Μαθηματική επαγωγή

Στο σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$, ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες, "τα αξιώματα Peano".

1) $1 \in \mathbb{N}$
2) Αν $n \in \mathbb{N}$, τότε $n+1 \in \mathbb{N}$
3) Ο φυσ. αρ. 1 δεν είναι επόμενος φυσικού αριθμού.
4) Αν $n, m \in \mathbb{N}$ και $n+1 = m+1$, τότε $n = m$.

Αρχή της μαθηματικής επαγωγής.

Έστω $S \subset \mathbb{N}$:

1) $1 \in S$ και
2) αν $n \in S$ τότε $n+1 \in S$

Τότε $S = \mathbb{N}$.

Πρόταση

Έστω ότι η P είναι μία μαθηματική ιδιότητα. Λέμε ότι η $P(x)$ ισχύει αν ο αριθμός x ικανοποιεί την ιδιότητα P.
Υποθέτουμε ότι
1) Η $P(1)$ ισχύει και
2) αν η $P(n)$ ισχύει για κάποιο φυσικό αριθμό n, τότε η $P(n+1)$ ισχύει.
Τότε η $P(n)$ ισχύει για κάθε φυσικό αρ. n (1)

Παρατηρήσεις:

$$1! = 1$$

$$(n+1)! = n!(n+1)$$

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n - \text{φορές}}$$

$$a^1 = a \quad \text{και}$$

$$a^{n+1} = a^n \cdot a$$

Με απόδειξη, έχουμε:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a^n \cdot \beta^n = (a \cdot \beta)^n$$

$$(a^n)^m = a^{nm}$$

$$0 < a < \beta \Leftrightarrow a^n < \beta^n$$

2

Παράδειγμα:

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$ για κάθε φυσικό αριθμό n.

Απόδειξη

- Για $n=1$, ο ισχυρισμός ισχύει.
- Υποθέτουμε ότι ισχύει για n, δηλ.

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για $n+1$, δηλαδή,

$$1+2+3+\ldots+n+n+1=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Πράγματι:

$$1+2+3+\ldots+n+n+1=\frac{n(n+1)}{2}+n+1=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}$$

$$=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Ασκήσεις:

1) $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

2) Ανισότητα Bernoulli:
Αν $\alpha>-1$, τότε $(1+a)^n\geq 1+na$ για κάθε φυσικό αριθμό n.

Συμβολισμός Σ "για τα αθροίσματα"

$$\sum_{k=1}^{6} k^4 = 1^4+2^4+3^4+4^4+5^4+6^4$$

Γενικότερα

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1+a_2+\dots+a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$\sum_{k=1}^{6} 2 = 2+2+2+2+2+2 = 12$$

ή

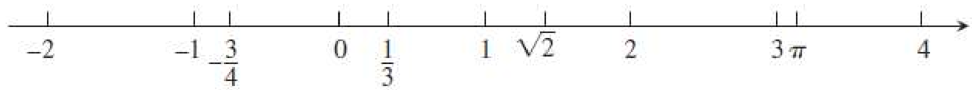
$$\sum_{k=1}^{n} q = \underbrace{q+q+q+\dots+q}_{n-\text{φορές}} = nq$$

Ιδιότητα

$$\sum_{k=1}^{n} (\lambda a_k + \mu \beta_k) = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k + \mu \sum_{k=1}^{n} \beta_k$$

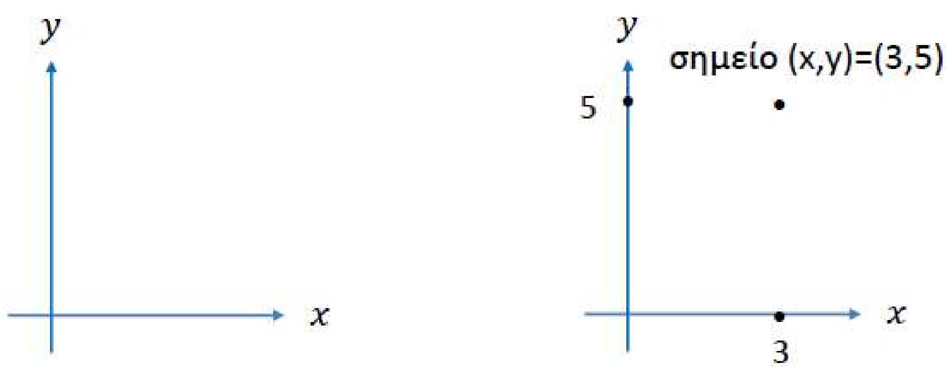
Αναπαράσταση αριθμών

Οι πραγματικοί αριθμοί μπορούν να αναπαρασταθούν γεωμετρικά με τα σημεία μίας ευθείας.



Ευθεία πραγματικών αριθμών

Για την αναπαράσταση διατεταγμένων ζεύγων (x,y), όπου x,y πραγματικοί αριθμοί, σχεδιάζουμε στο επίπεδο δύο κάθετες μεταξύ τους ευθείες πραγματικών αριθμών, μία οριζόντια (άξονας x) και μία κάθετη σε αυτή (άξονας y).

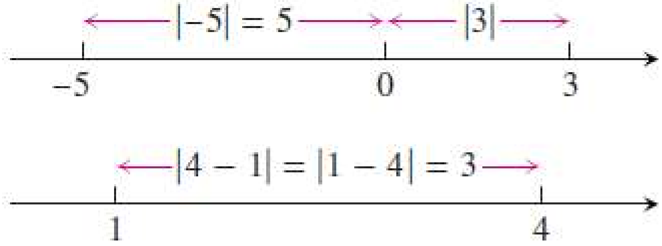


Καρτεσιανό επίπεδο ή ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων

Το σημείο τομής των δύο αξόνων είναι η αρχή των αξόνων O(0,0).

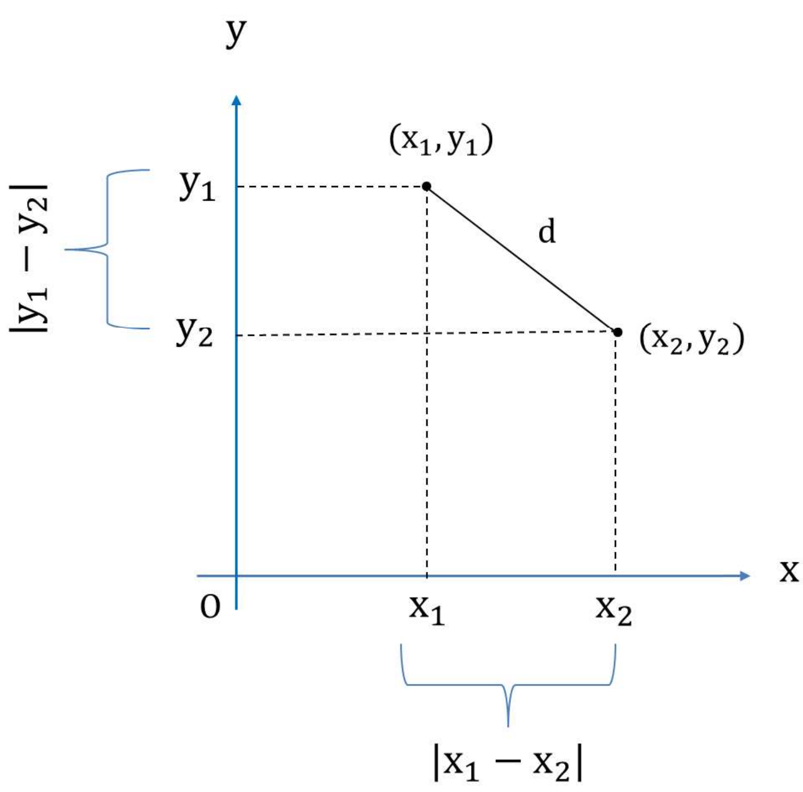
Για κάθε σημείο P(x,y) του καρτεσιανού επιπέδου, ο αριθμός x είναι η τεμημένη του σημείου (μήκος προβολής του P στον άξονα x) και ο αριθμός y είναι η τεταγμένη του σημείου (μήκος προβολής του P στον άξονα y).

Απόσταση σημείων



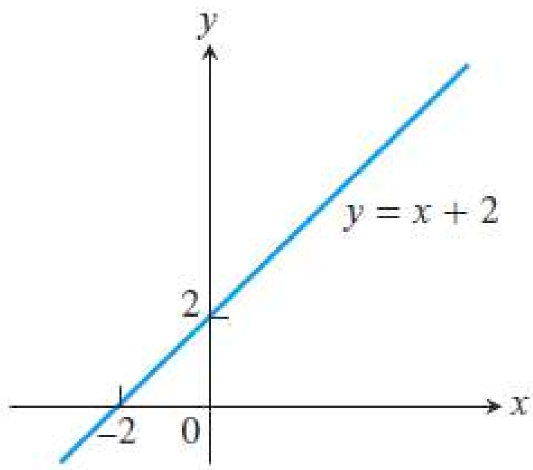
Στην ευθεία των πραγματικών αριθμών η απόλυτη τιμή συμβολίζει την απόσταση του σημείου από το μηδέν. Αντίστοιχα, η απόλυτη τιμή της διαφοράς δύο αριθμών συμβολίζει την απόσταση μεταξύ τους.

Στο Καρτεσιανό επίπεδο η απόσταση d μεταξύ δύο σημείων (x_1, y_1) και (x_2, y_2) υπολογίζεται με τη βοήθεια του Πυθαγορείου Θεωρήματος και δίνεται από τη σχέση $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.



Γραφήματα Εξισώσεων

Η σχέση μεταξύ δύο μεταβλητών x και y μπορεί να εκφραστεί στη μορφή μίας εξίσωσης F(x,y)=0. Το σύνολο των ζεύγων (x,y) που αποτελούν λύσεις της εξίσωσης λέγεται γράφημα της εξίσωσης. Η παράσταση του συνόλου αυτού στο Καρτεσιανό επίπεδο λέγεται γραφική παράσταση της εξίσωσης.



Το γράφημα της συνάρτησης $f(x) = x + 2$ είναι το σύνολο των σημείων (x,y) για τα οποία το y έχει την τιμή x+2.

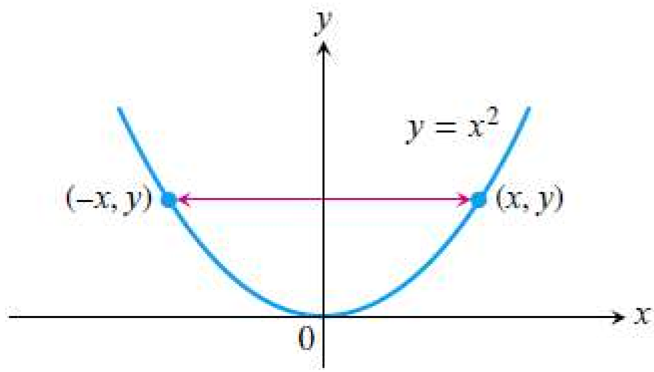
Τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τον άξονα x είναι τα ζεύγη της μορφής (x,0) που ικανοποιούν την εξίσωση.

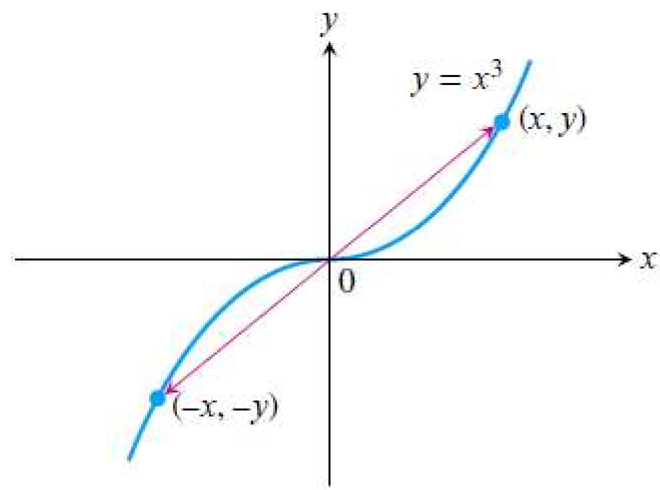
Τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τον άξονα y είναι τα ζεύγη της μορφής (0,y) που ικανοποιούν την εξίσωση.

Το γράφημα είναι συμμετρικό ως προς τον άξονα x αν για κάθε σημείο (x,y) του γραφήματος και το (x,-y) είναι σημείο του γραφήματος.

Το γράφημα είναι συμμετρικό ως προς τον άξονα y αν για κάθε σημείο (x,y) του γραφήματος και το (-x,y) είναι σημείο του γραφήματος.

Το γράφημα είναι συμμετρικό ως προς την αρχή των αξόνων αν για κάθε σημείο (x,y) του γραφήματος και το (-x,-y) είναι σημείο του γραφήματος.

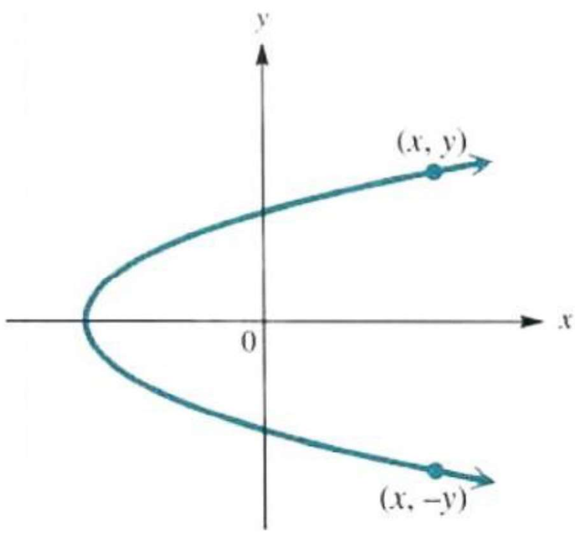


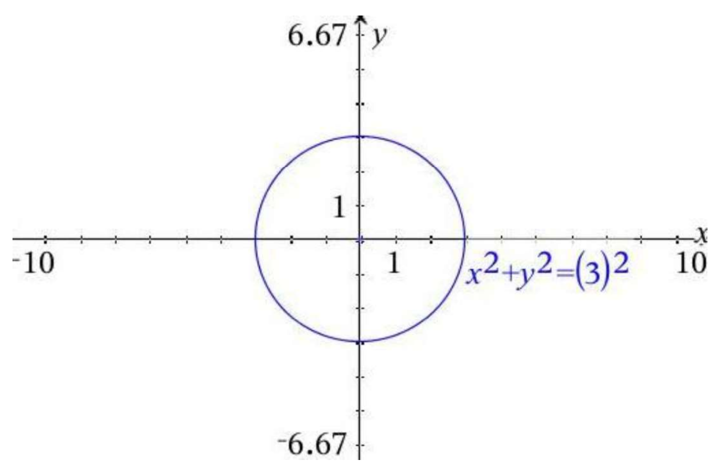


(α) (β)

(α) Το γράφημα της $y=x^2$ είναι συμμετρικό ως προς τον άξονα y.

(β) Το γράφημα της $y=x^3$ είναι συμμετρικό ως προς την αρχή των αξόνων.





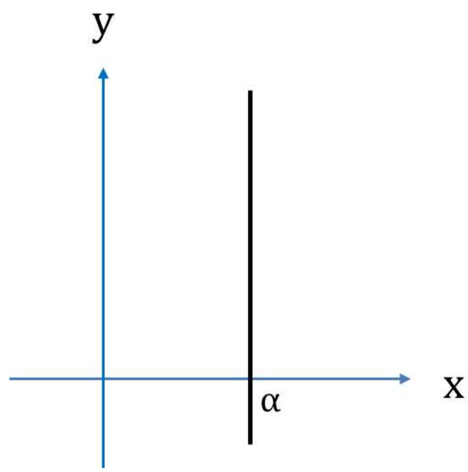
(γ) (δ)

(γ) Το γράφημα της $x=y^2$ είναι συμμετρικό ως προς τον άξονα x.

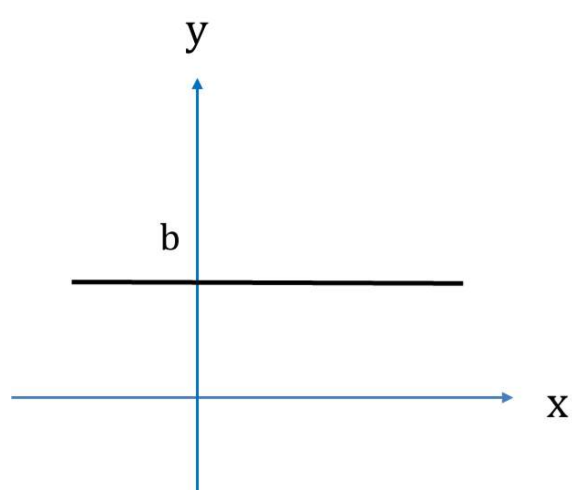
(δ) Το γράφημα της $x^2+y^2=9$ (κύκλος με κέντρο το (0,0) και ακτίνα 3) είναι συμμετρικό ώς προς τον άξονα x, ως προς τον άξονα y και ως προς το κέντρο των αξόνων.

Ευθείες στο επίπεδο

Η εξίσωση x=α είναι η εξίσωση μίας ευθείας κάθετη στον άξονα x (παράλληλη στον άξονα y) και διέρχεται από το (α,0).

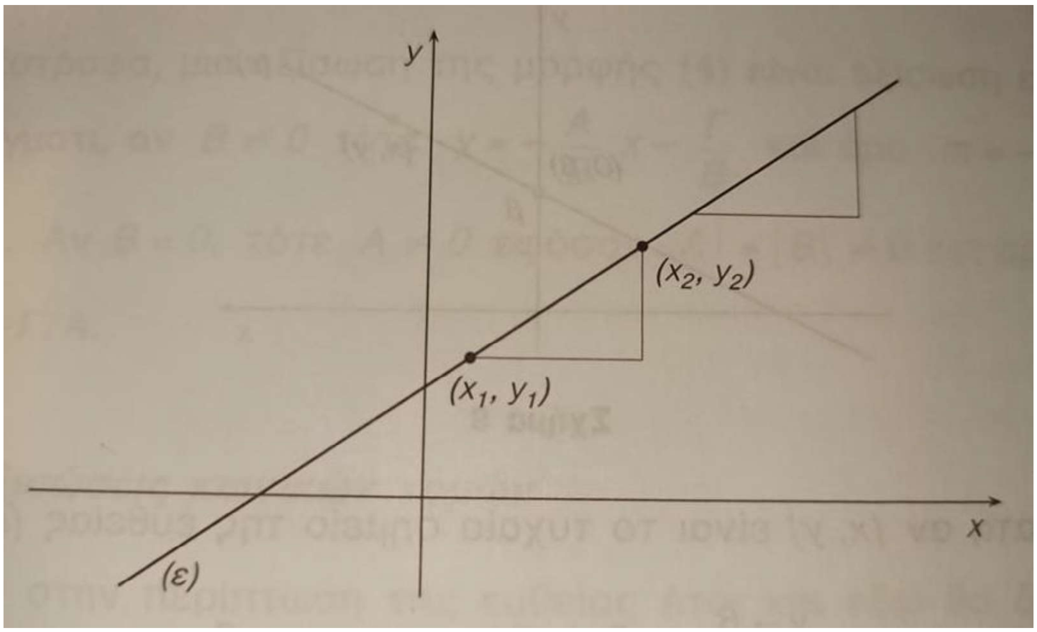


Η εξίσωση y=b είναι η εξίσωση μίας ευθείας κάθετη στον άξονα y (παράλληλη στον άξονα x) και διέρχεται από το (0,b).



Αν η ευθεία δεν είναι ούτε κάθετη ούτε παράλληλη στους άξονες (πλάγια), τότε απαιτείται ο υπολογισμός της κλίσης της.

Κλίση μίας ευθείας που διέρχεται από τα σημεία (x_1, y_1) και (x_2, y_2) με $x_1 \neq x_2$ είναι ο αριθμός $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$.

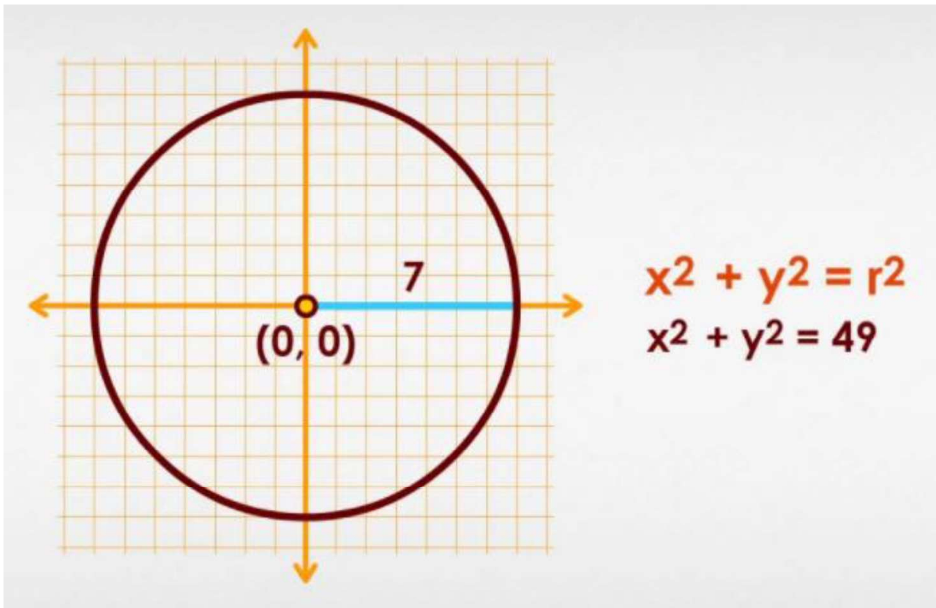


Η εξίσωση μίας ευθείας μπορεί να έχει τις παρακάτω μορφές:

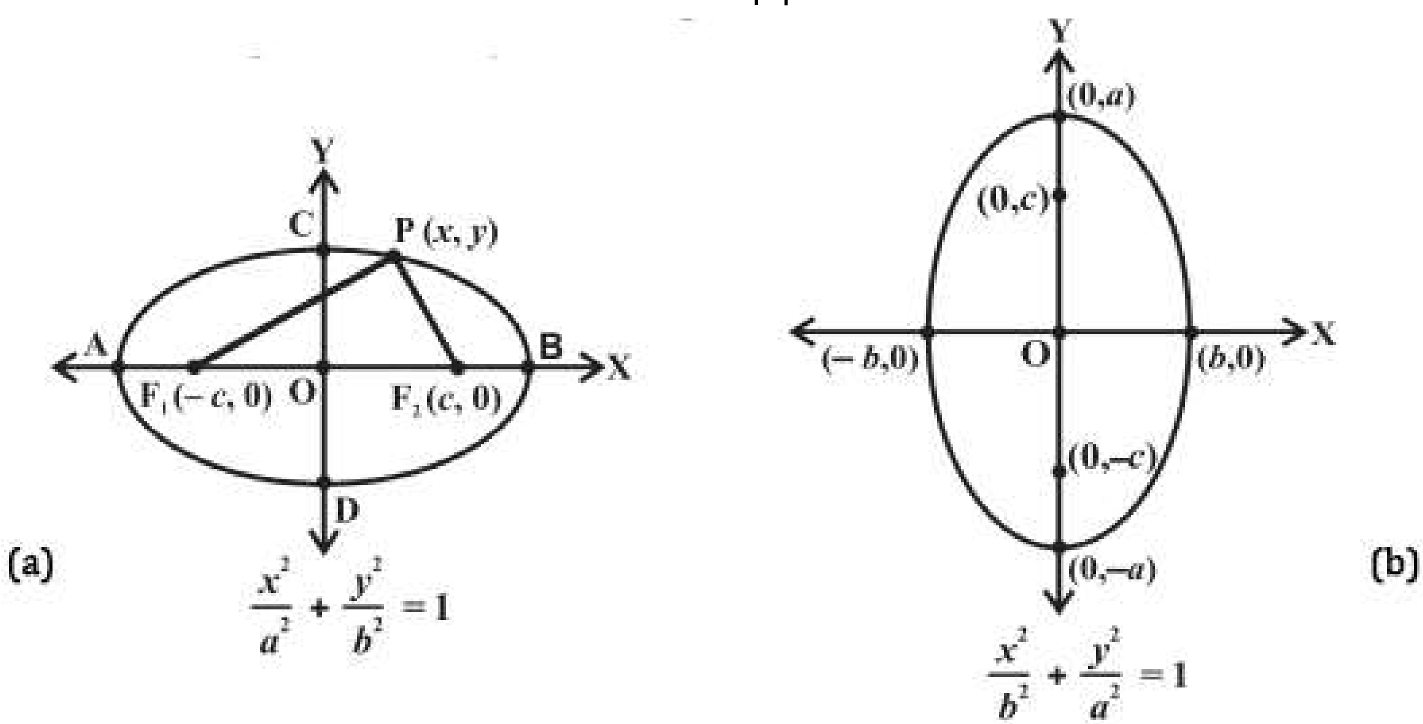
- $y = mx + β$ (κλίση m, τέμνει τον y-άξονα στο (0,β)).
- $y - y_0 = m(x - x_0)$
- $αx + βy + γ = 0, \quad |α| + |β| \neq 0$.

Κωνικές τομές

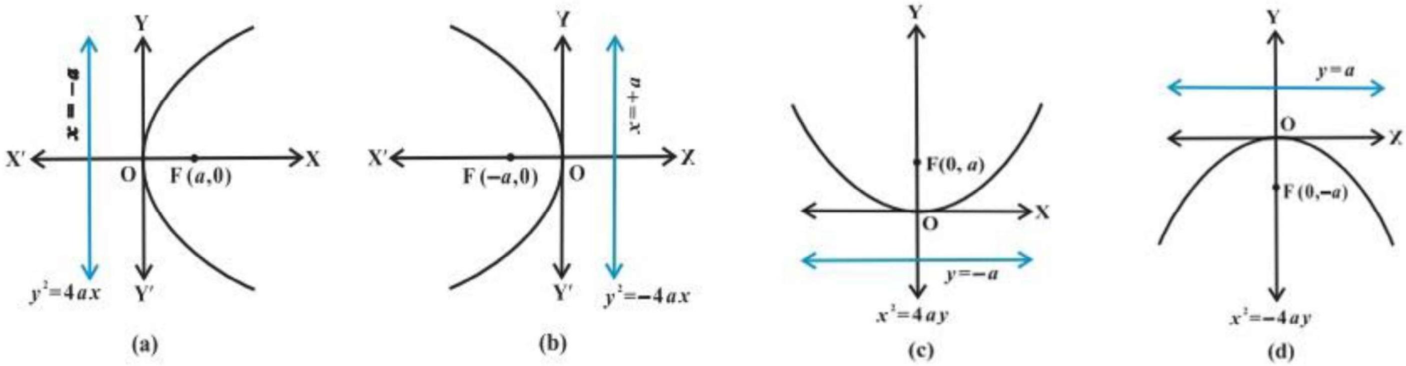
Κύκλος



Έλλειψη



Παραβολή



Υπερβολή