ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

... όριο $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ ..., ο οποίος ... . Έτσι, χρησιμοποιώντας την παράγωγο της συνάρτησης θέσεως $s = s(t)$, ορίζουμε την ***ταχύτητα*** (ακριβέστερα τη *στιγμιαία ταχύτητα*) $v(t)$ του κινουμένου σώματος κατά τη χρονική στιγμή t με τη βοήθεια του τύπου

$$v(t) := s'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} \tag{10.19}$$

Η ταχύτητα $v(t)$ καθορίζει το στιγμιαίο χαρακτήρα της κίνησης.

Παράγωγοι ανωτέρας τάξης

Έστω μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ στο διάστημα I του $\mathbb{R}$. Τότε, η συνάρτηση $f': I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η οποία ορίζεται από τον τύπο

$$f'(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}, \quad x \in I \tag{10.20}$$

ή τον τύπο

$$f'(x) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad x \in I \tag{10.21}$$

ονομάζεται η *πρώτη παράγωγος* της *συνάρτησης* f και συμβολίζεται επίσης με $\dfrac{df}{dx} = \dfrac{dy}{dx} = y'$.

Εξ άλλου, όταν δεν υπάρχει ενδεχόμενο σύγχυσης, τα σύμβολα f', $\dfrac{df}{dx}$, $\dfrac{dy}{dx}$ *και* y' *συμβολίζουν συνήθως και την τιμή* $f'(x)$ *της πρώτης παραγώγου στο τυχόν σημείο* x *του* I.

Όταν η συνάρτηση f' παραγωγίζεται σε ένα σημείο a του I, τότε η παράγωγος $(f')'(a)$ ονομάζεται *δευτέρα παράγωγος* της συνάρτησης f στο *σημείο* a και *συμβολίζεται* με

$$(f')'(a) = f''(a) = f^{(2)}(a) = \frac{d^2 f(a)}{dx^2} := \lim_{x \to a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a}$$

Όταν η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο I, τότε η παράγωγος $(f')'$ ονομάζεται *δευτέρα παράγωγος* της συνάρτησης f στο I και *συμβολίζεται* με

$$(f')' = f'' = f^{(2)} = \frac{d^2 f}{dx^2}$$

Στην περίπτωση αυτή, η συνάρτηση f λέγεται και *2 φορές παραγωγίσιμη*. Περαιτέρω, με τελεία επαγωγή ορίζεται η *n-οστή παράγωγος* $f^{(n)}(a) = (f^{(n-1)})'(a)$ της f στο a και η *n-οστή παράγωγος* $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ της f στο I. Ιδιαιτέρως, *ορίζουμε:* $f^{(0)} = f$. Οι παράγωγοι $f^{(n)}(a)$ και $f^{(n)}$ συμβολίζονται επίσης με

$$f^{(n)}(a) = \frac{d^n f(a)}{dx^n} \quad \text{και} \quad f^{(n)} = \frac{d^n f}{dx^n} = y^{(n)}$$

Όταν υπάρχει η n-οστή παράγωγος $f^{(n)}$ της συνάρτησης f, τότε η f ονομάζεται *n φορές παραγωγίσιμη* στο I. Οι συναρτήσεις $f^{(n)}$ (για $n \geqslant 2$) ονομάζονται και *παράγωγοι ανώτερης τάξης* της συνάρτησης f. Εξ άλλου, όταν η συνάρτηση $f^{(n)}$ είναι *συνεχής* στο I, τότε η συνάρτηση f ονομάζεται *C^n συνάρτηση* (ή *n φορές συνεχώς παραγωγίσιμη* (στο I) ή ακόμη και τάξεως C^n (στο I)) (γράφουμε $f \in C^n(I)$). Τέλος, όταν υπάρχει η παράγωγος $f^{(n)}$ για κάθε n, τότε η f ονομάζεται *C^∞ συνάρτηση* (ή *απεριόριστα παραγωγίσιμη συνάρτηση* ή ακόμη και συνάρτηση τάξης C^∞) (γράφουμε $f \in C^\infty(I)$).

Ασκήσεις

1. Εξετάστε αν υπάρχει η εφαπτομένη στο σημείο (0, 0) της καμπύλης Γ με εξίσωση

(a) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geqslant 0 \\ -\sqrt{-x}, & x < 0 \end{cases}$ **(b)** $f(x) = \begin{cases} 1 + x, & x \geqslant 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

2. Αποδείξτε ότι η συνάρ

κών συναρτήσεων), των εκθετικών και των λογαριθμικών συναρτήσεων και τέλος των υπερβολικών συναρτήσεων.

Παράγωγοι τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Στο εδάφιο αυτό καταγράφονται οι τύποι παραγώγισης των τριγωνομετρικών συναρτήσεων $\eta\mu x$, $\sigma\upsilon\nu x$, $\varepsilon\varphi x$ και $\sigma\varphi x$.

Πρόταση 10.18

Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις $\eta\mu x$, $\sigma\upsilon\nu x$, $\varepsilon\varphi x$ και $\sigma\varphi x$ είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις (στο πεδίο ορισμού τους) και ισχύουν οι τύποι

$$\frac{d}{dx}(\eta\mu x) \equiv (\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x, \quad x \in \mathbb{R} \tag{10.41}$$

$$\frac{d}{dx}(\sigma\upsilon\nu x) \equiv (\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x, \quad x \in \mathbb{R} \tag{10.42}$$

$$\frac{d}{dx}(\varepsilon\varphi x) \equiv (\varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = 1 + \varepsilon\varphi^2 x, \;\; x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \;\; (k \in \mathbb{Z}) \tag{10.43}$$

$$\frac{d}{dx}(\sigma\varphi x) \equiv (\sigma\varphi x)' = -\frac{1}{\eta\mu^2 x} = -(1 + \sigma\varphi^2 x), \;\; x \neq k\pi \;\; (k \in \mathbb{Z}) \tag{10.44}$$

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε ενδεικτικά τους τύπους (10.41) και (10.43).

Απόδειξη του τύπου (10.41). Έστω τυχόν (σταθεροποιημένο) $x \in \mathbb{R}$ και $h \in \mathbb{R}$ με $h \neq 0$. Τότε, με τη βοήθεια του τύπου (6.29) υπολογίζουμε:

$$\frac{d}{dx}(\eta\mu x) = \lim_{h \to 0} \frac{\eta\mu(x+h) - \eta\mu x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2\,\sigma\upsilon\nu\left(x + \dfrac{h}{2}\right)\eta\mu\dfrac{h}{2}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\eta\mu\dfrac{h}{2}}{\dfrac{h}{2}} \lim_{h \to 0} \sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{h}{2}\right) = 1 \cdot \sigma\upsilon\nu\, x = \sigma\upsilon\nu\, x$$

(αφού $\lim_{h \to 0} \dfrac{\eta\mu\dfrac{h}{2}}{\dfrac{h}{2}} = 1$ (Παράδειγμα 8.13,(a)) και $\lim_{h \to 0} \sigma\upsilon\nu\left(x + \dfrac{h}{2}\right) =$ $\sigma\upsilon\nu x$, διότι η συνάρτηση $\sigma\upsilon\nu x$ είναι συνεχής (Παράδειγμα 9.3)).

Απόδειξη του τύπου (10.43). Εφαρμόζοντας τους τύπους (10.27), (10.41) και (10.42), ευρίσκουμε

$$\frac{d}{dx}(\varepsilon\varphi\, x) = \left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)' = \frac{(\eta\mu x)'\,\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x\,(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu x\,\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x\,(-\eta\mu x)}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}. \square$$

Από τον κανόνα αλυσίδας (Θεώρημα 10.12) και την Πρόταση 10.18 έχουμε το ακόλουθο

Πόρισμα 10.19

Έστω $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x του διαστήματος I. Τότε, οι συναρτήσεις $\eta\mu f(x)$, $\sigma\upsilon\nu f(x)$, $\varepsilon\varphi f(x)$ και $\sigma\varphi f(x)$ (για τις δύο τελευταίες υπό τις γνωστές προϋποθέσεις, ώστε να ορίζονται (να έχουν έννοια)) είναι παραγωγίσιμες και ισχύουν οι τύποι

(10.45) $$\frac{d}{dx}\,(\eta\mu\, f(x)) = (\sigma\upsilon\nu\, f(x))\, f'(x)$$

(10.46) $$\frac{d}{dx}\,(\sigma\upsilon\nu\, f(x)) = -(\eta\mu\, f(x))\, f'(x)$$

(10.47) $$\frac{d}{dx}\,(\varepsilon\varphi\, f(x)) = \frac{f'(x)}{\sigma\upsilon\nu^2 f(x)}$$

(10.48) $$\frac{d}{dx}\,(\sigma\varphi\, f(x)) = -\frac{f'(x)}{\eta\mu^2 f(x)}\,. \qquad \square$$

Π.χ. έχουμε

$$(\eta\mu(x^2+x))' = (\sigma\upsilon\nu(x^2+x))\,(x^2+x)' = (2x+1)\,\sigma\upsilon\nu(x^2+x)$$

$$\left(\sigma\upsilon\nu\,\frac{1}{x^2}\right)' = \left(-\eta\mu\,\frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{1}{x^2}\right)' = \left(-\eta\mu\,\frac{1}{x^2}\right)\left(-\frac{2}{x^3}\right)$$

$$= \frac{2}{x^3}\,\eta\mu\,\frac{1}{x^2}, \qquad x \neq 0.$$

Παράδειγμα 10.14

Η συνάρτηση

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^2\,\eta\mu\,\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

είναι *παραγωγίσιμη* (στο $\mathbb{R}$) και η παράγωγος $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ της συνάρτησης f είναι *ασυνεχής στο σημείο* 0.

Λύση. Για κάθε $x \neq 0$ υπολογίζουμε

$$f'(x) = (x^2)'\,\eta\mu\,\frac{1}{x} + x^2\left(\eta\mu\,\frac{1}{x}\right)' = 2x\,\eta\mu\,\frac{1}{x} + x^2\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}\right)'$$

$$= 2x\,\eta\mu\,\frac{1}{x} + x^2\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)' = 2x\,\eta\mu\,\frac{1}{x} - \sigma\upsilon\nu\,\frac{1}{x}$$

Εξ άλλου, έχουμε

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \, \eta\mu \, \frac{1}{x}}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(x \, \eta\mu \, \frac{1}{x} \right) = 0$$

Έτσι, η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \, \eta\mu \, \frac{1}{x} - \sigma\upsilon\nu \, \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Περαιτέρω, παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει (στο $\overline{\mathbb{R}}$) το $\lim_{x \to 0} f'(x)$ (θεωρείστε (π.χ.) τις ακολουθίες $\frac{1}{2n\pi}$ και $1/(2n\pi + \frac{\pi}{2})$ και εφαρμόστε την αρχή μεταφοράς) και επομένως η συνάρτηση f' είναι ασυνεχής στο σημείο 0. □

Παράγωγοι των αντιστρόφων των τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Στο εδάφιο αυτό υπολογίζουμε τις παραγώγους των συναρτήσεων $\tau o\xi\eta\mu x$, $\tau o\xi\sigma\upsilon\nu x$, $\tau o\xi\varepsilon\varphi x$ και $\tau o\xi\sigma\varphi x$ (στο πεδίο ορισμού τους).

Πρόταση 10.20

Οι συναρτήσεις $\tau o\xi\eta\mu x$, $\tau o\xi\sigma\upsilon\nu x$, $\tau o\xi\varepsilon\varphi x$ και $\tau o\xi\sigma\varphi x$ είναι παραγωγίσιμες (οι δύο πρώτες στο $(-1, 1)$ και οι υπόλοιπες δύο στο $\mathbb{R}$) και ισχύουν οι τύποι

(10.49) $$\frac{d}{dx} (\tau o\xi\eta\mu x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in (-1, 1)$$

(10.50) $$\frac{d}{dx} (\tau o\xi\sigma\upsilon\nu x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in (-1, 1)$$

(10.51) $$\frac{d}{dx} (\tau o\xi\varepsilon\varphi x) = \frac{1}{1 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

(10.52) $$\frac{d}{dx} (\tau o\xi\sigma\varphi x) = -\frac{1}{1 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Απόδειξη. Ενδεικτικά αποδεικνύουμε τους τύπους (10.49) και (10.51).

Απόδειξη του τύπου (10.49). Η συνάρτηση $y = \text{τοξημ}x$, $x \in [-1, 1]$ είναι η αντίστροφη της συνάρτησης $x = \text{ημ}y$, $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Εξ άλλου, παρατηρούμε ότι ισχύει

$$\frac{d}{dy}(\text{ημ}y) = \text{συν}y \neq 0 \quad \text{για κάθε } y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

και εφαρμόζοντας τον τύπο (10.37), λαμβάνουμε

$$\frac{d}{dx}(\text{τοξημ}x) = \frac{1}{\frac{d}{dy}(\text{ημ}y)} = \frac{1}{\text{συν}y} = \frac{1}{\sqrt{1-\text{ημ}^2 y}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1)$$

Απόδειξη του τύπου (10.51). Η συνάρτηση $y = \text{τοξεφ}x$, $x \in \mathbb{R}$ είναι η αντίστροφη της συνάρτησης $x = \text{εφ}y$, $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Εξ άλλου, παρατηρούμε ότι ισχύει

$$\frac{d}{dy}(\text{εφ}y) = \frac{1}{\text{συν}^2 y} \neq 0 \quad \text{για κάθε } y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

και εφαρμόζοντας τον τύπο (10.37), λαμβάνουμε

$$\frac{d}{dx}(\text{τοξεφ}x) = \frac{1}{\frac{d}{dy}(\text{εφ}y)} = \frac{1}{1+\text{εφ}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad \square$$

Από τον κανόνα αλυσίδας (Θεώρημα 10.12) και την Πρόταση 10.20 προκύπτει το ακόλουθο

Πόρισμα 10.21

Έστω $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x του διαστήματος I. Τότε, οι συναρτήσεις $\text{τοξημ}f(x)$, $\text{τοξσυν}f(x)$, $\text{τοξεφ}f(x)$ και $\text{τοξσφ}f(x)$ (υπό προϋποθέσεις, ώστε να ορίζονται) είναι παραγωγίσιμες και ισχύουν οι τύποι

1. ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΚΑΙ ΣΕΙΡΕΣ

1.1 Ακολουθίες πραγματικών αριθμών

Ορισμός *Μια ακολουθία πραγματικών αριθμών* $\{a_n\}$ *είναι μια πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο* $\mathbb{N}$ *των φυσικών αριθμών. Οι τιμές της συνάρτησης αυτής,* $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ *είναι οι όροι της ακολουθίας.*

Παράδειγμα 1.1 Βρείτε τους 5 πρώτους όρους των ακολουθιών:

$$i)\ a_n = \frac{1}{n}, \qquad ii)\ \beta_n = \frac{1}{2^n}, \qquad iii)\ \gamma_n = \frac{n}{1+n^2}$$

Λύση:

$$i)\ \{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\right\}$$

$$ii)\ \{\beta_n\} = \left\{\frac{1}{2^n}\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots\right\}$$

$$iii)\ \{\gamma_n\} = \left\{\frac{n}{1+n^2}\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{4}{17}, \frac{5}{26}, \dots\right\}$$

Ορισμός *Θα λέμε ότι η ακολουθία* $\{a_n\}$ *συγκλίνει στον πραγματικό αριθμό* l *και θα συμβολίζουμε* $a_n \to l$ *ή* $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ *αν για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει φυσικός αριθμός* N *τέτοιος ώστε* $|a_n - l| < \varepsilon$ *για κάθε* $n > N$.
Αν τέτοιος αριθμός δεν υπάρχει θα λέμε ότι η ακολουθία δεν συγκλίνει. Ειδικότερα θα λέμε ότι απειρίζεται θετικά ($a_n \to +\infty$ *ή* $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$) *αν για κάθε* $M > 0$ *υπάρχει φυσικός αριθμός* N *τέτοιος ώστε* $a_n > M$ *για κάθε* $n > N$ *και απειρίζεται αρνητικά* ($a_n \to -\infty$ *ή* $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$) *αν* $a_n < -M$ *για κάθε* $n > N$.

Παράδειγμα 1.2 Αποδείξτε με χρήση του ορισμού ότι οι ακολουθίες συγκλίνουν

$$i)\ a_n = \frac{1}{n}, \qquad ii)\ \beta_n = \frac{2n+1}{3n+4},$$

Λύση: i)Ισχύει $a_n = \frac{1}{n} \to 0$.
Πράγματι· έστω τυχόν $\varepsilon > 0$, τότε

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Αν πάρουμε N τον μεγαλύτερο φυσικό που είναι μικρότερος του $\frac{1}{\varepsilon}$, θα έχουμε:

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon, \quad \text{για κάθε} \quad n > N$$

δηλαδή $\dfrac{1}{n} \to 0$.

ii) Ισχύει $a_n = \frac{2n+1}{3n+4} \to \frac{2}{3}$.
Πράγματι· έστω τυχόν $\varepsilon > 0$, τότε

$$\left|\frac{2n+1}{3n+4} - \frac{2}{3}\right| = \frac{5}{3(3n+4)} < \varepsilon$$

δηλαδή

$$n > \frac{5 - 12\varepsilon}{9\varepsilon}$$

Αν πάρουμε N ένα οποιοδήποτε φυσικό αριθμό που είναι μεγαλύτερος του $\frac{5-12\varepsilon}{9\varepsilon}$, τότε

$$\text{για κάθε} \quad n > N \quad \text{ισχύει} \quad \left|\frac{2n+1}{3n+4} - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon,$$

δηλαδή $\beta_n \to \dfrac{2}{3}$.

Ιδιότητες Αν $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$, $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = m$ τότε

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} (\lambda a_n + \mu \beta_n) &= \lambda l + \mu m \\ \lim_{n\to\infty} (a_n \beta_n) &= lm \end{aligned}$$

Ορισμός *Μια ακολουθία $\{a_n\}$ λέγεται* **αύξουσα** *όταν $a_{n+1} \geq a_n$, για κάθε $n \epsilon \mathbb{N}$. Αν $a_{n+1} > a_n$, τότε η $\{a_n\}$ λέγεται* **γνήσια αύξουσα**. *Αν $a_{n+1} \leq a_n$, τότε η $\{a_n\}$ λέγεται* **φθίνουσα** *και αν $a_{n+1} < a_n$ η $\{a_n\}$ λέγεται* **γνήσια φθίνουσα**. *Μία ακολουθία που είναι είτε αύξουσα είτε φθίνουσα λέγεται* **μονότονη**.

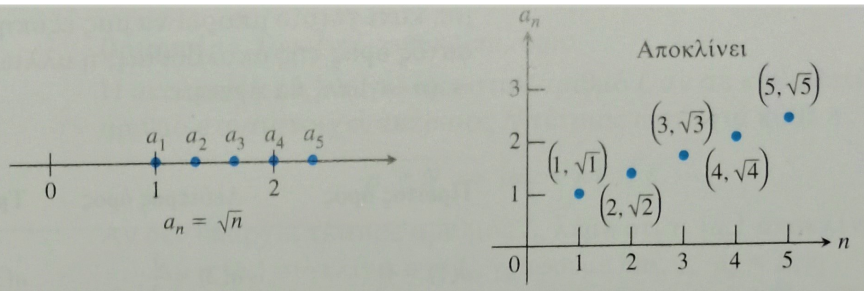
Παράδειγμα 1.3 $a_n = \frac{1}{n}$ είναι γνήσια φθίνουσα, αφού

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = a_n, \quad \text{για κάθε} \quad n \in \mathbb{N}$$

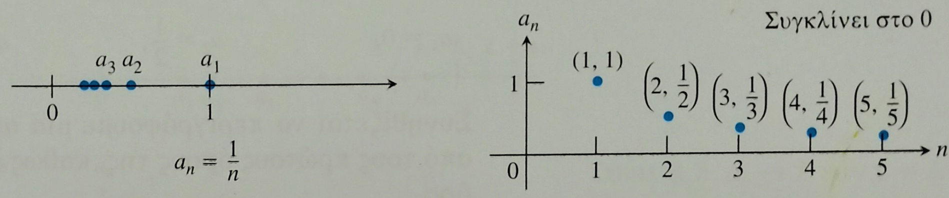
Παράδειγμα 1.4 $a_n = \frac{n+1}{n+2}$ είναι γνήσια αύξουσα, αφού

$$a_{n+1} = \frac{n+2}{n+3} > \frac{n+1}{n+2} = a_n, \quad \text{για κάθε} \quad n \in \mathbb{N}$$

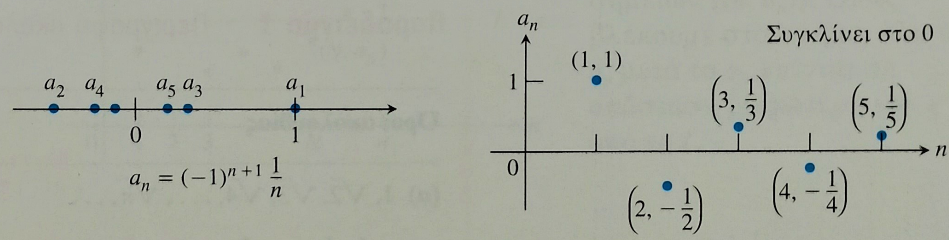
(α) Οι όροι $a_n = \sqrt{n}$ υπερβαίνουν τελικά κάθε ακέραιο, οπότε η ακολουθία $\{a_n\}$ αποκλίνει, . . .



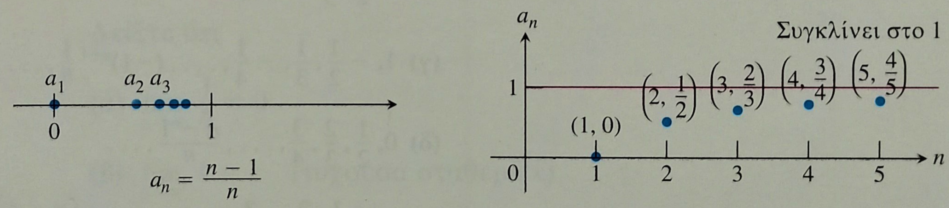
(β) . . . όμως οι όροι $a_n = 1/n$ μικραίνουν διαρκώς και προσεγγίζουν αυθαίρετα το 0 καθώς το n αυξάνεται, οπότε η ακολουθία $\{a_n\}$ συγκλίνει στο 0.



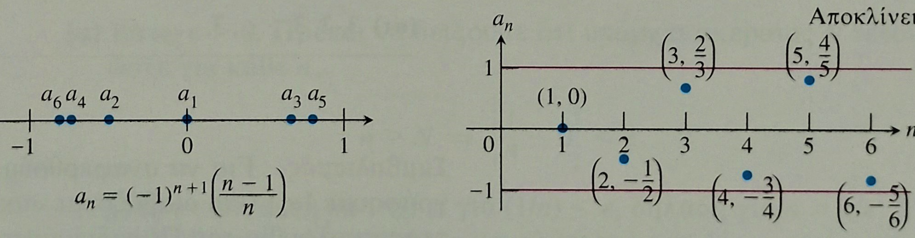
(γ) Οι όροι $a_n = (-1)^{n+1}(1/n)$ εναλλάσσουν τα πρόσημά τους, ωστόσο συγκλίνουν στο 0.



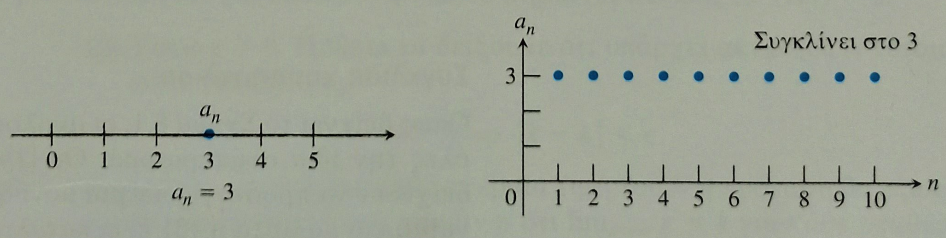
(δ) Οι όροι $a_n = (n-1)/n$ προσεγγίζουν αυθαίρετα το 1 καθώς το n αυξάνεται, οπότε η ακολουθία $\{a_n\}$ συγκλίνει στο 1.

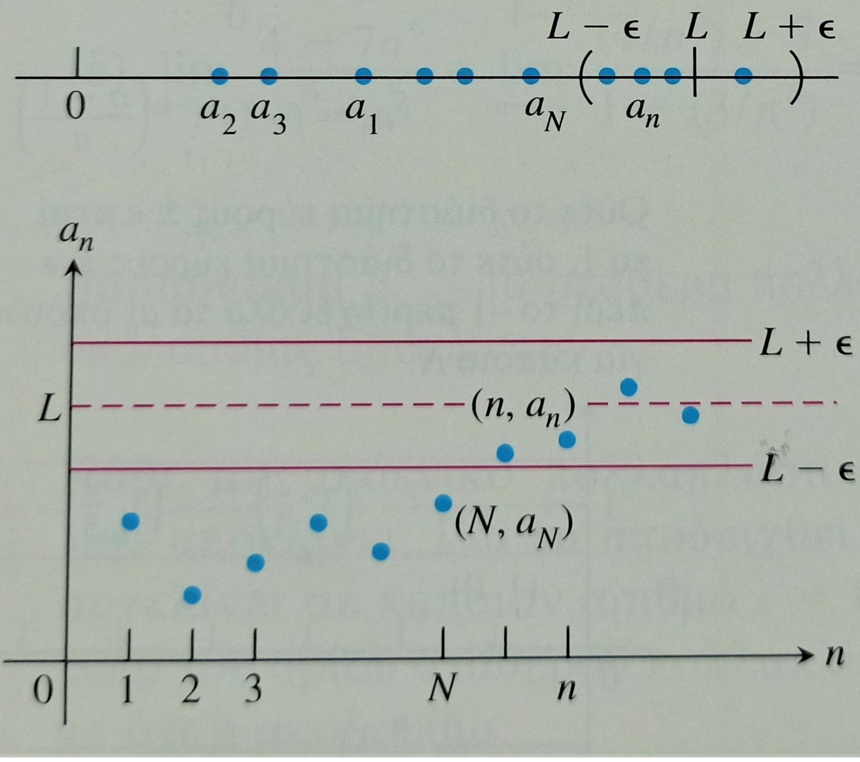


(ε) Οι όροι $a_n = (-1)^{n+1}[(n-1)/n]$ εναλλάσσουν τα πρόσημά τους. Οι θετικοί όροι τείνουν στο 1. Ωστόσο, οι αρνητικοί όροι τείνουν στο -1 καθώς το n αυξάνεται, οπότε η ακολουθία $\{a_n\}$ αποκλίνει.

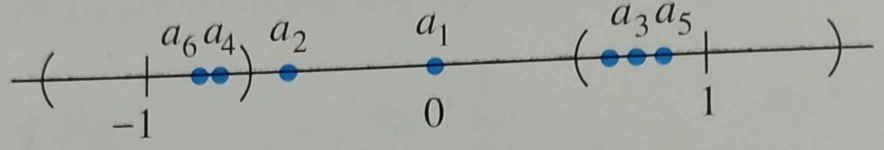


(στ) Οι όροι της ακολουθίας σταθερών αριθμών $a_n = 3$ έχουν την ίδια τιμή ανεξαρτήτως του n, οπότε η ακολουθία $\{a_n\}$ συγκλίνει στο 3.



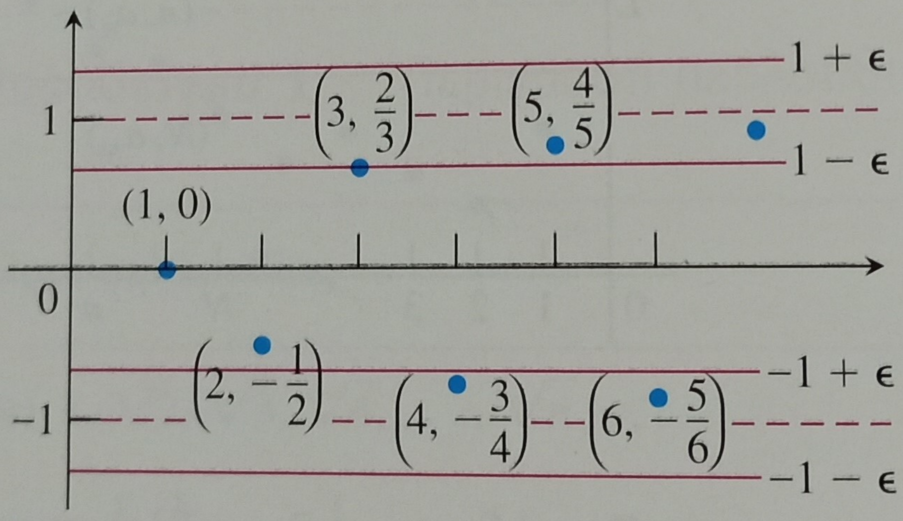


ΣΧΗΜΑ $a_n \to L$ εάν $y = L$ είναι μια οριζόντια ασύμπτωτη της ακολουθίας σημείων $\{(n, a_n)\}$. Όπως βλέπουμε στο σχήμα, όλα τα a_n μετά το a_N κείνται σε απόσταση μικρότερη του ϵ από το L.



$$a_n = (-1)^{n+1}\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

Ούτε το διάστημα εύρους $\pm\,\epsilon$ περί το 1, ούτε το διάστημα εύρους $\pm\,\epsilon$ περί το −1 περιέχει όλα τα a_n όπου $n \geq N$ για κάποιο N.



ΣΧΗΜΑ Η ακολουθία $\{(-1)^{n+1}[(n-1)/n]\}$ αποκλίνει.

Ορισμός *Η ακολουθία $\{a_n\}$ λέγεται άνω φραγμένη αν υπάρχει $M\epsilon\mathbb{R}$ με $a_n \leq M$ για κάθε $n\epsilon\mathbb{N}$. Η $\{a_n\}$ λέγεται κάτω φραγμένη αν υπάρχει $m\epsilon\mathbb{R}$ με $a_n \geq m$ για κάθε $n\epsilon\mathbb{N}$. Τέλος η $\{a_n\}$ λέγεται φραγμένη ακολουθία αν είναι άνω και κάτω φραγμένη, δηλαδή αν υπάρχει $\varphi > 0$, τέτοιο ώστε $|a_n| \leq \varphi$ για κάθε $n\epsilon\mathbb{N}$.*

Θεώρημα *Κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία είναι συγκλίνουσα.*

Παράδειγμα 1.5 Η ακολουθία $a_n = \frac{n+2}{n+3}$, είναι φραγμένη αφού

$$a_n = \frac{n+2}{n+3} < 1, \quad \text{για κάθε} \qquad n \,\epsilon\, \mathbb{N}$$

Παράδειγμα 1.6 Η ακολουθία $a_n = \frac{2n}{n+3}$, είναι αύξουσα, αφού

$$a_{n+1} = \frac{2n+2}{n+4} \geq \frac{2n}{n+3} = a_n$$

και φραγμένη αφού $|a_n| = \frac{2n}{n+3} \leq 2$ για κάθε $n\epsilon\mathbb{N}$. Επομένως συγκλίνει και ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+3} = 2$$

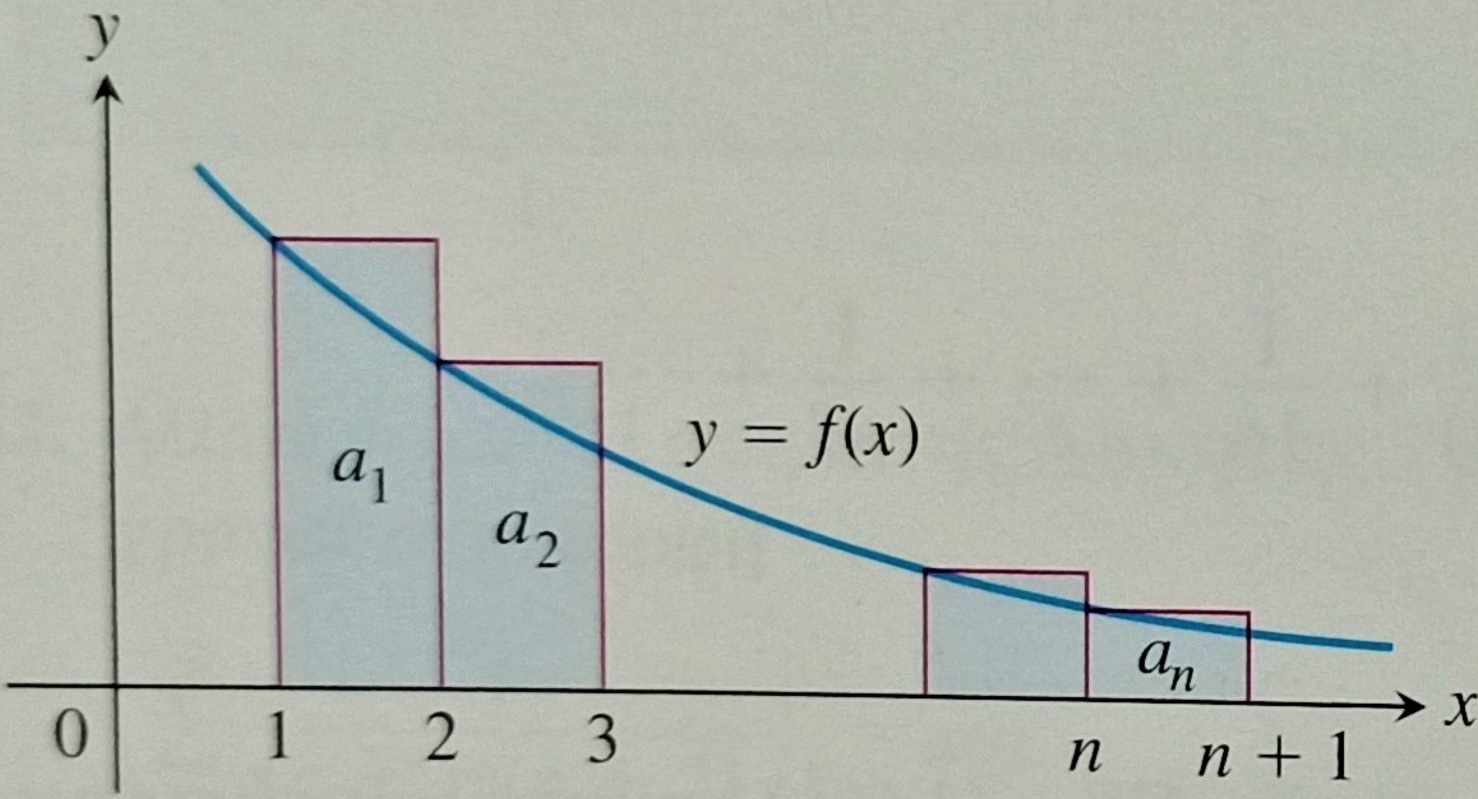
1.2 Αριθμητικές Σειρές

Ορισμός *Εστω $\{a_n\}$ μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Σχηματίζουμε την ακολουθία $\{S_n\}$ ως εξής:*

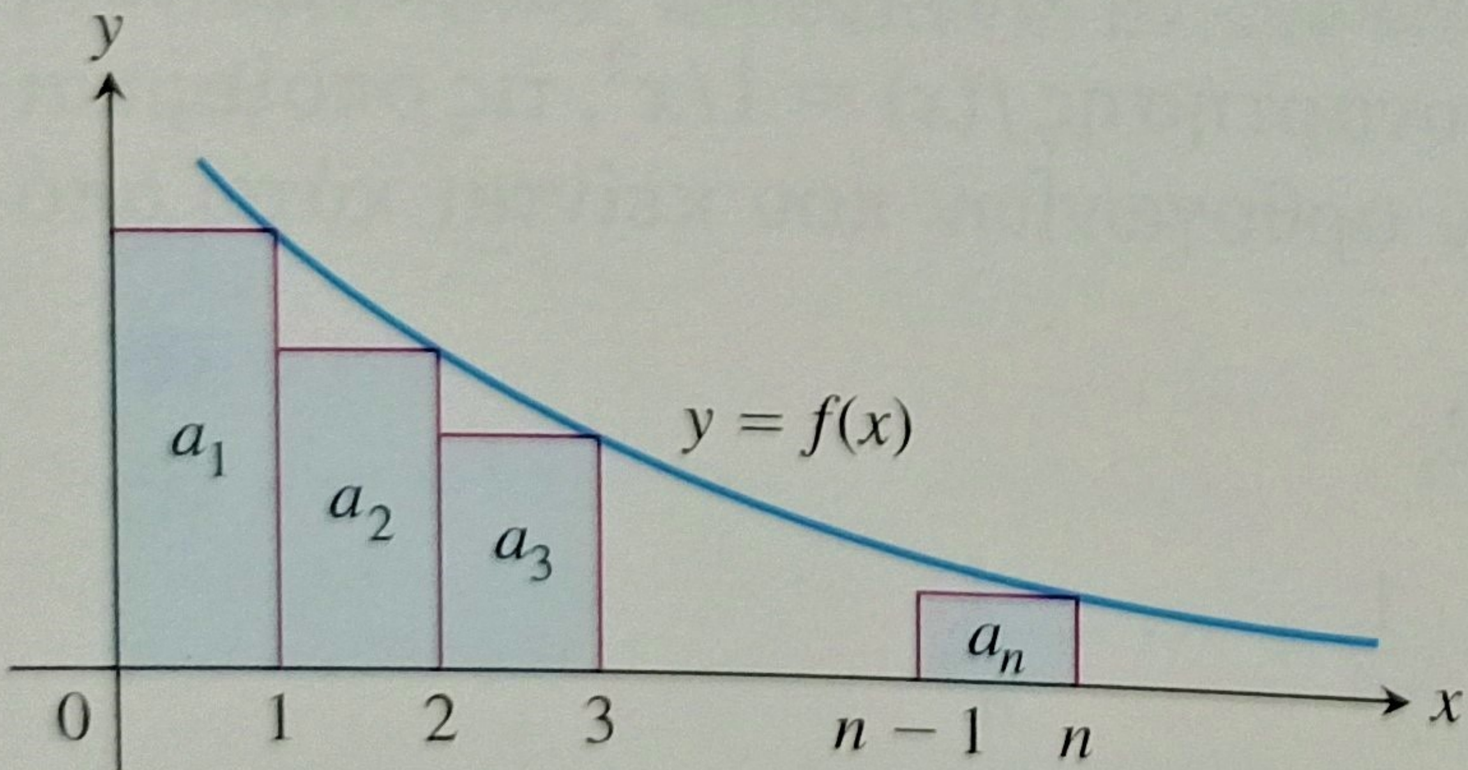
$$\begin{aligned}
S_1 &= a_1 \\
S_2 &= a_1 + a_2 \\
&\vdots \\
S_n &= a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Αν $n \to +\infty$ το (σχηματικό) άπειρο άθροισμα

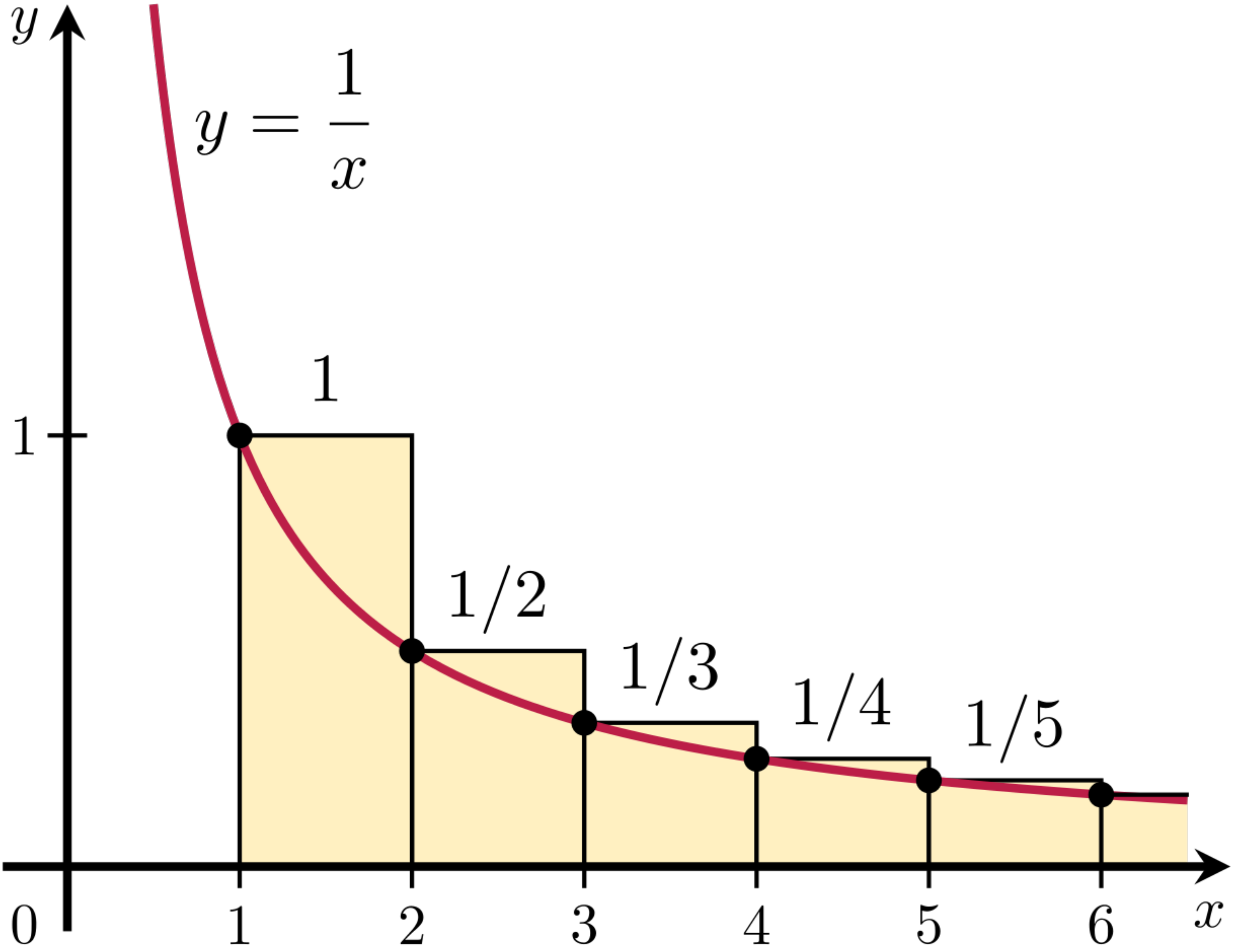
$$a_1 + a_2 + \ldots$$



(α)



(β)



y
$y = \frac{1}{x}$
1
1
1/2
1/3
1/4
1/5
0
1
2
3
4
5
6
x

συμβολίζεται με $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και καλείται **σειρά**. Η ακολουθία $\{S_n\}$ είναι η ακολουθία των **μερικών αθροισμάτων** της σειράς και ο n-οστός όρος της $\{S_n\}$ είναι το n-οστό μερικό άθροισμα της σειράς.

Έχουμε τρεις περιπτώσεις.

Ορισμός

1) Υπάρχει $lim_{n\to\infty} S_n = s \epsilon \mathbb{R}$, τότε θα λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει και έχει άθροισμα s.

2) Το $lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$ ή $-\infty$ και θα λέμε ότι η σειρά απειρίζεται θετικά ή αρνητικά

3) Δεν υπάρχει το $lim_{n\to\infty} S_n$.

Για τις περιπτώσεις 2) και 3) θα λέμε ότι η σειρά **αποκλίνει.**

Ιδιότητες Αν $\lambda \epsilon \mathbb{R}$, $a, \beta \epsilon \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = \beta$, τότε

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda a$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm \beta_n) = a \pm \beta$

3) $\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{N} a_n = a - S_N$

Θεώρημα *Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Έτσι, αν $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ δεν συγκλίνει.*

Το θεώρημα αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν κριτήριο μη σύγκλισης μιας σειράς, π.χ. η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+2}$ δεν συγκλίνει αφού $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$.

Θεώρημα (Τηλεσκοπικές σειρές) Άν $a_n = \beta_n - \beta_{n+1}$ και $lim_{n\to\infty} \beta_n = \beta$ τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = (\beta_1 - \beta_2) + (\beta_2 - \beta_3) + ... + (\beta_n - \beta_{n+1}) + ... = \beta_1 - \lim_{n\to\infty} \beta_{n+1} = \beta_1 - \beta$$

Παράδειγμα 1.7 Να βρεθεί το άθροισμα της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, όπου

$$a_n = \frac{2}{4n^2 - 1}$$

Λύση: Η ακολουθία γράφεται

$$a_n = \frac{2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{(2n-1)} - \frac{1}{(2n+1)} = \beta_n - \beta_{n+1}$$

με $\beta_n = \frac{1}{2n-1}$. Άρα

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + ... + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) + ... = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} = 1$$

Ορισμός *(γεωμετρική σειρά) Η σειρά*

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + ... + ar^n + ... \qquad (a \neq 0)$$

λέγεται **γεωμετρική** *σειρά.*

Θεώρημα *Η γεωμετρική σειρά*

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + ...$$

έχει τις ιδιότητες:

i) Αν $|r| \geq 1$, η σειρά αποκλίνει

ii) Αν $|r| < 1$, η σειρά συγκλίνει

και το άθροισμά της είναι $\dfrac{a}{1-r}$, δηλαδή

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$$

Παράδειγμα 1.8 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 3\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{3}{1-\frac{1}{2}} = 6$

Θεώρημα *Αν $0 \leq a_n \leq \beta_n$ τότε:*

i) Αν $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ συγκλίνει, τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει

ii) Αν $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ απειρίζεται, τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ απειρίζεται

Ορισμός *(Αρμονική σειρά) Η σειρά*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\rho}}$$

με $\rho \in \mathbb{R}$, ονομάζεται **αρμονική** *σειρά ρ-τάξης.*

Θεώρημα *Η αρμονική σειρά*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\rho}}$$

συγκλίνει τότε και μόνο τότε αν $\rho > 1$.

Παραδείγματα 1.9 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

Θεώρημα *(κριτήριο ριζών) Η σειρά* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*:*

i) συγκλίνει αν $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$

ii) αποκλίνει αν $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$

Παράδειγμα 1.10 Η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n}}{n^n}$ συγκλίνει

Πράγματι,

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{e^{2n}}{n^n}} = lim_{n\to\infty} \frac{e^2}{n} = 0 < 1.$

Θεώρημα *(κριτήριο λόγων) Η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*:*

i) συγκλίνει αν $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$

ii) αποκλίνει αν $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$

Παράδειγμα 1.11 Η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!n!}$ αποκλίνει

Πράγματι, $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{4n+2}{n+1} \longrightarrow 4 > 1.$

Θεώρημα *(εναλλάσσουσα σειρά) Αν* $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n \geq ... \geq 0$ *και* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *τότε η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ *συγκλίνει.*

Σφάλμα αποκοπής *Αν* S_n *το n-οστό μερικό άθροισμα της εναλλάσσουσας σειράς και s το άθροισμά της τότε*

$$|S_n - s| \leq a_{n+1}$$

Παράδειγμα 1.12 Η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ συγκλίνει, αφού $a_n = \frac{1}{n}$, ικανοποιεί τις υποθέσεις του παραπάνω θεωρήματος.

Το σφάλμα αποκοπής μετά από 100 όρους είναι

$$S_{100} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - ... - \frac{1}{100}$$

$$|S_{100} - s| \leq a_{101} = \frac{1}{101}$$

Απόλυτη σύγκλιση: *Αν* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *συγκλίνει τότε* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει και ισχύει* $|\sum_{n=1}^{\infty} a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

2. ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ

2.1 Ορισμοί και ιδιότητες

Ορισμός *Αν* $\{a_n\}$ *ακολουθία πραγματικών αριθμών και* x *πραγματική μεταβλητή τότε η σειρά*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ...$$

λέγεται ***δυναμοσειρά*** *κέντρου 0.*

Γενικότερα αν x_0 *πραγματικός αριθμός η σειρά*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + ...$$

λέγεται δυναμοσειρά κέντρου x_0.

Θεώρημα *Για την δυναμοσειρά* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ *έχουμε τρεις δυνατότητες:*

i) η σειρά συγκλίνει μόνο για $x = x_0$

ii) η σειρά συγκλίνει για κάθε $x \epsilon \mathbb{R}$

iii) υπάρχει $R > 0$ *τέτοιο ώστε η σειρά συγκλίνει για κάθε* x *με* $|x - x_0| < R$.

Τα άκρα του διαστήματος εξετάζονται κατά περίπτωση. Δηλαδή η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ συγκλίνει πάντα για κάθε x σε κάποιο διάστημα το οποίο καλούμε διάστημα σύγκλισης, το δε R καλείται *ακτίνα σύγκλισης* και υπολογίζεται από τους τύπους

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \qquad ή \qquad R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

που προκύπτουν από τα θεωρήματα (κριτήριο ριζών ή κριτήριο λόγου)

Παραδείγματα 2.1 Να βρεθεί η ακτίνα σύγκλισης και το διάστημα σύγκλισης των δυναμοσειρών

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+1)^n}{2^n}$

iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) x^n$ iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (x-2)^n$

Λύση:

i) $R = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} = 1$

ii) συγκλίνει για $\left|\frac{x+1}{2}\right| < 1 \Rightarrow -2 < x+1 < 2 \Rightarrow -3 < x < 1$

iii) ξεχωριστά οι γεωμετρικές σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}$ συγκλίνουν στα διαστήματα $(-2, 2)$ και $(-3, 3)$ αντίστοιχα και παίρνουμε το μικρότερο $-2 < x < 2$.

iv) Η ακτίνα σύγκλισης είναι

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

και το διάστημα σύγκλισης είναι $-1 < x - 2 < 1$ δηλαδή $1 < x < 3$.

Θεώρημα *Αν $f(x) = \frac{a}{x-\beta}$ μια συνάρτηση τότε:*

i) η παράσταση σε δυναμοσειρά με κέντρο 0 της $f(x)$ είναι

$$\frac{a}{x-\beta} = -\frac{a}{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{\beta}\right)^n \quad \text{για} \quad |x| < |\beta| \neq 0$$

ii) η παράσταση σε δυναμοσειρά με κέντρο x_0 είναι

$$\frac{a}{x-\beta} = -\frac{a}{\beta - x_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-x_0}{\beta - x_0}\right)^n \quad \text{για} \quad |x - x_0| < |\beta - x_0| \neq 0.$$

Απόδειξη

i)
$$\frac{a}{x-\beta} = \frac{-a}{\beta - x} = \frac{-\frac{a}{\beta}}{1 - \left(\frac{x}{\beta}\right)} = -\frac{a}{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{\beta}\right)^n, \quad \text{για} \quad \left|\frac{x}{\beta}\right| < 1$$

ii) Αφού $\beta \neq x_0$, έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{a}{x-\beta} &= \frac{-a}{\beta - x} = \frac{-a}{(\beta - x_0) - (x - x_0)} = \frac{-\frac{a}{\beta - x_0}}{1 - \left(\frac{x-x_0}{\beta - x_0}\right)} \\ &= \left(\frac{-a}{\beta - x_0}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x - x_0}{\beta - x_0}\right)^n, \text{ για } \left|\frac{x-x_0}{\beta - x_0}\right| < 1 \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2.2

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{3}{x+2} &= \frac{3}{x-(-2)} \\ &= \frac{-3}{-2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{-2}\right)^n \\ &= \frac{3}{2}\left[1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{8} + ...\right] \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2.3

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{5x-1}{x^2-x-2} &= \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-2} = \frac{2}{x-(-1)} + \frac{3}{x-2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n x^n + \frac{-3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[2(-1)^{-n} - \frac{3}{2^{n+1}}\right]x^n \qquad \text{για} \qquad |x| < 1 \end{aligned}$$

Θεώρημα *(Πράξεις δυναμοσειρών) Αν* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n x^n$ *τότε*

1)$f(kx) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n k^n x^n$

2)$f(x^N) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{nN}$

3)$f(x) \pm g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \pm \beta_n)x^n$

4)$f(x) \cdot g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n x^n$,*όπου* $\gamma_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \beta_{n-k}$,

(με διάστημα σύγκλισης το μικρότερο των f,g.)

Θεώρημα *Αν* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ *για κάθε* $|x - x_0| < R$,

τότε:

1)$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}$ *για κάθε* $|x - x_0| < R$

2)$\int_{x_0}^{x} f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$ *για κάθε* $|x - x_0| < R$.

Παράδειγμα 2.4 Είναι γνωστό ότι

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + ... \qquad \text{για} \qquad |x| < 1$$

Παραγωγίζουμε

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + x + 2x + ... + nx^{n-1} + ... \qquad \text{για} \qquad |x| < 1$$

Παράδειγμα 2.5 Παρόμοια

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + ... + (-1)^n x^n + ... \qquad \text{για} \qquad |x| < 1$$

Ολοκληρώνουμε

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^n \frac{x^n}{n} + ... \qquad \text{για} \qquad |x| < 1$$

Για $x = 1$ συγκλίνει (ως εναλλάσσουσα σειρά) οπότε

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - ... + \frac{(-1)^n}{n} + ...$$

2.2 Σειρές Taylor

Τέλος αν $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \forall \quad x \epsilon (-R, R)$ τότε παρατηρούμε ότι $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$. Αντίστροφα αν f συνάρτηση, η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ λέγεται σειρά Taylor(Mac-Laurin) της f.

Π.χ. δίνεται $f(x) = e^x$ τότε

$$f^{(n)}(x) = e^x, \quad \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{n!}.$$

Άρα

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Η σειρά συγκλίνει $\forall \ x \epsilon \mathbb{R}$.

Πράγματι,

$$R = \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = +\infty.$$

ΕΠΙΛΟΓΗ ΚΑΠΟΙΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

<u>Ακολουθίες:</u> • Ορισμός = Μια ακολουθία πραγματικών αριθμών είναι μια συνάρτηση $F: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, δηλαδή $F(1), F(2), F(3), \ldots$ Τις ακολουθίες τις συμβολίζουμε με (a_n) $[a_n = F(n)\ \forall n \in \mathbb{N}]$ ή $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ή $\{a_n\}$ ή $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ή $(a_1, a_2, \ldots)$.

Παραδείγματα: (1) $a_n = 1\ \forall n \in \mathbb{N}$, (2) $a_n = \frac{1}{n}$, (3) $a_n = (-1)^n$, (4) $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ με γενικό τύπο $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$

• Το <u>σύνολο τιμών</u> μιας ακολουθίας είναι το $f(\mathbb{N})$ το οποίο το συμβολίζουμε με $\{f(n): n \in \mathbb{N}\}$, π.χ. (1) $\{1\}$, (2) $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}\}$, (3) $\{-1, 1\}$

• Ορισμός = Έστω (a_n) μια ακολουθία και $a \in \mathbb{R}$. Λέμε ότι η (a_n) συγκλίνει στο a και το συμβολίζουμε με $a_n \to a$ ή $\lim a_n = a$ ή $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, αν ισχύει το ακόλουθο: Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένας φυσικός αριθμός $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0(\varepsilon)$ να ισχύει ότι $|a_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.

• Μαθηματική έκφραση του προηγούμενου: $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0(\varepsilon)\ |a_n - a| < \varepsilon$

Παραδείγματα: (1) $a_n \to 1$ (η ακολουθία συμπίπτει στο 1)

(2) Θα δείξω ότι $a_n \to 0$. Πρέπει να δειχθεί ότι $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq n_0(\varepsilon)\ |a_n| < \varepsilon$, δηλαδή $\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$.

Πράγματι για $n_0(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ το παραπάνω ισχύει.

Ορισμός: Έστω (a_n) ακολουθία στο $\mathbb{R}$. Λέμε ότι η (a_n) συγκλίνει στο άπειρο (ή $a_n \to \infty$) και γράφουμε $\lim a_n = +\infty$ ή $a_n \to +\infty$ αν $\forall M>0\ \exists n_0(M) \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0(M)\ a_n > M$. Αντιστοίχως, γράφουμε $\lim a_n = -\infty$ ή $a_n \to -\infty$ αν $\forall M<0\ \exists n_0(M) \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0(M)\ a_n < M$.

Παραδείγματα:
1. Αν $a_n = n^2$ τότε $a_n \to +\infty$
2. Αν $a_n = -n^2$ τότε $a_n \to -\infty$
3. Αν $a_n = (-1)^n \cdot n$ τότε η ακολουθία ΔΕΝ ΣΥΓΚΛΙΝΕΙ ούτε στο $+\infty$ ούτε στο $-\infty$.

Μοναδικότητα του ορίου: Αν $a_n \to \alpha$ και $a_n \to \beta$ τότε $\alpha = \beta$.

Ιδιότητες ορίων:

1. Κριτήριο παρεμβολής ή κριτήριο ισοσυγκλινουσών ακολουθιών = Έστω $(a_n), (\beta_n), (\gamma_n)$ και $a_n < \beta_n < \gamma_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $\lim a_n = \lim \gamma_n = \alpha$ τότε $\lim \beta_n = \alpha$.
   π.χ. $\beta_n = \frac{1}{n^2}$ και $\underset{\underset{0}{\downarrow}}{0} \leq \frac{1}{n^2} \leq \underset{\underset{0}{\downarrow}}{\frac{1}{n}}$ επομένως και $\frac{1}{n^2} \to 0$ άρα $\beta_n \to 0$.

2. Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη. Δηλαδή αν (a_n) ακολουθία στο $\mathbb{R}$ και ξέρω ότι $a_n \to \alpha \in \mathbb{R}$, τότε $\exists M>0$ ώστε $|a_n| \leq M\ \forall n \in \mathbb{N}$.
   Παρατήρηση: Το αντίστροφο δεν ισχύει! Π.χ. $a_n = (-1)^n$ είναι φραγμένη αλλά δε συγκλίνει.

3. $a_n \to \alpha \iff (a_n - \alpha) \to 0$

4. $a_n \to \alpha \iff |a_n| \to |\alpha|$
   Το αντίστροφο δεν ισχύει! Π.χ. για την $a_n = (-1)^n$

5. Αν $a_n \to \alpha$ και $\beta_n \to \beta$, τότε $a_n + \beta_n \to \alpha + \beta$
   Απόδειξη: Π.ν.δ.ο. $a_n + \beta_n \to \alpha + \beta$, δηλαδή $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0(\varepsilon)$
   $$\left|(a_n + \beta_n) - (\alpha + \beta)\right| < \varepsilon.$$

Έστω λοιπόν $\varepsilon>0$ τυχαίο.

Αφού $a_n \to a$, $\exists\, n_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq n_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ και

$\beta_n \to \beta$, $\exists\, n_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq n_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ $|\beta_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2}$

Θέτω $n_0(\varepsilon) = \max\left\{n_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), n_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right\}$

Αν $n \geq n_0(\varepsilon)$ τότε $n \geq n_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \Rightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ και

$n \geq n_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \Rightarrow |\beta_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2}$

Αλλά τότε $|(a_n+\beta_n)-(a+\beta)| = |(a_n-a)+(\beta_n-\beta)| \leq |a_n-a| + |\beta_n-\beta| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Δηλαδή $\forall n \geq n_0(\varepsilon)$ έχουμε $|(a_n+\beta_n)-(a+\beta)| < \varepsilon$

Επομένως, $(a_n+\beta_n) \to a+\beta$.

6. Αν $a_n \to 0$ και (β_n) φραγμένη ακολουθία τότε $a_n \cdot \beta_n \to 0$.

π.χ. $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$, τότε $a_n \to 0$.

7. Αν $a_n \to a$ και $\beta_n \to \beta$ τότε $a_n \cdot \beta_n \to a \cdot \beta$.

8. Αν $\kappa \in \mathbb{N}$ και $a_n \to a$ τότε $a_n^\kappa \to a^\kappa$ (δηλαδή, αν $a_n \to a$, τότε $a_n^2 \to a^2$, $a_n^3 \to a^3$, κ.ο.κ.)

8'. Αν $\kappa \in \mathbb{N}$ με $a_n \geq 0$ και $a_n \to a$ τότε $\sqrt[\kappa]{a_n} \to \sqrt[\kappa]{a}$ (δηλαδή, $\sqrt{a_n} \to \sqrt{a}$, $\sqrt[3]{a_n} \to \sqrt[3]{a}, \dots$)

9. Αν ξέρω ότι $a_n \to a$, $\beta_n \to \beta$ και $\beta_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ και $\beta \neq 0$ τότε $\frac{a_n}{\beta_n} \to \frac{a}{\beta}$

π.χ. $a_n = \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2+\frac{1}{n}} \to \frac{1}{2}$

10. Αν $a_n \to a$ και $t \in \mathbb{R}$ τότε $t \cdot a_n \to t \cdot a$

11. Αν (a_n) και (β_n) ακολουθίες τέτοιες ώστε $a_n \to a$, $\beta_n \to \beta$ και $a_n \leq \beta_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ τότε ισχύει ότι $a \leq \beta$.

11'. Έστω ακολουθία (a_n) και $m, M \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $m \leq a_n \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Αν $a_n \to a$ τότε ισχύει ότι $m \leq a \leq M$.

Βασικά όρια:

1. $\frac{1}{n} \to 0$

2. Αν $a>1$, τότε $a^n \to +\infty$

Απόδειξη: Αφού $a>1$, υπάρχει $\vartheta>0$ ώστε $a = 1+\vartheta$. Από ανισότητα Bernoulli έχουμε ότι

$$a^n = (1+\vartheta)^n \geq 1 + n\cdot\vartheta \to +\infty \text{ άρα } a_n \to +\infty.$$

3. Αν $0<a<1$, τότε $a^n \to 0$

Απόδειξη: Αφού $0<a<1$ τότε $\frac{1}{a}>1$ άρα $\exists\, \vartheta>0$ ώστε $\frac{1}{a} = 1+\vartheta$. Συνεπώς για οποιονδήποτε $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = (1+\vartheta)^n \geq 1+n\vartheta \Rightarrow a^n \leq \frac{1}{1+n\vartheta}$.

Επομένως, $0 \leq a^n \leq \frac{1}{1+n\vartheta}$ επομένως $a^n \to 0$.

4. Αν $a>0$, τότε $\sqrt[n]{a} \to 1$.

⑤ $\sqrt[n]{n} \to 1$

Συνοπτική παρουσίαση βασικών ορίων =

	$0<a<1$	$a>1$
a^n	0	$+\infty$
$\sqrt[n]{a}$	1	1

και $\frac{1}{n} \to 0$ και $\sqrt[n]{n} \to 1$.

<u>Κριτήριο λόγου</u>: Έστω ακολουθία (a_n) τέτοια ώστε $a_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

① Αν $a_n > 0$ και $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \ell > 1$ τότε $a_n \to +\infty$

② Αν $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to \ell < 1$, τότε $a_n \to 0$ (πάλι $a_n > 0$ υποθέτω...)

π.χ. Έστω $a_n = \frac{2^n}{n!}$ $n \in \mathbb{N}$. Τότε θα ισχύει:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \frac{2^{n+1}}{2^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = 2 \cdot \frac{n!}{n!(n+1)} = 2 \cdot \frac{1}{n+1} \to 0 < 1, \text{ άρα } a_n \to 0.$$

*** <u>Αρχιμήδεια ιδιότητα</u>: Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $n \geq a$.

Παρατήρηση: Αν $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$ τότε δεν μπορούμε να αποφανθούμε για το που συγκλίνει η ακολουθία.

π.χ. Αν $a_n = \frac{1}{n}$ τότε $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} \to 1$, αλλά $a_n \to 0$

Αν $\beta_n = \frac{n+1}{n}$ τότε $\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} \to 1$, αλλά $\beta_n \to 1$

Κριτήριο ρίζας: Έστω ακολουθία (a_n) με $a_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

1. Αν $\sqrt[n]{a_n} \to \rho < 1$, τότε $a_n \to 0$.
2. Αν $\sqrt[n]{a_n} \to \rho > 1$, τότε $a_n \to +\infty$.

Παράδειγμα: Έστω $a_n = \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^n$

Με κριτήριο ρίζας: $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{n} - 1 \to 0 < 1$ άρα $a_n \to 0$ (είναι γνωστό ότι $\sqrt[n]{n} \to 1$)

Παρατήρηση: Αν $\sqrt[n]{a_n} \to 1$ δεν μπορούμε να αποφανθούμε για το που συγκλίνει η ακολουθία.

Μονότονες ακολουθίες: Ορισμός = Έστω ακολουθία (a_n), τότε:

(1) Η (a_n) καλείται αύξουσα αν $a_n \leq a_{n+1}$ $\forall n$

(2) Η (a_n) καλείται γνησίως αύξουσα αν $a_n < a_{n+1}$ $\forall n$

(3) Η (a_n) καλείται φθίνουσα αν $a_n \geq a_{n+1}$ $\forall n$

(4) Η (a_n) καλείται γνησίως φθίνουσα αν $a_n > a_{n+1}$ $\forall n$

(5) Η (a_n) καλείται μονότονη αν είναι είτε αύξουσα είτε φθίνουσα

Πρόταση: Κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία είναι συγκλίνουσα.

Απόδειξη = Χωρίς βλάβες γενικότητας, υποθέτουμε ότι η (a_n) είναι αύξουσα και φραγμένη. Θεωρούμε το σύνολο τιμών της ακολουθίας, δηλαδή το σύνολο $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Το A είναι μη κενό και είναι άνω φραγμένο γιατί η ακολουθία είναι φραγμένη. Άρα, το A έχει supremum, έστω $a = \sup A$. Θα δείξουμε ότι $a_n \to a$.

Π.ν.δ.ο. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0(\varepsilon)$ $\forall n \geq n_0$ $|a_n - a| < \varepsilon$

Έστω ένα τυχαίο $\varepsilon > 0$.

Από χαρακτηρισμό του supremum, για το δεδομένο ε έχουμε ότι,

$(a-\varepsilon, a] \cap A \neq \emptyset \iff (a-\varepsilon, a] \cap \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset$, άρα $\exists n_0(\varepsilon)$ τέτοιο ώστε $a_{n_0(\varepsilon)} \in (a-\varepsilon, a]$ δηλαδή $a - \varepsilon < a_{n_0(\varepsilon)} \leq a$.

Έστω $n \geq n_0(\varepsilon)$, τότε $a - \varepsilon < a_{n_0(\varepsilon)} \leq a_n \leq a \implies |a_n - a| < \varepsilon$, άρα $a_n \to a$.

Ο αριθμός e: Πρόταση = Η ακολουθία $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ είναι αύξουσα και φραγμένη, άρα συγκλίνουσα. Ορίζουμε λοιπόν $e := \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Απόδειξη = Βήμα 1: Δείχνω ότι η $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ είναι αύξουσα.

Βήμα 2: Δείχνω ότι η $\beta_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ είναι φθίνουσα.

Βήμα 3: Δείχνω ότι $a_n < \beta_n$ επομένως $a_1 < a_n < \beta_n < \beta_1$

Βήμα 4: Ισχύει ότι $\beta_n = a_n \left(1+\frac{1}{n}\right)$

Από 1 και 3, η a_n είναι αύξουσα και φραγμένη άρα $a_n \to a$

Από 2 και 3, η β_n είναι φθίνουσα και φραγμένη άρα $\beta_n \to \beta$

Επομένως, γενικά ισχύει $a_1, a_2, \ldots, a_n, e, \beta_n, \ldots, \beta_2, \beta_1$

Για το Βήμα 1 = Π.ν.δ.ο. $a_n \leq a_{n+1}$ $\forall n$ δηλαδή $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$

$$\iff \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \leq \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right)$$

$$\iff \frac{n+1}{n+2} \leq \left(\frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n}{n+1}\right)^n \iff 1 - \frac{1}{n+2} \leq \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n$$

Αλλά, $\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n = (1+x)^n$ με $x = -\frac{1}{(n+1)^2}$

Από ανισότητα Bernoulli, $\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \geq 1 - n \cdot \frac{1}{(n+1)^2} = 1 - \frac{n}{(n+1)^2}$

Άρα, α.ν.δ.ο. $\forall n$ $1 - \frac{n}{(n+1)^2} \geq 1 - \frac{1}{(n+2)} \Leftrightarrow \frac{1}{n+2} \geq \frac{n}{(n+1)^2} \Rightarrow (n+1)^2 \geq n(n+2)$ ΙΣΧΥΕΙ

ΣΕΙΡΕΣ

<u>Σειρές:</u> Ορισμός = Έστω (a_k) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $s_n = a_1 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

όπου $s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 + a_2$, $s_3 = a_1 + a_2 + a_3$.

Ο αριθμός s_n καλείται το n-οστό μερικό άθροισμα της (a_k) ενώ η ακολουθία (s_n) καλείται η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της (a_k). Η σειρά με k-οστό όρο τον a_k συμβολίζεται με $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Λέμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει σε έναν πραγματικό αριθμό s αν $s_n \to s$. Αν $s_n \to +\infty$ ή $s_n \to -\infty$ τότε λέμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει στο $+\infty$ ή αντίστοιχα στο $-\infty$.

<u>Πρόταση:</u> Αν $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$ και $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k = t$ τότε $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{N}$ έχουμε $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda \cdot a_k + \mu \cdot \beta_k = \lambda \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \mu \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k$.

<u>Παρατήρηση:</u> Αν απαλείψουμε πεπερασμένο πλήθος όρων μιας σειράς αυτό δεν επηρεάζει τη σύγκλιση ή την απόκλισή της. Το ίδιο συμβαίνει και αν αλλάξουμε πεπερασμένο πλήθος των όρων της.

<u>Πρόταση:</u> (1) Αν $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$, τότε $a_n \to 0$.

(2) Αν $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$, τότε $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall n \geq N$ $\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\right| < \varepsilon$.

<u>Παραδείγματα:</u> (1) Γεωμετρικές σειρές = Έστω $x \in \mathbb{R}$. Η γεωμετρική σειρά με βήμα το x είναι η $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$. Αν $n \in \mathbb{N}$ και $x \neq 0$ τότε $s_n = 1 + x + \ldots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$.

Άρα, (α) Αν $|x| \geq 1$ τότε η $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ αποκλίνει.

(β) Αν $|x| < 1$ τότε η $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ συγκλίνει στο $\frac{1}{1-x}$.

(2) Τηλεσκοπικές σειρές = Αν (β_k) ακολουθία στο $\mathbb{R}$ τότε θέτουμε $a_k = \beta_k - \beta_{k+1}$. Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ καλείται τηλεσκοπική. Τότε η η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει αν και μόνο αν συγκλίνει η (β_k). Μάλιστα αν $\beta_n \to \beta$ τότε $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \beta_1 - \beta$ γιατί το $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n =$

$= (\beta_1-\beta_2)+(\beta_2-\beta_3)+\ldots+(\beta_n-\beta_{n+1}) = \beta_1-\beta_{n+1} \to \beta_1-\beta$

π.χ. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}$, παρατηρούμε ότι $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$

Άρα, αν $\beta_k=\frac{1}{k}$ τότε $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}$ είναι τηλεσκοπική σειρά.

Επειδή $\beta_k=\frac{1}{k}\to 0$ θα ισχύει και ότι $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}=1$.

Θεώρημα (κριτήριο Cauchy): Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ συγκλίνει αν και μόνο αν για οποιοδήποτε $\varepsilon>0$ $\exists N=N(\varepsilon)$ ώστε $\forall n>m\geq N$ $\left|\sum_{k=m}^{n}a_k\right|<\varepsilon$.

Παράδειγμα = Η αρμονική σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ δεν συγκλίνει. Απόδειξη με άτοπο. Έστω ότι η $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ συγκλίνει. Άρα, από το κριτήριο Cauchy, για $\varepsilon=\frac{1}{4}$ σίγουρα υπάρχει N ώστε για κάθε $n>m\geq N$ $\left|\sum_{k=m}^{n}\frac{1}{k}\right|<\frac{1}{4}$. Ειδικότερα για $m=N$ και $n=2N$ έχουμε ότι $\frac{1}{4}>\left|\sum_{k=N}^{2N}\frac{1}{k}\right|=\sum_{k=N}^{2N}\frac{1}{k}=\frac{1}{N}+\frac{1}{N+1}+\ldots+\frac{1}{2N}\geq N\cdot\frac{1}{2N}=\frac{1}{2}$ το οποίο είναι άτοπο, άρα η εν λόγω σειρά ΔΕΝ συγκλίνει.

Σειρές μη αρνητικούς όρους: Θεώρημα = Έστω (a_k) ώστε $a_k>0$ $\forall n\in\mathbb{N}$. Τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ συγκλίνει αν και μόνο αν η ακολουθία (s_n) των μερικών αθροισμάτων της (a_k) είναι φραγμένη. Αν η (s_n) δεν είναι φραγμένη τότε $\sum_{k=1}^{\infty}a_k=+\infty$.

Θεώρημα = Έστω (a_k) φθίνουσα με θετικούς όρους, δηλαδή $a_k>0$ $\forall k\in\mathbb{N}$. Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ συγκλίνει αν και μόνο αν $\sum_{k=1}^{\infty}2^k a_{2^k}$ συγκλίνει.

Παράδειγμα (κατά σύμβαση οι λογάριθμοι είναι με βάση 2) =

$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k(\log k)^p}$ με $p>0$, αν $a_k=\frac{1}{k(\log k)^p}$ τότε η (a_k) είναι φθίνουσα με θετικούς όρους. Άρα, από κριτήριο συμπύκνωσης η $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k(\log k)^p}$ συγκλίνει αν η $\sum_{k=1}^{\infty}2^k\cdot\frac{1}{2^k\cdot(\log 2^k)^p}$ συγκλίνει.

Αλλά, $2^k\frac{1}{2^k(\log 2^k)^p}=\frac{1}{k^p}\cdot\frac{1}{(\log 2)^p}$. Άρα, $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k(\log k)^p}$ συγκλίνει αν και μόνο αν συγκλίνει η $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p}$. Άρα, αρκεί να μελετήσουμε την $\sum_{k=1}^{\infty}=\frac{1}{k^p}$ με $p>0$.

Από κριτήριο συμπύκνωσης έχουμε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p}$ συγκλίνει αν η $\sum_{k=1}^{\infty}2^k\frac{1}{(2^k)^p}$ συγκλίνει. Αλλά ισχύει $\frac{2^k}{2^{kp}}=\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^k$, δηλαδή αν θέσουμε $x=\frac{1}{2^{p-1}}$ έχουμε ότι $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p}$ είναι η $\sum_{k=1}^{\infty}x^k$.

Άρα: (α) Αν $x \geq 1$ δηλαδή αν $p \leq 1$, τότε $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ αποκλίνει άρα και η $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)^p}$ αποκλίνει.

(β) Αν $x < 1$ δηλαδή αν $p > 1$, τότε $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ συγκλίνει στο $\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-\frac{1}{2^{p-1}}}$ άρα και η $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)^p}$ συγκλίνει στο $\frac{1}{(\log 2)^p} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2^{p-1}}}$.

Ειδικότερα = Ενώ η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει, η $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)^2}$ συγκλίνει.

<u>Πρόταση:</u> Έχουμε ότι $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$.

<u>Απόλυτη σύγκλιση:</u> Ορισμός = Έστω (a_n) ακολουθία στο $\mathbb{R}$. Λέμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ συγκλίνει.

Παρατήρηση = Αν (a_k) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει αν και μόνο αν η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως.

<u>Πρόταση:</u> Αν $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

<u>Παραδείγματα:</u> ① Η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$ συγκλίνει γιατί $\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$. Άρα η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$ συγκλίνει απολύτως.

② Η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ συγκλίνει αλλά όχι απολύτως.

Πράγματι, $\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ η οποία δεν συγκλίνει (ως αρμονική σειρά που είναι).

Έστω $m \in \mathbb{N}$. Θεωρώ $s_{2m} = \sum_{k=1}^{2m} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2m-1} - \frac{1}{2m}$

$$= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{(2m-1)\cdot 2m}$$

Επειδή το $m \in \mathbb{N}$ ήταν τυχαίο, $s_{2(m+1)} = s_{2m} + \frac{1}{(2m+1)(2m+2)} > s_{2m}$

Άρα, $(s_{2m})_{m=1}^{\infty}$ είναι αύξουσα και θετική.

Επίσης η $(s_{2m})_{m=1}^{\infty}$ είναι φραγμένη γιατί $s_{2m} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{(2m-1)\cdot 2m} <$

$1 + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{(2m-1)^2} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$

Άρα, $s_{2m} \to s \in \mathbb{R}$. Επίσης, $s_{2m+1} = \underset{\nearrow s}{s_{2m}} + \underset{\nearrow 0}{\frac{1}{2m+1}}$ (για $m \to \infty$)

Άρα και η $s_{2m+1} \to s \in \mathbb{R}$. Οπότε, $s_n \to s$ γιατί:

Παρατήρηση = Αν $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών και $a \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $a_{2n} \to a$ και $a_{2n+1} \to a$ καθώς $n \to \infty \Rightarrow a_n \to a$.

Π.ν.δ.ο. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall n \geq N \ |a_n - a| < \varepsilon$. Έστω λοιπόν ένα τυχαίο $\varepsilon > 0$.

$a_{2n} \to a \Rightarrow \exists\, N_1 = N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall n \geq N_1 \ |a_{2n} - a| < \varepsilon$. (*)

$a_{2n+1} \to a \Rightarrow \exists\, N_2 = N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall n \geq N_2 \ |a_{2n+1} - a| < \varepsilon$. (**)

Άρα, αν $N = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$ τότε $\forall n \geq N \ |a_n - a| < \varepsilon$.

Αν $n \geq N$ και n άρτιος τότε θα προκύπτει από την (*), ενώ αν n περιττός τότε θα προκύπτει από την (**).

<u>Κριτήρια σύγκλισης:</u>

- Κριτήριο σύγκρισης = Έστω $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ και $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ δυο σειρές τέτοιες ώστε $b_k > 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Έστω ότι $\exists\, M > 0$ τέτοιο ώστε $|a_k| \leq M \cdot b_k \ \forall k \in \mathbb{N}$. Αν η $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει, τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως.
- Οριακό κριτήριο σύγκρισης = Έστω $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ με $b_k > 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Αν $\lim_{k \to \infty} \frac{a_k}{b_k} = \ell \in \mathbb{R}$ και η $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει, τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως.
- Ισοδύναμη συμπεριφορά = Έστω $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ με $a_k, b_k > 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι $\lim_{k \to \infty} \frac{a_k}{b_k} = \ell \in \mathbb{R}$. Τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει αν και μόνο αν η $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει.

<u>Παραδείγματα:</u>

① Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k)}{k^2}$ συγκλίνει απολύτως.

Πράγματι, αν $a_k = \frac{\sin(k)}{k^2}$ και $b_k = \frac{1}{k^2}$ έχουμε $|a_k| = \left|\frac{\sin(k)}{k^2}\right| < \frac{1}{k^2} = b_k$.

Αφού $\sum_{k=1}^{\infty} b_k < \infty \underset{\text{σύγκρ.}}{\overset{\text{κρ.}}{\Longrightarrow}}$ η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k)}{k^2}$ συγκλίνει απολύτως.

② Η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^4+k^2+3}$ συγκλίνει.

Πράγματι, αν $a_k = \frac{k+1}{k^4+k^2+3}$ και $b_k = \frac{1}{k^3}$ έχουμε $\frac{a_k}{b_k} = \frac{k^3(k+1)}{k^4+k^2+3} =$

$= \frac{k^4+k^3}{k^4+k^2+3} \xrightarrow[k \to \infty]{} 1$.

Αφού $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} < \infty$ από ορ. κριτ. σύγκρ. έχουμε ότι $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^4+k^2+3}$ συγκλίνει.

③ Η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^2+2}$ αποκλίνει.

Πράγματι, αν $a_k = \frac{k+1}{k^2+2}$ και $b_k = \frac{1}{k}$ τότε $\frac{a_k}{b_k} = \frac{k^2+k}{k^2+2} \to 1 \in \mathbb{R}$.

Αφού η $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει, απο κριτήριο ισοδ. συμπεριφοράς θα αποκλίνει και η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^2+2}$.

Θεώρημα (κριτήριο λόγου του D'Alembert): Έστω $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ μια σειρά με μη μηδενικούς όρους.

① Αν $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$ τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως

② Αν $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1$ τότε η $\sum_{u=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει.

Παρατήρηση: Δεν μπορούμε να αποφανθούμε από το κριτήριο λόγου αν $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = 1$.

Παράδειγμα: Η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$ συγκλίνει γιατί $\frac{\frac{1}{(k+1)!}}{\frac{1}{k!}} = \frac{k!}{(k+1)!} = \frac{k!}{k!(k+1)} = \frac{1}{k+1} \to 0 < 1$.

Το ίδιο γίνεται και για την $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k!}$ γιατί $\frac{(k+1)^2 \cdot k!}{k^2 (k+1)!} = \frac{1}{k+1} \cdot \frac{(k+1)^2}{k^2} \to 0 < 1$.

Θεώρημα (κριτήριο ρίζας του Cauchy): Έστω $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ σειρά πραγματικών αριθμών.

① Αν $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$, τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως.

② Αν $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1$, τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει

Παρατήρηση = Το κριτήριο ρίζας δεν μας δίνει πληροφορία αν $\sqrt[k]{|a_k|} = 1$

Παραδείγματα = ① Εξετάζουμε τη σύγκλιση της σειράς $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ όπου $x \in \mathbb{R}$.

Παρατηρούμε ότι $\sqrt[k]{\left|\frac{x^k}{k}\right|} = \frac{|x|}{\sqrt[k]{k}} \to |x|$

Άρα, από κριτήριο ρίζας: i) αν $|x| < 1$ τότε $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ συγκλίνει απολύτως

ii) αν $|x| > 1$ τότε $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ αποκλίνει

iii) αν $x=1$, τότε $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ είναι η αρμονική σειρά άρα αποκλίνει.

iv) αν $x=-1$, τότε $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = (-1)\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ η οποία συγκλίνει αλλά όχι απολύτως

② Εξετάζουμε τη σύγκλιση της σειράς $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k^2}$ με $x \in \mathbb{R}$

Παρατηρούμε ότι: $\sqrt[k]{\left|\frac{x^{2k}}{k^2}\right|} = \frac{x^2}{(\sqrt[k]{k})^2} \xrightarrow[k\to\infty]{} x^2$

Από κριτήριο ρίζας, i) Αν $|x| > 1$, τότε $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k^2}$ αποκλίνει

ii) Αν $|x| < 1$, τότε $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k^2}$ συγκλίνει απολύτως

iii) Αν $x=1$ ή $x=-1$, τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k^2}$ είναι η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ η οποία συγκλίνει απολύτως.

Θεώρημα (κριτήριο Dirichlet): Έστω (a_n), (β_n) ακολουθίες στο $\mathbb{R}$ τέτοιες ώστε

① $\beta_k > 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$ με (b_k) φθίνουσα και $\beta_k \to 0$.

② Τα μερικά αθροίσματα της a_k είναι φραγμένα.

Τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \beta_k$ συγκλίνει.

Παράδειγμα = Η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ συγκλίνει γιατί αν $a_k = (-1)^k$ και $b_k = \frac{1}{k}$ τότε

1. $b_k > 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$, b_k φθίνουσα, $b_k \to 0$

2. Τα μερικά αθροίσματα της a_k είναι φραγμένα γιατί

$$s_n = a_1 + \dots + a_n = -1+1-1+1-\dots+(-1)^n = \begin{cases} -1, & n \text{ περιττός} \\ 1, & n \text{ άρτιος} \end{cases}$$

Απ ο κριτήριο Dirichlet η σειρά συγκλίνει $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$.