπου ο εκθέτης $\top$ συμβολίζει τον ανάστροφο πίνακα.
(**Σχόλιο:** Κάθε διάνυσμα με n συντεταγμένες μπορεί να γραφτεί σαν πίνακας $n \times 1$).

C^1 συνάρτηση

Ορισμός: Έστω $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών. Η f ονομάζεται C^1 **συνάρτηση** (ή αλλιώς συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση) **σε ένα σημείο** $\overrightarrow{a} \in A$, όταν η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε μία περιοχή $B_\delta(\overrightarrow{a}) \subseteq A$ του $\overrightarrow{a}$ και οι μερικές παράγωγοι $f_{x_1}, f_{x_2}, ..., f_{x_n} : B_\delta(\overrightarrow{a}) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς στο σημείο $\overrightarrow{a}$.
Η f ονομάζεται C^1 **συνάρτηση** (ή αλλιώς συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση), όταν είναι παραγωγίσιμη στο A και οι μερικές παράγωγοι $f_{x_1}, f_{x_2}, ..., f_{x_n} : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς.

Μερικές Παράγωγοι Ανώτερης Τάξης

Έστω $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση δύο μεταβλητών που έχει μερικές παραγώγους f_x και f_y. Οι μερικές παράγωγοι f_x και f_y είναι επίσης πραγματικές συναρτήσεις δύο μεταβλητών, επομένως μπορούμε να θεωρήσουμε τις μερικές παραγώγους των f_x και f_y, δηλαδή τις $(f_x)_x$, $(f_x)_y$, $(f_y)_x$, $(f_y)_y$ (σε όποια σημεία υπάρχουν) και οι οποίες ονομάζονται **δεύτερες μερικές παράγωγοι (ή μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης) της συνάρτησης f** .

Συμβολισμός:

$$(f_x)_x = f_{xx} = \frac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$(f_x)_y = f_{xy} = \frac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$(f_y)_x = f_{yx} = \frac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$(f_y)_y = f_{yy} = \frac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Ορισμός: Έστω $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών και $\overrightarrow{a} \in A$. Έστω ότι για κάποιο $\delta > 0$ με $B_\delta(\overrightarrow{a}) \subseteq A$ υπάρχει η πρώτη μερική παράγωγος $f_{x_i}(\overrightarrow{x})$ για κάποιο i με $1 \leq i \leq n$ και για κάθε $\overrightarrow{x} \in B_\delta(\overrightarrow{a})$. Τότε η μερική παράγωγος $f_{x_i x_j}(\overrightarrow{a})$ είναι η **δεύτερη μερική παράγωγος της f ως προς τις μεταβλητές x_i και x_j στο σημείο** $\overrightarrow{a}$ και ορίζεται ως

$$f_{x_i x_j}(\overrightarrow{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\overrightarrow{a}) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) := \lim_{h \to 0} \frac{f_{x_i}(\overrightarrow{a} + h\overrightarrow{e_j}) - f_{x_i}(\overrightarrow{a})}{h}$$

(αν υπάρχει αυτό το όριο).

Αν υπάρχει η μερική παράγωγος $f_{x_i}(\overrightarrow{x})$ για κάθε $\overrightarrow{x} \in A$, τότε η συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο

$$f_{x_i x_j}(\overrightarrow{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\overrightarrow{x}) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(\overrightarrow{x}) := \lim_{h \to 0} \frac{f_{x_i}(\overrightarrow{x} + h\overrightarrow{e_j}) - f_{x_i}(\overrightarrow{x})}{h}$$

ονομαζεται **δεύτερη μερική παράγωγος** (ή μερική παράγωγος δεύτερης τάξης) **της f ως προς τις μεταβλητές x_i και x_j** .

Σχόλιο: Στον συμβολισμό $f_{x_i x_j}$ η σειρά με την οποία γίνονται οι παραγωγίσεις ακολουθούν τους δείκτες από αριστερά προς δεξιά (δηλαδή πρώτα ως x_i και μετά ως x_j), ενώ στον συμβολισμό $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ (ο οποίος είναι ισοδύναμος) η σειρά με την οποία γίνονται οι παραγωγίσεις ακολουθούν τους δείκτες από δεξιά προς αριστερά (δηλαδή πάλι πρώτα ως x_i και μετά ως x_j).

Συμβολισμός: Στην περίπτωση που έχουμε $i = j$ συμβολικά μπορούμε να γράψουμε $f_{x_i^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ αντί για $f_{x_i x_i}(\overrightarrow{x}) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}$.

Σχόλιο: Οι μερικές παράγωγοι μεγαλύτερης τάξης ορίζονται κατά παρόμοιο τρόπο.

π.χ. $f_{xyy} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(f_{xy}\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) = \dfrac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}$

C^2 συνάρτηση

Ορισμός: Έστω $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μιά πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών. Η συνάρτηση f ονομάζεται C^2 **συνάρτηση** (ή δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση) **στο σημείο** $\overrightarrow{a} \in A$, όταν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι f_{x_i} (για όλα τα $1 \leq i \leq n$) σε μία περιοχή $B_\delta(\overrightarrow{a}) \subseteq A$ του σημείου $\overrightarrow{a}$ και οι συναρτήσεις $f_{x_i} : B_\delta(\overrightarrow{a}) \to \mathbb{R}$ είναι C^1 συναρτήσεις στο σημείο $\overrightarrow{a}$, δηλαδή όταν υπάρχουν οι δεύτερες μερικές παράγωγοι $f_{x_i x_j}$ για κάθε $1 \leq i, j \leq n$ σε μία περιοχή $B_\epsilon(\overrightarrow{a}) \subseteq B_\delta(\overrightarrow{a})$ και οι συναρτήσεις $f_{x_i x_j} : B_\epsilon(\overrightarrow{a}) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς στο σημείο $\overrightarrow{a}$.
Η συνάρτηση f ονομάζεται C^2 **συνάρτηση** (ή δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση), όταν η f είναι C^2 σε όλα τα σημεία $\overrightarrow{x} \in A$, δηλαδή όταν υπάρχουν οι δεύτερες μερικές παράγωγοι $f_{x_i x_j}$ στο A για κάθε $1 \leq i, j \leq n$ και είναι συνεχείς συναρτήσεις στο A.

Σχόλιο: Επαγωγικά ορίζονται οι $C^3, C^4, ..., C^\infty$ συναρτήσεις.

Θεώρημα Clairaut: Για μία συνάρτηση $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ η οποία είναι C^2 σε ένα σημείο $\overrightarrow{a} \in A$ ισχύει ότι:

$$f_{x_i x_j}(\overrightarrow{a}) = f_{x_j x_i}(\overrightarrow{a}) \ ,$$

για κάθε $1 \leq i, j \leq n$.

Άσκηση 1

Να βρεθεί η κλίση (ή αλλιώς το ανάδελτα) της συνάρτησης

$$f(x,y) = sin\left(\frac{3x+x^2}{1-y}\right)$$

Λύση

$$f_x(x,y) = cos\left(\frac{3x+x^2}{1-y}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{3x+x^2}{1-y}\right) = cos\left(\frac{3x+x^2}{1-y}\right)\frac{3+2x}{1-y}$$
$$f_y(x,y) = cos\left(\frac{3x+x^2}{1-y}\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{3x+x^2}{1-y}\right) = cos\left(\frac{3x+x^2}{1-y}\right)\frac{3x+x^2}{(1-y)^2}$$

Επομένως η κλίση της συνάρτησης είναι

$$\nabla f(x,y) = \left(cos\left(\frac{3x+x^2}{1-y}\right)\frac{3+2x}{1-y}, \ cos\left(\frac{3x+x^2}{1-y}\right)\frac{3x+x^2}{(1-y)^2}\right)$$

Άσκηση 2

Να υπολογιστεί η παράγωγος της συνάρτησης $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x,y,z) = x^2 e^y + ycosz - zy^2$$

Λύση

Αρχικά υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους.

$$f_x(x,y,z) = 2xe^y$$
$$f_y(x,y,z) = x^2 e^y + cosz - 2zy$$
$$f_z(x,y,z) = -ysinz - y^2$$

Επομένως η παράγωγος της συνάρτησης f είναι ο 1×3 συναρτησιακός πίνακας

$$f'(x,y,z) = [2xe^y \quad x^2 e^y + cosz - 2zy \quad -(ysinz + y^2)].$$

Άσκηση 3

Να δειχθεί ότι η συνάρτηση

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}\ ,\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0\ ,\quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$ αλλά δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$.

Λύση

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0\ ,$$
$$f_y(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0\ .$$

Επομένως υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι f_x και f_y της f στο $(0,0)$, άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $(0,0)$ και η παράγωγος της δίνεται από:

$$f'(0,0)=[f_x(0,0)\ f_y(0,0)]=[0\ 0]$$

Η f όμως δεν είναι συνεχής καθώς δεν υπάρχει το όριο $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ αφού για τις διαδρομές $x=0$ και $x=y$ παίρνουμε

$$\lim_{(0,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{0}{y^2}=0$$
$$\lim_{(x,x)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+x^2}=\frac{1}{2}$$

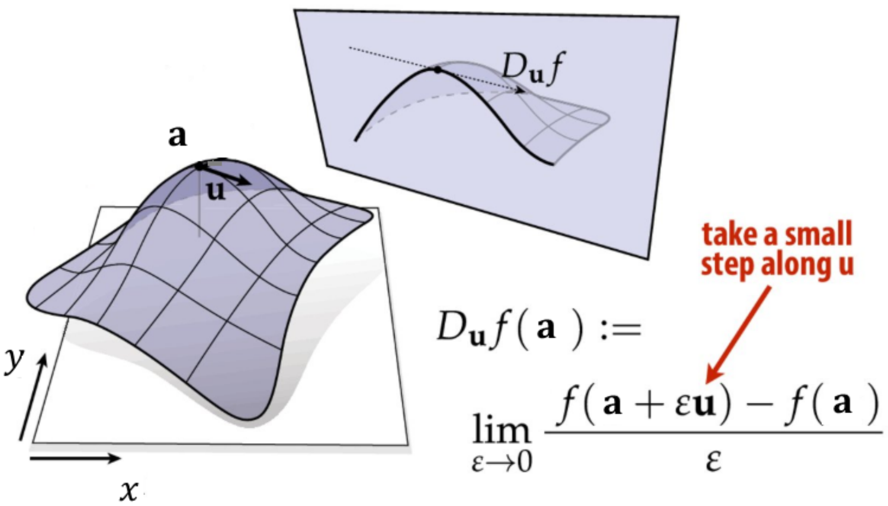
άρα δεν υπάρχει το όριο στο σημείο $(0,0)$ και επομένως η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$.

Κατευθυνόμενη Παράγωγος

Ορισμός 1: Έστω $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση δύο μεταβλητών με A ανοικτό, $\overrightarrow{a} = (a, b) \in A$ και $\overrightarrow{u} = (u, v)$ μία κατεύθυνση του $\mathbb{R}^2$ (δηλαδή $||\overrightarrow{u}|| = 1$). Τότε **κατευθυνόμενη παράγωγος της f στο σημείο $\overrightarrow{a}$ ως προς την κατεύθυνση $\overrightarrow{u}$** είναι ο πραγματικός αριθμός $f_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{a})$ που ορίζεται από τον τύπο:

$$\begin{aligned} f_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{a}) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+uh, b+vh) - f(a,b)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(\overrightarrow{a} + h\overrightarrow{u}) - f(\overrightarrow{a})}{h} \end{aligned}$$

Συμβολισμός: $f_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{a}) \equiv D_{\overrightarrow{u}} f(\overrightarrow{a})$.



Γεωμετρική ερμηνεία: Η κατευθυνόμενη παράγωγος $f_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{a})$ είναι ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης f στο σημείο $\overrightarrow{a} = (a, b)$ κατά την κατεύθυνση $\overrightarrow{u} = (u, v)$ (συγκεκριμένα κατά μήκος της ευθείας του $\mathbb{R}^2$ η οποία περνάει από το σημείο (a, b) και είναι παράλληλη προς την κατεύθυνση $\overrightarrow{u}$).

Σχόλιο: Η κατευθυνόμενη παράγωγος είναι μία επέκταση (γενίκευση) της μερικής παραγώγου, καθώς η μερική παράγωγος $f_x(a, b)$ της συνάρτησης $f(x, y)$ ως προς τη μεταβλητή x στο σημείο (a, b) είναι η κατευθυνόμενη παράγωγος της συνάρτησης f στο σημείο (a, b) ως προς την κατεύθυνση $(1, 0)$. Αντίστοιχα, η μερική παράγωγος $f_y(a, b)$ της συνάρτησης $f(x, y)$ ως προς τη μεταβλητή y στο σημείο (a, b) είναι η κατευθυνόμενη παράγωγος της συνάρτησης f στο σημείο (a, b) ως προς την κατεύθυνση $(0, 1)$.

Ορισμός 2: Έστω $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών με A ανοικτό, $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, ..., a_n) \in A$ και $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, ...u_n)$ μία κατεύθυνση του $\mathbb{R}^n$ (δηλαδή $||\overrightarrow{u}|| = 1$). Τότε **κατευθυνόμενη παράγωγος της f στο σημείο $\overrightarrow{a}$ ως προς την κατεύθυνση $\overrightarrow{u}$** είναι ο πραγματικός αριθμός $f_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{a})$ που ορίζεται από τον τύπο:

$$\begin{aligned} f_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{a}) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a_1 + u_1 h, a_2 + u_2 h, ..., a_n + u_n h) - f(a_1, a_1, ..., a_n)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(\overrightarrow{a} + h\overrightarrow{u}) - f(\overrightarrow{a})}{h} \end{aligned}$$

Σχόλιο: Η κατευθυνόμενη παράγωγος είναι μία επέκταση (γενίκευση) της μερικής παραγώγου, καθώς η μερική παράγωγος $f_{x_i}(\overrightarrow{a})$ της συνάρτησης f ως προς τη μεταβλητή x_i στο σημείο $\overrightarrow{a}$ είναι η κατευθυνόμενη παράγωγος της συνάρτησης f στο σημείο $\overrightarrow{a}$ ως προς την κατεύθυνση $\overrightarrow{e_i}$ (όπου $\overrightarrow{e_i}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στο $\mathbb{R}^n$ που έχει όλες τις συντεταγμένες μηδέν εκτός από την i-οστή συντεταγμένη που είναι ίση με ένα).

Παρατήρηση 1: Μία συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο $\overrightarrow{a}$, δεν έχει πάντα κατευθυνόμενη παράγωγο $f_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{a})$ στο σημείο $\overrightarrow{a}$ ως προς κάθε κατεύθυνση $\overrightarrow{u}$.

Παρατήρηση 2: Μία συνάρτηση f που έχει κατευθυνόμενη παράγωγο $f_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{a})$ σε ένα σημείο $\overrightarrow{a}$ ως προς κάθε κατεύθυνση $\overrightarrow{u}$, δεν είναι πάντα συνεχής στο σημείο $\overrightarrow{a}$.

Θεώρημα 1: Έστω $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών που είναι διαφορίσιμη στο σημείο $\overrightarrow{a} \in A$. Τότε υπάρχει η κατευθυνόμενη παράγωγος $f_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{a})$ της f στο σημείο $\overrightarrow{a}$ για κάθε κατεύθυνση $\overrightarrow{u}$ και ισχύει ο τύπος:

$$f_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{a}) = \nabla f(\overrightarrow{a}) \cdot \overrightarrow{u}$$

Παρατήρηση 3: Μία συνάρτηση f που έχει κατευθυνόμενη παράγωγο $f_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{a})$ σε ένα σημείο $\overrightarrow{a}$ ως προς κάθε κατεύθυνση $\overrightarrow{u}$, δεν είναι πάντα διαφορίσιμη στο $\overrightarrow{a}$.

Θεώρημα 2: Έστω $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών που είναι διαφορίσιμη στο σημείο $\overrightarrow{a} \in A$ με $\nabla f(\overrightarrow{a}) \neq 0$ και $\overrightarrow{u}$ μία κατεύθυνση του $\mathbb{R}^n$. Τότε η κατευθυνόμενη παράγωγος $f_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{a})$ (ως συνάρτηση του $\overrightarrow{u}$) παίρνει **μέγιστη τιμή** όταν τα διανύσματα $\nabla f(\overrightarrow{a})$ και $\overrightarrow{u}$ είναι παράλληλα και ομόρροπα και **ελάχιστη τιμή** όταν τα διανύσματα $\nabla f(\overrightarrow{a})$ και $\overrightarrow{u}$ είναι παράλληλα και αντίρροπα. Συγκεκριμένα, η κατευθυνόμενη παράγωγος $f_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{a})$ της συνάρτησης f στο σημείο $\overrightarrow{a}$ παίρνει μέγιστη τιμή ίση με $||\nabla f(\overrightarrow{a})||$ στην κατεύθυνση $\overrightarrow{u} = \dfrac{\nabla f(\overrightarrow{a})}{||\nabla f(\overrightarrow{a})||}$ και ελάχιστη τιμή ίση με $-||\nabla f(\overrightarrow{a})||$ στην κατεύθυνση $\overrightarrow{u} = -\dfrac{\nabla f(\overrightarrow{a})}{||\nabla f(\overrightarrow{a})||}$.

Απόδειξη: Από το Θεώρημα έχουμε ότι

$$f_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{a}) = \nabla f(\overrightarrow{a}) \cdot \overrightarrow{u} = ||\nabla f(\overrightarrow{a})||\,||\overrightarrow{u}||cos\theta = ||\nabla f(\overrightarrow{a})||cos\theta \qquad (1)$$

με θ τη γωνία μεταξύ $\nabla f(\overrightarrow{a})$ και $\overrightarrow{u}$. Αφού λοιπόν ισχύει ότι $-1 \leq cos\theta \leq 1$, καταλήγουμε ότι η $f_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{a})$ παίρνει τη μέγιστη τιμή όταν $cos\theta = 1$ (δηλαδή $\theta = 0$) και την ελάχιστη τιμή όταν $cos\theta = -1$ (δηλαδή $\theta = \pi$). Επομένως, η μέγιστη και ελάχιστη τιμή καθώς και οι κατευθύνσεις για τις οποίες παίρνει αυτές τις τιμές η κατευθυνόμενη παράγωγος δίνονται αντικαθιστώντας τις παραπάνω τιμές της γωνίας θ στη σχέση (1).

Άσκηση 4: Να υπολογιστεί η κατευθυνόμενη παράγωγος της παρακάτω συνάρτησης f στο σημείο (0,0) ως προς την κατεύθυνση $\overrightarrow{u} = (u, v)$, όπου

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{sin(xy)}{y}, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

Λύση: Από τον Ορισμό έχουμε τον τύπο:

$$f_{(u,v)}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+uh, 0+vh) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{sin(uvh^2)}{vh}}{h}$$
$$= \frac{u}{u}\lim_{h\to 0} \frac{sin(uvh^2)}{vh^2} = u\lim_{h\to 0} \frac{sin(uvh^2)}{uvh^2} = u1 = u$$

για $uv \neq 0$.

Μας απομένουν οι περιπτώσεις για $uv = 0$, δηλαδή για $u = 0$ ή $v = 0$ και επειδή έχουμε ορίσει την κατεύθυνση να έχει $||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{u^2 + v^2} = 1$ αυτές οι κατευθύνσεις είναι τελικά οι $\overrightarrow{u} = (0,1)$ και $\overrightarrow{u} = (1,0)$. Επομένως,

$$f_{(0,1)}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$f_{(1,0)}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

Άσκηση 5: Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}\,, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0\,, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

είναι παραγωγίσιμη στο (0,0) αλλά δεν υπάρχει η κατευθυνόμενη παράγωγος $f_{(u,v)}(0,0)$ για καμία κατεύθυνση (u,v) με $uv\neq 0$.

Λύση: Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο (0,0) με παράγωγο $f'(0,0)=[f_x(0,0)\ f_y(0,0)]=[\,0\ 0\,]$.
Όσον αφορά την κατευθυνόμενη παράγωγο, από τον Ορισμό έχουμε ότι

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+uh,0+vh)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{uvh^2}{(u^2+v^2)h^2}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{uv}{h}=\begin{cases}0 \text{ για } uv=0\\ \text{δεν υπάρχει το όριο για } uv\neq 0\end{cases}$$

(καθώς $\lim_{h\to 0+}\dfrac{uv}{h}=(uv)(+\infty)$ και $\lim_{h\to 0-}\dfrac{uv}{h}=(uv)(-\infty)$).
Επομένως δεν υπάρχει η κατευθυνόμενη παράγωγος $f_{(u,v)}(0,0)$ της f στο (0,0) ως προς την κατεύθυνση (u,v) για $uv\neq 0$.

Άσκηση 6: Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}\,, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

έχει κατευθυνόμενη παράγωγο $f_{(u,v)}(0,0)$ στο (0,0) ως προς κάθε κατεύθυνση $\overrightarrow{u} = (u,v)$ αλλά δεν είναι συνεχής στο (0,0).

Λύση: Από τον Ορισμό έχουμε ότι

$$f_{(u,v)}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+uh,0+vh)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{uv^2h^3}{u^2h^2+v^4h^4}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{uv^2}{u^2+v^4h^2} = \frac{uv^2}{u^2} = \frac{v^2}{u} \text{ για } u \neq 0$$

Για την περίπτωση $u=0$, παίρνουμε την κατεύθυνση
$(u,v) = (0,1)$ (ώστε $||(u,v)|| = \sqrt{u^2+v^2} = 1$) και έχουμε

$$f_{(0,1)}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+0h,0+1h)-f(0,0)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{0}{h^4}-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

Επομένως, η f έχει κατευθυνόμενες παραγώγους στο σημείο (0,0) ως προς όλες τις κατευθύνσεις $\overrightarrow{u} = (u,v)$.
Η συνάρτηση f όμως δεν είναι συνεχής στο (0,0) καθώς δεν υπάρχει καν το όριο $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ αφού για τις διαδρομές $y=0$ και $x=y^2$ παίρνουμε

$$f(x,0) = \frac{0}{x^2} = 0 \to 0 \quad \text{και} \quad f(y^2,y) = \frac{y^4}{y^4+y^4} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}\,.$$

Άσκηση 7: Να υπολογιστεί η κατευθυνόμενη παράγωγος της συνάρτησης $f(x,y,z) = xe^y + zsiny$ στο σημείο $\overrightarrow{a} = (1,0,1)$ ως προς την κατεύθυνση του διανύσματος $\overrightarrow{u} = (1,1,0)$.

Λύση: Η συνάρτηση f είναι διαφορίσιμη **διότι** οι μερικές της παράγωγοι

$$f_x(x,y,z) = e^y \quad , \quad f_y(x,y,z) = xe^y + zcosy \quad , \quad f_z(x,y,z) = siny$$

υπάρχουν και είναι συνεχείς. Η κλίση της f είναι
$\nabla f(x,y,z) = (f_x(x,y,z), f_y(x,y,z) f_z(x,y,z)) = (e^y, xe^y + zcosy, siny)$
η οποία παίρνει στο σημείο $(1,0,1)$ την τιμή $\nabla f(1,0,1) = (1,2,0)$.

Το διάνυσμα $\overrightarrow{u} = (1,1,0)$ δεν είναι μοναδιαίο (δηλαδή $||u|| \neq 1$) επομένως θέλουμε να βρούμε την κατεύθυνσή του ώστε να βρούμε έπειτα την κατευθυνόμενη παράγωγο της f στο σημείο (1,0,1) ως προς την κατεύθυνση του $\overrightarrow{u}$. Επομένως η ζητούμενη κατεύθυνση (δηλαδή το ζητούμενο μοναδιαίο διάνυσμα) είναι η

$$\overrightarrow{w} = \frac{\overrightarrow{u}}{||\overrightarrow{u}||} = \frac{(1,1,0)}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \frac{(1,1,0)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

Επομένως από το Θεώρημα υπάρχει η κατευθυνόμενη παράγωγος της f στο σημείο (1,0,1) ως προς την κατεύθυνση του διανύσματος $\overrightarrow{u} = (1,1,0)$ (δηλαδή ως προς το μοναδιαίο διάνυσμα $\overrightarrow{w} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0))$ και δίνεται από τον τύπο

$$f_{\overrightarrow{w}}(\overrightarrow{a}) = \nabla f(1,0,1) \cdot \overrightarrow{w} = (1,2,0) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = 1\frac{1}{\sqrt{2}} + 2\frac{1}{\sqrt{2}} + 0 = \frac{3}{\sqrt{2}} \ .$$

Άσκηση 8: Έστω $f(x,y,z) = x - y^2 + xz^3$. (i) Να βρεθούν οι κατευθύνσεις $\overrightarrow{u}$ για τις οποίες παίρνει η κατευθυνόμενη παράγωγος της f στο σημείο $\overrightarrow{a} = (0,0,0)$ μέγιστη και ελάχιστη τιμή. (ii) Αντίστοιχα, να βρεθούν οι κατευθύνσεις $\overrightarrow{u}$ για τις οποίες παίρνει η κατευθυνόμενη παράγωγος της f στο σημείο $\overrightarrow{a} = (2,1,1)$ μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

Λύση: $\nabla f(x,y,z) = (f_x(x,y,z), f_y(x,y,z), f_z(x,y,z)) = (1+z^3,\ -2y,\ 3xz^2)$

(i) Στο σημείο $\overrightarrow{a} = (0,0,0)$ έχουμε $\nabla f(0,0,0) = (1,0,0)$.
Επομένως, από το Θεώρημα 2 έχουμε ότι η κατεύθυνση για την οποία η κατευθυνόμενη παράγωγος $f_{\overrightarrow{u}}(0,0,0)$ παίρνει μέγιστη τιμή είναι η

$$\overrightarrow{u} = \frac{\nabla f(0,0,0)}{||\nabla f(0,0,0)||} = \frac{(1,0,0)}{||(1,0,0)||} = (1,0,0)$$

και η κατεύθυνση για την οποία η κατευθυνόμενη παράγωγος $f_{\overrightarrow{u}}(0,0,0)$ παίρνει ελάχιστη τιμή είναι η

$$\overrightarrow{u} = -\frac{\nabla f(0,0,0)}{||\nabla f(0,0,0)||} = -\frac{(1,0,0)}{||(1,0,0)||} = (-1,0,0).$$

(ii) Στο σημείο $\overrightarrow{a} = (2,1,1)$ έχουμε $\nabla f(2,1,1) = (2,-2,6)$.
Επομένως, από το Θεώρημα 2 έχουμε ότι η κατεύθυνση για την οποία η κατευθυνόμενη παράγωγος $f_{\overrightarrow{u}}(2,1,1)$ παίρνει μέγιστη τιμή είναι η

$$\overrightarrow{u} = \frac{\nabla f(2,1,1)}{||\nabla f(2,1,1)||} = \frac{(2,-2,6)}{||(2,-2,6)||} = (\frac{2}{\sqrt{44}}, \frac{-2}{\sqrt{44}}, \frac{6}{\sqrt{44}})$$

και η κατεύθυνση για την οποία η κατευθυνόμενη παράγωγος $f_{\overrightarrow{u}}(2,1,1)$ παίρνει ελάχιστη τιμή είναι η

$$\overrightarrow{u} = -\frac{\nabla f(2,1,1)}{||\nabla f(2,1,1)||} = -\frac{(2,-2,6)}{||(2,-2,6)||} = (\frac{-2}{\sqrt{44}}, \frac{2}{\sqrt{44}}, \frac{-6}{\sqrt{44}}).$$