ΜΕΡΙΚΗ ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

Πρώτη μερική παράγωγος

Ορισμός: Έστω $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ και $(x_0, y_0) \in D$. Οι μερικές παράγωγοι της f ως προς x και ως προς y στο σημείο (x_0, y_0), ορίζονται:

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = f_x(x_0,y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0,y_0)}{h}$$

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} = f_y(x_0,y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0,y_0)}{h}$$

Όπως προκύπτει από τον ορισμό, η μερική παράγωγος ως προς x βρίσκεται με συνήθη παραγώγιση ως προς x θεωρώντας την y ως σταθερά. Αντίστοιχα για την μερική παράγωγο ως προς y, παραγωγίζουμε θεωρώντας τη x ως σταθερά.

Οι f_x και f_y είναι οι πρώτες μερικές παράγωγοι της f ή παράγωγοι πρώτης τάξης.

Παράδειγμα: Οι μερικές παράγωγοι $f_x(0,1)$, $f_y(0,1)$ της συνάρτησης $f(x,y) = e^{xy} + x^2 + y^3 + 1$ είναι

$$f_x(x,y) = ye^{xy} + 2x \quad \text{και} \quad f_x(0,1) = 1$$

$$f_y(x,y) = xe^{xy} + 3y^2 \quad \text{και} \quad f_y(0,1) = 3$$

Με παρόμοιο τρόπο ορίζονται και οι μερικές παράγωγοι συναρτήσεων τριών ή περισσοτέρων μεταβλητών, π.χ. για τη συνάρτηση $f(x,y,z) = x^2y + 3yz + xz^4 + 1$

$$f_x(x,y,z) = 2xy + z^4$$

$$f_y(x,y,z) = x^2 + 3z \qquad f_z(x,y,z) = 3y + 4xz^3$$

Ορισμός: Δεύτερη μερική παράγωγος

Αν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι των συναρτήσεων f_x και f_y, τότε ορίζονται οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης ή δεύτερες μερικές παράγωγοι της f ως εξής:

$$f_{xx} = (f_x)_x = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$f_{yy} = (f_y)_y = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$(f_y)_x = f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$(f_x)_y = f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

Με ανάλογο τρόπο ορίζονται οι δεύτερες μερικές παράγωγοι για συναρτήσεις τριών ή περισσοτέρων μεταβλητών καθώς επίσης και οι παράγωγοι τρίτης ή ανώτερης τάξης.

Παράδειγμα: Η συνάρτηση $f(x,y,z) = x^2yz^3 + x + y + z$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ έχει:

$f_x(x,y,z) = 2xyz^3 + 1$, $f_y(x,y,z) = x^2z^3 + 1$, $f_z(x,y,z) = 3x^2yz^2 + 1$

$f_{xx}(x,y,z) = 2yz^3$, $f_{yy}(x,y,z) = 0$, $f_{zz}(x,y,z) = 6x^2yz$

$f_{xy}(x,y,z) = f_{yx}(x,y,z) = 2xz^3$

$f_{xz}(x,y,z) = f_{zx}(x,y,z) = 6xyz^2$

$f_{yz}(x,y,z) = f_{zy}(x,y,z) = 3x^2z^2$

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}, \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\right)$$

Διανυσματική Ανάλυση

Θεωρούμε τις συναρτήσεις:

$f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ (αριθμητικό πεδίο)

$\vec{F} = (P, Q, R) : A \longrightarrow \mathbb{R}^3$ (διανυσματικό πεδίο)

Οι συναρτήσεις f, P, Q, R έχουν μερικές παραγώγους στο ανοικτό σύνολο A. Επίσης θεωρούμε τον διαφορικό τελεστή

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}$$

και ορίζουμε τις συναρτήσεις

<u>Κλίση</u>: $\nabla f = \operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$

<u>Απόκλιση</u>: $\nabla \cdot \vec{F} = \operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$

<u>Στροβιλισμός ή περιστροφή</u>:

$$\nabla \times \vec{F} = \operatorname{curl} \vec{F} = \operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}$$

<u>Λαπλασιανή</u>: $\nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f) = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

(Η συνάρτηση f έχει μερικές παραγώγους $2^{ης}$ τάξης).

Παραδείγματα

1) Η κλίση του αριθμητικού πεδίου

$$f(x,y,z)=x^2e^{yz}+\sin xy$$

είναι

$$\nabla f(x,y,z)=\left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x},\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y},\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\right)$$

$$=\left(2xe^{yz}+y\cos xy,\ x^2ze^{yz}+x\cos xy,\ x^2ye^{yz}\right).$$

2) Η απόκλιση του διανυσματικού πεδίου

$$\vec{F}(x,y,z)=\left(x^2y,\ yz^3,\ xy^4z\right)$$

είναι

$$\nabla\cdot\vec{F}(x,y,z)=\frac{\partial(x^2y)}{\partial x}+\frac{\partial(yz^3)}{\partial y}+\frac{\partial(xy^4z)}{\partial z}$$

$$=2xy+z^3+xy^4$$

και ο στροβιλισμός του είναι:

$$\nabla\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x^2y & yz^3 & xy^4z\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial(xy^4z)}{\partial y}-\frac{\partial(yz^3)}{\partial z}\right)\vec{i}+$$

$$+\left(\frac{\partial(x^2y)}{\partial z}-\frac{\partial(xy^4z)}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial(yz^3)}{\partial x}-\frac{\partial(x^2y)}{\partial y}\right)\vec{k}$$

$$=\left(4xy^3z-3yz^2\right)\vec{i}+\left(0-y^4z\right)\vec{j}+\left(0-x^2\right)\vec{k}$$