ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

α) Αριθμητικό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα:

Ορισμός: Έστω $\Gamma : \vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \in [\alpha, \beta] \subseteq I$ μια καμπύλη του $\mathbb{R}^3$ με συνεχή παράγωγο $\vec{r}'(t)$ και $f : \Gamma \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Ορίζουμε αριθμητικό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ή επικαμπύλιο ολοκλήρωμα πρώτου είδους, το ορισμένο ολοκλήρωμα.

$$\int_\Gamma f\,ds = \int_\alpha^\beta f(\vec{r}(t))\,\|\vec{r}'(t)\|\,dt$$

$$= \int_\alpha^\beta f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt$$

Παράδειγμα: Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x,y,z) = 3x^2 + 2y - z$ κατά μήκος της καμπύλης

$\Gamma : \vec{r}(t) = (\sqrt{3}\,t, -t, 1)$, $t \in [0, 2]$ είναι

$$\int_\Gamma f\,ds = \int_0^2 (9t^2 - 2t - 1)\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2 + 0}\,dt$$

$$= 2\left[3t^3 - t^2 - t\right]_0^2 = 36$$

Διανυσματικό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

Ορισμός: Έστω $\Gamma : \vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \in [a, \beta]$ μια καμπύλη του $\mathbb{R}^3$ με συνεχή παράγωγο $\vec{r}'(t)$ και $\vec{F} = (P, Q, R) : \Gamma \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ μια συνεχής συνάρτηση. Ορίζουμε διανυσματικό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ή επικαμπύλιο ολοκλήρωμα δεύτερου είδους, το ορισμένο ολοκλήρωμα

$$\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_\Gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_a^\beta \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)\,dt$$

Παράδειγμα: Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της διανυσματικής συνάρτησης $\vec{F}(x,y,z) = (-y, x, 2z)$ κατά μήκος της έλικας

$\Gamma : \vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in [0, \pi]$ είναι

$$\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_\Gamma -y\,dx + x\,dy + 2z\,dz$$

$$= \int_0^\pi (-\sin t, \cos t, 2t) \cdot (-\sin t, \cos t, 1)\,dt$$

$$= \int_0^\pi (\sin^2 t + \cos^2 t + 2t)\,dt$$

$$= \int_0^\pi (1 + 2t)\,dt = \left[t + t^2 \right]_0^\pi = \pi + \pi^2$$