Ασκήσεις στα Ολοκληρώματα

Άσκηση 1

$$\begin{aligned}\int xsin2x\,dx &= \int x\left(-\frac{1}{2}cos2x\right)'\,dx = -\frac{1}{2}\int x\,(cos2x)'\,dx = -\frac{1}{2}\left(xcos2x - \int (x)'cos2x\,dx\right)\\ &= -\frac{1}{2}\left(xcos2x - \int cos2x\,dx\right) = -\frac{1}{2}\left(xcos2x - \int\left(\frac{1}{2}sin2x\right)'\,dx\right)\\ &= -\frac{1}{2}\left(xcos2x - \frac{1}{2}sin2x\right) + c = -\frac{1}{2}xcos2x + \frac{1}{4}sin2x + c\ .\end{aligned}$$

Άσκηση 2

$$\begin{aligned}\int x^2e^{-x}\,dx &= \int x^2\left(-e^{-x}\right)'\,dx = -\int x^2\left(e^{-x}\right)'\,dx = -\left(x^2e^{-x} - \int\left(x^2\right)'e^{-x}\,dx\right)\\ &= -x^2e^{-x} + \int 2xe^{-x}\,dx = -x^2e^{-x} + 2\int xe^{-x}\,dx = -x^2e^{-x} - 2\int x\left(e^{-x}\right)'\,dx\\ &= -x^2e^{-x} - 2\left(xe^{-x} - \int (x)'\,e^{-x}\,dx\right) = -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} + 2\int e^{-x}\,dx\\ &= -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} + 2\int\left(-e^{-x}\right)'\,dx = -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + c\ .\end{aligned}$$

Άσκηση 3

$$\begin{aligned}\int x^2lnx\,dx &= \int\left(\frac{x^3}{3}\right)'lnx\,dx = \frac{x^3}{3}lnx - \int\frac{x^3}{3}(lnx)'\,dx = \frac{x^3}{3}lnx - \frac{1}{3}\int x^3\frac{1}{x}\,dx\\ &= \frac{x^3}{3}lnx - \frac{1}{3}\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}lnx - \frac{1}{3}\int\left(\frac{x^3}{3}\right)'\,dx = \frac{x^3}{3}lnx - \frac{x^3}{9} + c\ .\end{aligned}$$

Άσκηση 4

$$\begin{aligned}I = \int e^xcosx\,dx &= \int (e^x)'\,cosx\,dx = e^xcosx - \int e^x\,(cosx)'\,dx = e^xcosx - \int e^x(-sinx)\,dx\\ &= e^xcosx + \int e^xsinx\,dx = e^xcosx + \int (e^x)'\,sinx\,dx = e^xcosx + e^xsinx - \int e^x\,(sinx)'\,dx\\ &= e^xcosx + e^xsinx - \int e^xcosx\,dx = e^xcosx + e^xsinx - I\end{aligned}$$

Επομένως έχουμε ότι

$$I = \int e^xcosx\,dx = e^xcosx + e^xsinx - I$$

δηλαδή

$$2I = e^xcosx + e^xsinx \implies I = \frac{1}{2}\left(e^xcosx + e^xsinx\right) + c\ .$$

Άσκηση 5

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-cos2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-cos2x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x)'\,dx - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{sin2x}{2}\right)'\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\left[x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4}\left[sin2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-0\right) - \frac{1}{4}\left(sin\pi - sin0\right) = \frac{1}{4}\pi\ .$$

Άσκηση 6

Ένα κινητό κινείται κατακόρυφα από κατάσταση ηρεμίας με επιτάχυνση $4t\ m/s^2$. Πόσο διάστημα θα έχει διανύσει μετά από 6 sec;

Λύση:

Αν $v(t)$ η ταχύτητα και $s(t)$ η μετατόπιση συναρτήσει του χρόνου t έχουμε ότι:

- $v(0) = 0\ ,\quad s(0) = 0\ .$
- $v(t) = \int 4t\,dt = 2t^2\ m/s$ (το c προσδιορίζεται από το $v(0) = 0$).
- $s(t) = \int 2t^2\,dt = \frac{2}{3}t^3\ m$ (το c προσδιορίζεται από το $s(0) = 0$).

Επομένως μετά από 6 sec

$$s(6) = \frac{2}{3}6^3 = 144\,m\ .$$

Άσκηση 7

Ένα κινητό ξεκινάει από κατάσταση ηρεμίας με επιτάχυνση $a(t)$ η οποία δίνεται από

$$a(t) = cos\frac{\pi t}{6}\ m/s^2\ .$$

Να βρεθεί η απόσταση που διανύει το κινητό το 3ο δευτερόλεπτο.

Λύση:

Αφού ξεκινάει από κατάσταση ηρεμίας έχουμε ότι $v(0) = 0$ με

$$v(t) = \int a(t)dt = \int cos\frac{\pi t}{6}dt = \frac{6}{\pi}sin\frac{\pi t}{6}\ m/s\ .$$

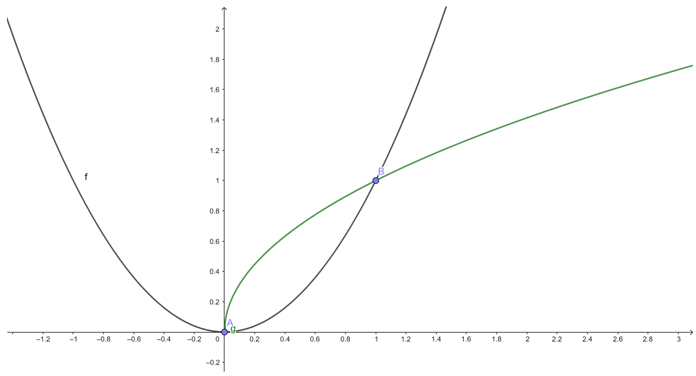
Η απόσταση του κινητού κατά το 3ο δευτερόλεπτο θα είναι

$$d = \int_2^3 v(t)dt = \int_2^3 \frac{6}{\pi}sin\frac{\pi t}{6}dt = \frac{36}{\pi^2}\left[-cos\frac{\pi t}{6}\right]_2^3 = \frac{36}{\pi^2}cos\frac{\pi}{3}\,m\ .$$

Άσκηση 8

Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες $y = x^2$ και $y = \sqrt{x}$.

Λύση:



Για να βρούμε το ζητούμενο χωρίο πρέπει να βρούμε τα 2 σημεία τομής των 2 καμπυλών. Άρα

$$\sqrt{x} = x^2 \Leftrightarrow x = x^3 \Leftrightarrow x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) = 0$$

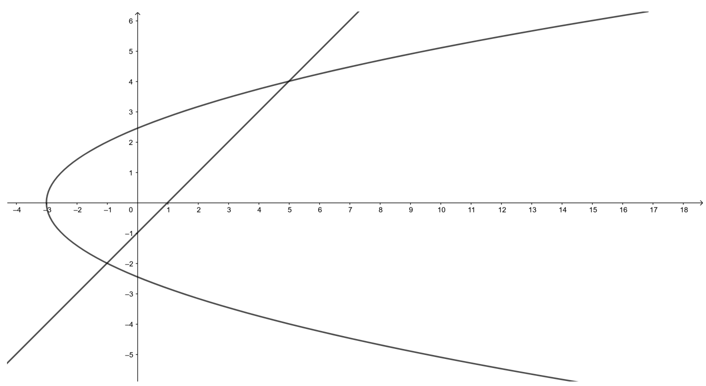
Επομένως τα 2 σημεία τομής θα είναι τα $x = 0$ και $x = 1$ καθώς $x \geqslant 0$ για να ορίζεται η $\sqrt{x}$. Το ζητούμενο εμβαδόν λοιπόν δίνεται από

$$E = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right) dx = \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3} \ .$$

Άσκηση 9

Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες $x = \frac{1}{2}y^2 - 3$ και $y = x - 1$.

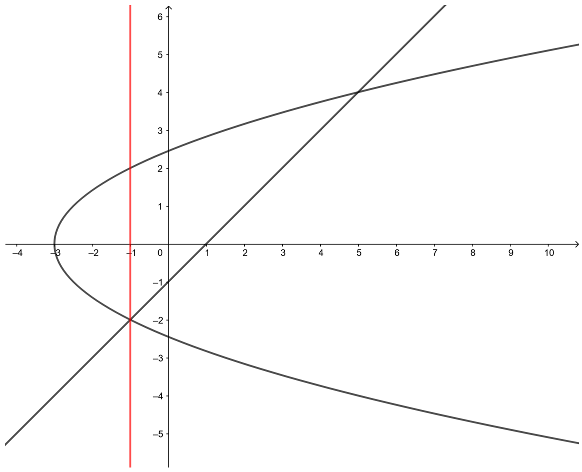
Λύση:



Για να βρούμε το ζητούμενο χωρίο πρέπει να βρούμε τα 2 σημεία τομής των 2 καμπυλών. Άρα

$$y + 1 = \frac{1}{2}y^2 - 3 \Leftrightarrow y^2 - 2y - 8 = 0 \ ,$$

με λύσεις $y = -2$ και $y = 4$ και αντίστοιχα $x = -1$ και $x = 5$.



Από το σχήμα παρατηρούμε ότι από το $x = -3$ εώς το $x = -1$ οι 2 καμπύλες που περικλείουν το χωρίο είναι οι δύο κλάδοι της $x = \dfrac{1}{2}y^2 - 3 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{2x+6}$ Επομένως το ζητούμενο εμβαδόν δίνεται από

$$E = \int_{-3}^{-1} \left(\sqrt{2x+6} - (-\sqrt{2x+6})\right) dx + \int_{-1}^{5} \left(\sqrt{2x+6} - (x-1)\right) dx = \ ...$$

(ο υπολογισμός του Ε αφήνεται ως άσκηση) .

Ασκήσεις προς επίλυση

$$i) \quad \int lnx\, dx \quad , \qquad ii) \quad \int xe^x cosx\, dx \quad , \qquad iii) \quad \int cos^2\left(\frac{x}{2}\right) dx \quad ,$$

$$iv) \quad \int_1^2 \frac{x^2}{\sqrt{x}}\, dx \quad , \qquad v) \quad \int_{-\pi}^{\pi} e^{2x} sin3x\, dx \quad , \qquad vi) \quad \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{x^2} sin\frac{1}{x}\, dx \quad .$$

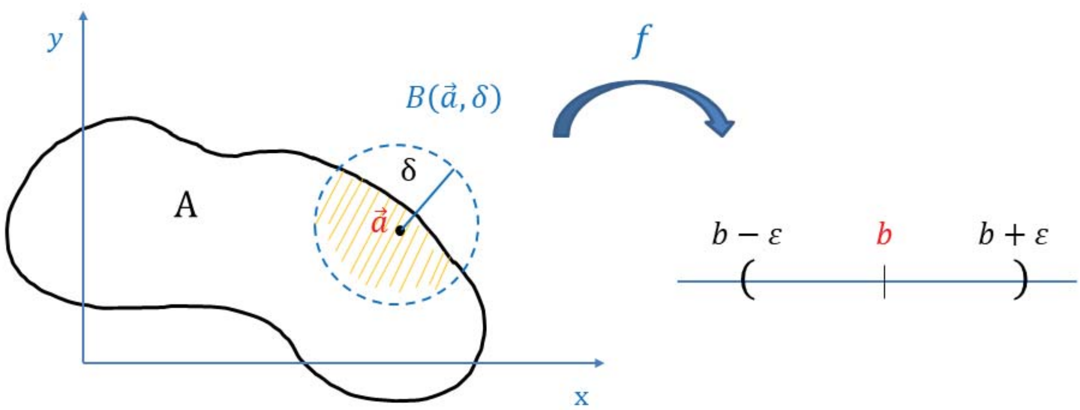
Όρια Πραγματικών Συναρτήσεων Πολλών Μεταβλητών

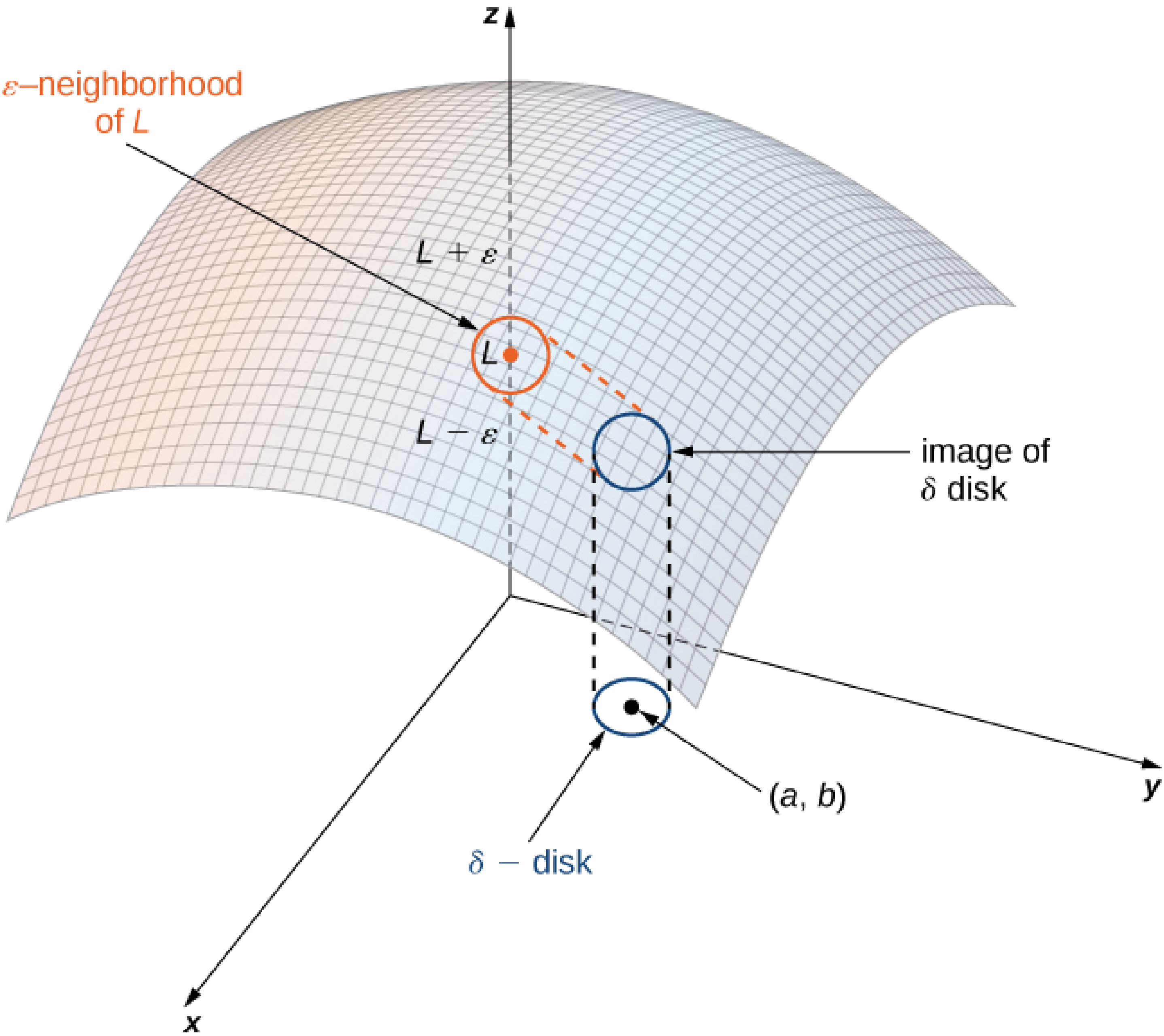
Έστω $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Το $\overrightarrow{\alpha}$ καλείται σημείο συσσώρευσης του A και γράφουμε:

$$\lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{\alpha}} f(\overrightarrow{x}) = b, \quad b \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \ \forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta(\varepsilon) = \delta > 0 \ : \ |f(\overrightarrow{x}) - b| < \varepsilon,$$
$$\text{για κάθε } \overrightarrow{x} \in A \text{ με } 0 < ||\overrightarrow{x} - \overrightarrow{\alpha}|| < \delta.$$

Γεωμετρική Ερμηνεία της Έννοιας του Ορίου Πραγματικής Συνάρτησης




z
ε–neighborhood
of L
$L + \varepsilon$
L
$L - \varepsilon$
image of
δ disk
(a, b)
δ − disk
y
x

Μοναδικότητα του Ορίου

Το όριο όταν υπάρχει, είναι *μοναδικό.*

Αλγεβρικές Ιδιότητες Ορίων

Έστω $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ και το $\overrightarrow{\alpha}$ σημείο συσσώρευσης του A. Επίσης, έστω ότι υπάρχουν και τα όρια:

$$\lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{\alpha}} f(\overrightarrow{x}) \; \kappa\alpha\iota \lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{\alpha}} g(\overrightarrow{x})$$

. Τότε υπάρχουν και τα παρακάτω όρια:

- $$\lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{\alpha}} (f(\overrightarrow{x}) + g(\overrightarrow{x})) = \lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{\alpha}} f(\overrightarrow{x}) + \lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{\alpha}} g(\overrightarrow{x})$$
- $$\lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{\alpha}} \lambda f(\overrightarrow{x}) = \lambda \lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{\alpha}} f(\overrightarrow{x})$$
- $$\lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{\alpha}} (f(\overrightarrow{x}) g(\overrightarrow{x})) = \left(\lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{\alpha}} f(\overrightarrow{x}) \right) \left(\lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{\alpha}} g(\overrightarrow{x}) \right)$$
- $$\lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{\alpha}} \frac{(f(\overrightarrow{x}))}{(g(\overrightarrow{x}))} = \frac{\lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{\alpha}} f(\overrightarrow{x})}{\lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{\alpha}} g(\overrightarrow{x})}, \quad \lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{\alpha}} g(\overrightarrow{x}) \neq 0$$

Άσκηση 1

Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0 \ .$$

Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε πολικές συντεταγμένες, δηλαδή $x = rcos\theta, y = rsin\theta$. Με αντικατάσταση πάνω στο όριο προκύπτει το εξής:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^3cos^2\theta sin\theta}{r^2(cos^2\theta + sin^2\theta)} = \lim_{r\to 0} rcos^2\theta sin\theta = 0 \ ,$$

διότι $r \to 0$ (μηδενική) και $cos^2\theta sin\theta$ φραγμένη, άρα όλη η ποσότητα τείνει στο μηδέν (μηδενική επί φραγμένη είναι μηδενική). Τέλος, αφού το όριο είναι μοναδικό ισχύει το ζητούμενο.

Άσκηση 2

Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x + ysin\frac{1}{x}\right) = 0, \quad x \neq 0$$

Λύση

Έχουμε ότι

$$\left|x + ysin\frac{1}{x}\right| \leq |x| + |y|\left|sin\frac{1}{x}\right| \leq |x| + |y| \to 0$$

καθώς τα x και y τείνουν στο μηδέν. Δηλαδή

$$0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x + ysin\frac{1}{x}\right) \leq 0$$

Επομένως,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x + ysin\frac{1}{x}\right) = 0$$

Αρχή της Μεταφοράς ή Ακολουθιακό Κριτήριο

Έστω $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ και το $\overrightarrow{\alpha}$ σημείο συσσώρευσης του A. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- Υπάρχει το $\lim\limits_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{\alpha}} f(\overrightarrow{x}) = b$
- Για κάθε ακολουθία $(\overrightarrow{x_\nu})$ του A με $\overrightarrow{x_\nu} \neq \overrightarrow{\alpha}$ $\forall \nu \in \mathbb{N}$ και $\overrightarrow{x_\nu} \to \overrightarrow{\alpha}$ έχουμε $f(\overrightarrow{x_\nu}) \to b$

Άσκηση 3

Εξετάστε αν υπάρχει το όριο:

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} x sin\frac{1}{y} \ .$$

Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε την Αρχή της Μεταφοράς. Θέτουμε

$$f(x,y) = x sin\frac{1}{y}, \quad y \neq 0$$

. Θεωρούμε τις ακολουθίες $(\overrightarrow{v_\nu})$ και $(\overrightarrow{w_\nu})$ ως εξής:

$$(\overrightarrow{v_\nu}) = \left(1, \frac{1}{2\nu\pi}\right) \to (1,0)$$

$$(\overrightarrow{w_\nu}) = \left(1, \frac{1}{2\nu\pi + \frac{\pi}{2}}\right) \to (1,0)$$

Θεωρούμε τις αντίστοιχες ακολουθίες των τιμών της συνάρτησης

$$f(\overrightarrow{v_\nu}) = f\left(1, \frac{1}{2\nu\pi}\right) = sin(2\nu\pi) = 0 \to 0$$

$$f(\overrightarrow{w_\nu}) = f\left(1, \frac{1}{2\nu\pi + \frac{\pi}{2}}\right) = sin\left(2\nu\pi + \frac{\pi}{2}\right) = sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \to 1$$

Επομένως από την Αρχή της Μεταφοράς, δεν υπάρχει το όριο.

Κριτήριο Μή - Ύπαρξης του Ορίου

Έστω $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\overrightarrow{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$ σ.σ του A. Τότε αν δύο διαφορετικές καμπύλες (δρόμοι) οδηγούν σε διαφορετικά όρια, λόγω της μοναδικότητας του ορίου συνεπάγεται ότι δεν υπάρχει το όριο.

Άσκηση 4

Εξετάστε αν υπάρχει το όριο:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2 + (x-y)^8}$$

Λύση

Θα ακολουθήσουμε δύο διαφορετικούς δρόμους (καμπύλες)

- $y -$ άξονας (δηλαδή $x = 0$).

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{0}{0 + (0-y)^8} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^8} = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

(Σχόλιο: Η πράξη μέσα στο όριο προηγείται. Μετά βάζουμε το όριο).

- $x = y$.

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+0} = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

Επομένως το όριο της $f(x,y)$ για $(x,y) \to (0,0)$ δεν υπάρχει.

Άσκηση 5

Εξετάστε αν υπάρχει το όριο:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

Λύση

Θα ακολουθήσουμε δύο διαφορετικούς δρόμους (καμπύλες)

- $y -$ άξονας $(x = 0)$

$$\lim_{y\to 0} f(0, y) = \lim_{y\to 0} \frac{-y^2}{y^2} = \lim_{y\to 0} -1 = -1$$

- $x -$ άξονας $(y = 0)$

$$\lim_{x\to 0} f(x, 0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

Επομένως το όριο της $f(x, y)$ για $(x, y) \to (0, 0)$ δεν υπάρχει.

Άσκηση 6

Εξετάστε αν υπάρχει το όριο:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

Λύση

Θα ακολουθήσουμε δύο διαφορετικούς δρόμους (καμπύλες)

- $y -$ άξονας $(x = 0)$

$$\lim_{y\to 0} f(0, y) = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^2} = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

- $x = y$

$$\lim_{x\to 0} f(x, x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Επομένως το όριο της $f(x,y)$ για $(x,y) \to (0,0)$ δεν υπάρχει.

Άσκηση 7

Εξετάστε αν υπάρχει το όριο:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^3+y^3}$$

Λύση

Θα ακολουθήσουμε δύο διαφορετικούς δρόμους (καμπύλες)

- $y-$ άξονας $(x=0)$

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^3} = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

- $x = y^2$

$$\lim_{y\to 0} f(y^2,y) = \lim_{y\to 0} \frac{y^3}{y^6+y^3} = \lim_{y\to 0} \frac{y^3}{y^3(y^3+1)} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{y^3+1} = 1$$

Επομένως το όριο της $f(x,y)$ για $(x,y) \to (0,0)$ δεν υπάρχει.

Συνεχείς Πραγματικές Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών

Έστω $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Η f ονομάζεται συνεχής στο $\overrightarrow{\alpha} \in A$ αν υπάρχει το $\lim\limits_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{\alpha}} f(\overrightarrow{x})$ και είναι ίσο με $f(\overrightarrow{\alpha})$

Παρατήρηση:
1) Η f ειναι συνεχής στο A όταν ειναι συνεχής σε κάθε σημείο του A.
2) Αν η f δεν είναι συνεχής στο $\overrightarrow{\alpha}$ τότε το $\overrightarrow{\alpha}$ ονομάζεται σημείο ασυνέχειας.

Άσκηση 8

Να εξετάσετε αν είναι συνεχής στο (0,0) η συνάρτηση:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\,, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Για να είναι συνεχής η συνάρτηση f στο σημείο (0,0) πρέπει να υπάρχει το όριό της στο σημείο αυτό και να είναι ίσο με $f(0,0)$. Αρχικά λοιπόν θα μελετήσουμε αν υπάρχει το όριο της για $x \to 0,\ y \to 0$ (δηλαδή το όριο του πρώτου κλάδου της όπου $(x,y) \neq (0,0)$). Θα υπολογίσουμε το όριο αυτό:

Α΄ τρόπος (με χρήση πολικών συντεταγμένων):

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^3cos^2\theta sin\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0} rcos^2\theta sin\theta = 0$$

όμοια με την Άσκηση 1.

Β′ τρόπος:

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{x^2|y|}{x^2} = |y| \to 0$$

Επομένως το όριο της f για $(x,y) \to (0,0)$ υπάρχει και είναι ίσο με μηδέν. Επιπλέον, για να είναι συνεχής στο (0,0), πρέπει να δείξουμε ότι

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = f(0,0)$$

το οποίο προφανώς ισχύει εφόσον απο τον τύπο της f στο σημείο (0,0) (δηλαδή τον δεύτερο κλάδο της) έχουμε $f(0,0) = 0$. Επομένως η συνάρτηση f είναι συνεχής στο (0,0).

Άσκηση 9

Να εξετάσετε αν είναι συνεχής στο (0,0) η συνάρτηση:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}\,, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Λύση:

Για να είναι η συνάρτηση $f(x,y)$ συνεχής στο σημείο (0,0) πρέπει να υπάρχει το όριο της για $(x,y) \to (0,0)$ και να είναι ίσο με $f(0,0)$. Από Ασκηση 6, το όριο της συνάρτησης $\frac{xy}{x^2+y^2}$ για $(x,y) \to (0,0)$ δεν υπάρχει, επομένως η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο σημείο (0,0).

Άσκηση 10

Να εξεταστεί ως προς τη συνέχεια στα σημεία $(\alpha, 0)$ η παρακάτω συνάρτηση.

$$f(x,y) = \begin{cases} xsin\dfrac{1}{y}, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

Λύση:

Παρατηρούμε ότι $f(\alpha, 0) = 0 \quad (\forall \alpha)$.

Παίρνουμε τις εξής περιπτώσεις:

Για $\alpha \neq 0$, θεωρούμε τις ακολουθίες:

$$\left(\alpha, \frac{1}{2n\pi}\right) \to (\alpha, 0)$$

$$\left(\alpha, \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}\right) \to (\alpha, 0)$$

Στη συνέχεια παίρνουμε τις f τους και έχουμε:

$$f\left(\alpha, \frac{1}{2n\pi}\right) = \alpha sin(2n\pi) = 0 \to 0$$

$$f\left(\alpha, \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}\right) = \alpha sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = \alpha sin\frac{\pi}{2} = \alpha \to \alpha \neq 0$$

και άρα από την Αρχή της Μεταφοράς δεν υπάρχει το όριο.

Επομένως η f δεν είναι συνεχής στα σημεία $(\alpha, 0)$ για $\alpha \neq 0$ εφόσον δεν υπάρχει καν το όριό της σε αυτά τα σημεία.

Για $\alpha = 0$ έχουμε:

$$\left|\alpha sin\frac{1}{y}\right| \leq |\alpha|\left|sin\frac{1}{y}\right| \leq |\alpha| = 0 \to 0$$

Δηλαδή στο σημείο (0,0) υπάρχει το όριο της f και επιπλέον είναι ίσο με $f(0,0)$ (από τον δεύτερο κλάδο του τύπου της). Επομένως η f είναι συνεχής στο (0,0).

Μερικές Παράγωγοι

Ορισμός: Έστω $f(x,y) : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση δύο μεταβλητών και (a,b) ένα σημείο του A. Θεωρώντας ότι μεταβάλλεται μόνο το x (ένω το y παραμένει σταθερό σε μία τιμή $y = b$) θέτουμε $g(x) = f(x,b)$ η οποία είναι μία συνάρτηση μίας μεταβλητής (του x). Η παράγωγος $g'(a)$ όταν υπάρχει στο $\mathbb{R}$, ονομάζεται **μερική παράγωγος της συνάρτησης f ως προς το x στο σημείο** (a,b) και συμβολίζεται με $f_x(a,b)$. Επομένως, ορίζουμε:

$$f_x(a,b) := g'(a) \ , \ \text{όπου } g(x) = f(x,b) \ ,$$

με τύπο

$$g'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \ ,$$

το οποίο μας δίνει τον παρακάτω τύπο:

$$f_x(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h} \ .$$

Αντίστοιχα, θεωρώντας ότι μεταβάλλεται μόνο το y (και ότι το x παραμένει σταθερό σε μία τιμή $x = a$) ορίζουμε μία συνάρτηση $q(y)$ και θέτουμε $q(y) = f(a,y)$ η οποία είναι μία συνάρτηση μίας μεταβλητής (του y). Επομένως, η παράγωγος $q'(b)$ όταν υπάρχει στο $\mathbb{R}$, ονομάζεται **μερική παράγωγος της συνάρτησης f ως προς το y στο σημείο** (a,b) και συμβολίζεται με $f_y(a,b)$. Έτσι, ορίζουμε:

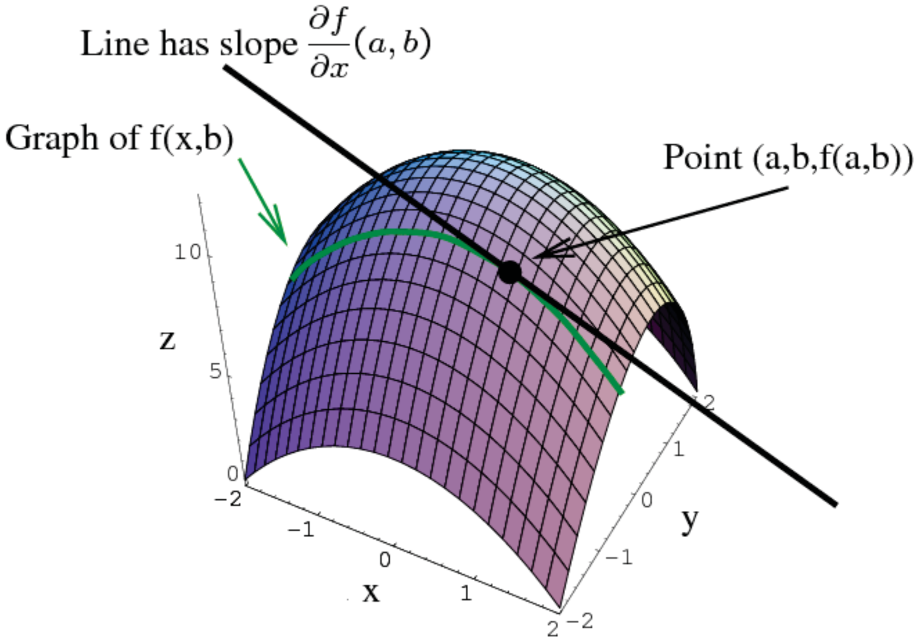
$$f_y(a,b) := q'(b) \ , \ \text{όπου } q(y) = f(a,y) \ ,$$

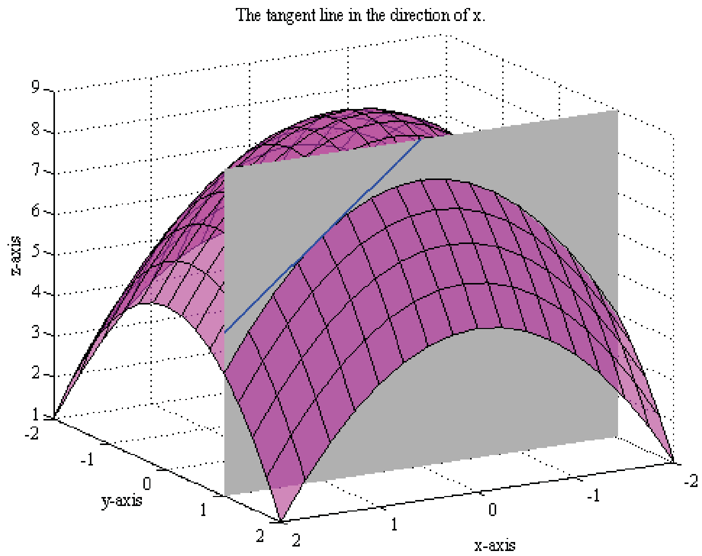
με τύπο

$$q'(b) = \lim_{h \to 0} \frac{q(b+h) - q(b)}{h} \ ,$$

το οποίο μας δίνει τον παρακάτω τύπο:

$$f_y(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a,b+h) - f(a,b)}{h} \ .$$





Στα παραπάνω σχήματα βλέπουμε ότι η μερική παράγωγος $f_x(a,b) \equiv \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ *είναι η κλίση (slope) της εφαπτόμενης της καμπύλης* $f(x,b)$ *στο σημείο* (a,b).

Ορισμός: Έστω $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση δύο μεταβλητών. Τότε οι **μερικές παράγωγοι της f ως προς x και ως προς y** αντίστοιχα είναι οι πραγματικές συναρτήσεις δύο μεταβλητών f_x και f_y αντίστοιχα, με τύπους:

$$f_x(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} \ ,$$
$$f_y(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h} \ .$$

(**Συμβολισμός:** $f_x \equiv \dfrac{\partial f}{\partial x}$ και $f_y \equiv \dfrac{\partial f}{\partial y}$).

Ορισμός : Έστω $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών, όπου $f(\overrightarrow{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Τότε η **μερική παράγωγος της f ως προς τη μεταβλητή** x_i $(1 \le i \le n)$ είναι μία πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών f_{x_i} με τύπο:

$$f_{x_i}(x_1, x_2, ..., x_n) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, ..., x_n) - f(x_1, x_2, ..., x_n)}{h}$$

(υπό την προυπόθεση ότι υπάρχει το παραπάνω όριο στο $\mathbb{R}$).

Το παραπάνω όριο μπορεί να γραφτεί σε διανυσματική μορφή και ώς :

$$f_{x_i}(\overrightarrow{x}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\overrightarrow{x} + h\overrightarrow{e_i}) - f(\overrightarrow{x})}{h} \ ,$$

όπου $\overrightarrow{e_i}$ είναι το διάνυσμα που έχει όλες τις συντεταγμένες ίσες με μηδέν εκτός από την i-οστή συντεταγμένη που είναι ίση με ένα.

(**Συμβολισμός:** $f_{x_i} \equiv \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$).

Θεώρημα 1: Έστω $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ δύο πραγματικές συναρτήσεις n μεταβλητών, για τις οποίες υπάρχουν όλες οι μερικές παράγωγοι $f_{x_i}(\overrightarrow{x})$ και $g_{x_i}(\overrightarrow{x})$ ως προς τη μεταβλητή x_i, για $1 \leq i \leq n$, στο σημείο $\overrightarrow{x}$. Τότε υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι:

$$1)\ (f+g)_{x_i}(\overrightarrow{x}) = f_{x_i}(\overrightarrow{x}) + g_{x_i}(\overrightarrow{x})\ ,$$

$$2)\ (\lambda f)_{x_i}(\overrightarrow{x}) = \lambda f_{x_i}(\overrightarrow{x})\ , \quad \text{για } \lambda \in \mathbb{R}\ ,$$

$$3)\ (fg)_{x_i}(\overrightarrow{x}) = f_{x_i}(\overrightarrow{x})g(\overrightarrow{x}) + f(\overrightarrow{x})g_{x_i}(\overrightarrow{x})\ ,$$

$$4)\ \left(\frac{f}{g}\right)_{x_i}(\overrightarrow{x}) = \frac{f_{x_i}(\overrightarrow{x})g(\overrightarrow{x}) - f(\overrightarrow{x})g_{x_i}(\overrightarrow{x})}{(g(\overrightarrow{x}))^2}\ ,$$

όπου στην τελευταία περίπτωση πρέπει $g(\overrightarrow{y}) \neq 0$ για κάθε $\overrightarrow{y} \in B_\delta(\overrightarrow{x}) \subseteq A$ για κάποιο $\delta > 0$.
(**Συμβολισμός:** $B_\delta(\overrightarrow{x}) \equiv B(\overrightarrow{x}, \delta)$ μπάλα κέντρου $\overrightarrow{x}$ και ακτίνας δ).

Άσκηση 1

Εξετάστε αν υπάρχούν οι μερικές παράγωγοι $f_x(1,0)$ και $f_y(1,0)$ της συνάρτησης

$$f(x,y)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{y}\ ,\ y\neq 0 \\ 0\ ,\ y=0 \end{cases} .$$

Λύση

Θα εξετάσουμε αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h,0)-f(1,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0\ ,$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1,0+h)-f(1,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{1}{h}}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\sin\frac{1}{h}\right)\ ,$$

όπου όμως το $\lim_{h\to 0}\left(\dfrac{1}{h}\sin\dfrac{1}{h}\right)$ δεν υπάρχει

(π.χ. θεωρούμε τις ακολουθίες $h_n=\dfrac{1}{2n\pi}\to 0$ και $h_n=\dfrac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\to 0$ και εφαρμόζουμε την Αρχή Μεταφοράς).

Επομένως από τα παραπάνω και τους ορισμούς των μερικών παραγώγων βλέπουμε ότι υπάρχει η μερική παράγωγος $f_x(1,0)$ αλλά δεν υπάρχει η $f_y(1,0)$.

Άσκηση 2

Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι $f_x(1,2)$ και $f_y(1,2)$ της συνάρτησης

$$f(x,y) = x^4 y + 2e^{-xy} - 2y^2 + 5 \ .$$

Λύση

$$f_x(x,y) = 4x^3 y - 2ye^{-xy} \Rightarrow f_x(1,2) = 8 - 4e^{-2}$$
$$f_y(x,y) = x^4 - 2xe^{-xy} - 4y \Rightarrow f_y(1,2) = 1 - 2e^{-2} - 8$$

Άσκηση 3

Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι της συνάρτησης

$$f(x,y) = sin\left(\frac{3x + x^2}{1-y}\right)$$

Λύση

$$f_x(x,y) = cos\left(\frac{3x + x^2}{1-y}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{3x + x^2}{1-y}\right) = cos\left(\frac{3x + x^2}{1-y}\right)\frac{3+2x}{1-y}$$
$$f_y(x,y) = cos\left(\frac{3x + x^2}{1-y}\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{3x + x^2}{1-y}\right) = cos\left(\frac{3x + x^2}{1-y}\right)\frac{3x+x^2}{(1-y)^2}$$

Παράγωγος συνάρτησης

Ορισμός: Έστω $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών. Η συνάρτηση f ονομάζεται **παραγωγίσιμη στο σημείο** $\overrightarrow{a}$ του A όταν A όταν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $f_{x_1}(\overrightarrow{a})$, $f_{x_2}(\overrightarrow{a})$, ... , $f_{x_n}(\overrightarrow{a})$. Τότε ως ολική παράγωγο της συνάρτησης στο σημείο $\overrightarrow{a}$ ορίζουμε τον $1 \times n$ πίνακα:

$$f'(\overrightarrow{a}) = [\, f_{x_1}(\overrightarrow{a}) \;\; f_{x_2}(\overrightarrow{a}) \;\; ... \;\; f_{x_n}(\overrightarrow{a}) \,] \,.$$

Στην περίπτωση που η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $\overrightarrow{x} \in A$, δηλαδή όταν υπάρχουν όλες οι μερικές παράγωγοι $f_{x_i}(\overrightarrow{x})$ για κάθε $\overrightarrow{x} \in A$ και $1 \leq i \leq n$, τότε η f ονομάζεται **παραγωγίσιμη συνάρτηση (στο A)** και ως **παράγωγος της συνάρτησης** f ορίζεται ο συναρτησιακός $1 \times n$ πίνακας:

$$f' = [\, f_{x_1} \;\; f_{x_2} \;\; ... \;\; f_{x_n} \,] \,.$$

(**Συμβολισμός:** $f' = \dfrac{df}{d\overrightarrow{x}} = Jf$).

Θεώρημα : Έστω $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο σημείο $\overrightarrow{x} \in A$. Τότε οι συναρτήσεις $f + g$, λf για $\lambda \in \mathbb{R}$, fg και f/g είναι παραγωγίσιμες στο σημείο $\overrightarrow{x} \in A$ και ισχύουν οι σχέσεις:

$$1)\ (f+g)'(\overrightarrow{x}) = f'(\overrightarrow{x}) + g'(\overrightarrow{x}) \;,$$

$$2)\ (\lambda f)'(\overrightarrow{x}) = \lambda f'(\overrightarrow{x}) \;,$$

$$3)\ (fg)'(\overrightarrow{x}) = f'(\overrightarrow{x})g(\overrightarrow{x}) + f(\overrightarrow{x})g'(\overrightarrow{x}) \;,$$

$$4)\ \left(\frac{f}{g}\right)'(\overrightarrow{x}) = \frac{f'(\overrightarrow{x})g(\overrightarrow{x}) - f(\overrightarrow{x})g'(\overrightarrow{x})}{\left(g(\overrightarrow{x})\right)^2} \;,$$

όπου στην τελευταία περίπτωση πρέπει $g(\overrightarrow{y}) \neq 0$ για κάθε $\overrightarrow{y} \in B_\delta(\overrightarrow{x}) \subseteq A$ για κάποιο $\delta > 0$.

Παρατήρηση 1: Μία συνάρτηση $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, για $n \geq 2$, που είναι παραγωγίσιμη σε ενα σημείο $\overrightarrow{a} \in A$, δεν είναι αναγκαστικά συνεχής στο $\overrightarrow{a} \in A$.

Κλίση συνάρτησης

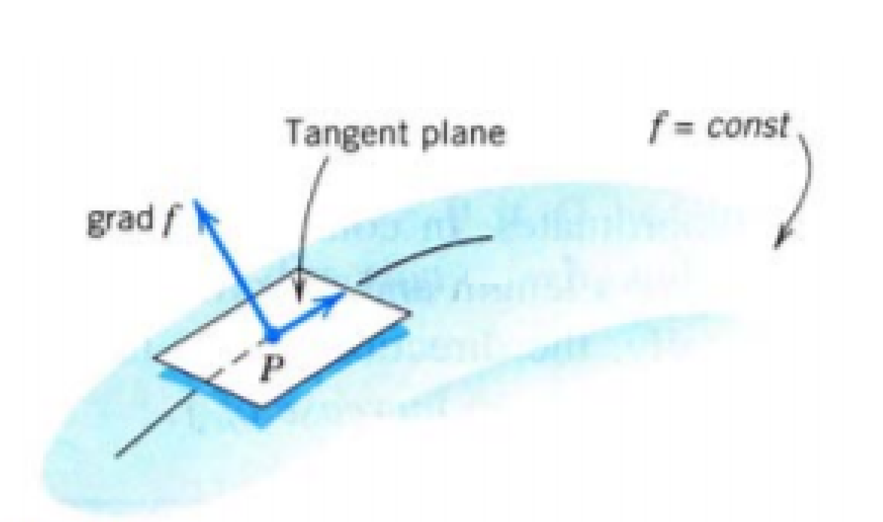
Ορισμός: Έστω $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών που είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο $\overrightarrow{a} \in A$. Τότε ως **κλίση (ή ανάδελτα) της συνάρτησης f στο σημείο $\overrightarrow{a}$** ορίζουμε το διάνυσμα

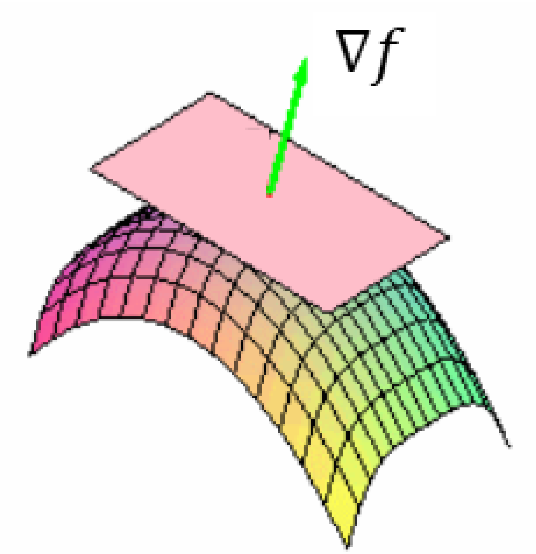
$$\nabla f(\overrightarrow{a}) = (f_{x_1}(\overrightarrow{a}),\, f_{x_2}(\overrightarrow{a}),\, \dots,\, f_{x_n}(\overrightarrow{a}))\ .$$

Αν η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη (στο A) τότε ως **κλίση (ή ανάδελτα) της συνάρτησης** f ορίζεται η διανυσματική συνάρτηση $\nabla f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, με τύπο

$$\nabla f(\overrightarrow{x}) = (f_{x_1}(\overrightarrow{x}),\, f_{x_2}(\overrightarrow{x}),\, \dots,\, f_{x_n}(\overrightarrow{x}))$$

(**Συμβολισμός:** $\nabla f = gradf$).





Γεωμετρική ερμηνεία

Έστω S επιφάνεια που αναπαριστά την $f(x, y, z) = c$ (σταθερά).
Αν το $gradf$ δεν είναι μηδέν τότε είναι το κάθετο διάνυσμα της S στο σημείο P (δηλαδή κάθετο στο εφαπτόμενο επίπεδο της S στο P).

Παρατήρηση 2: Έστω $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση n μεταβλητών στο σημείο $\overrightarrow{x} \in A$. Τότε μεταξύ της παραγώγου $f'(\overrightarrow{x})$ και της κλίσης $\nabla f(\overrightarrow{x})$ ισχύει η σχέση

$$f'(\overrightarrow{x}) = \nabla f(\overrightarrow{x})^\top$$

όπου ο εκθέτης $\top$ συμβολίζει τον ανάστροφο πίνακα.
(**Σχόλιο:** Κάθε διάνυσμα με n συντεταγμένες μπορεί να γραφτεί σαν πίνακας $n \times 1$).

C^1 συνάρτηση

Ορισμός: Έστω $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών. Η f ονομάζεται C^1 **συνάρτηση** (ή αλλιώς συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση) **σε ένα σημείο** $\overrightarrow{a} \in A$, όταν η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε μία περιοχή $B_\delta(\overrightarrow{a}) \subseteq A$ του $\overrightarrow{a}$ και οι μερικές παράγωγοι $f_{x_1}, f_{x_2}, ..., f_{x_n} : B_\delta(\overrightarrow{a}) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς στο σημείο $\overrightarrow{a}$.
Η f ονομάζεται C^1 **συνάρτηση** (ή αλλιώς συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση), όταν είναι παραγωγίσιμη στο A και οι μερικές παράγωγοι $f_{x_1}, f_{x_2}, ..., f_{x_n} : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς.

Μερικές Παράγωγοι Ανώτερης Τάξης

Έστω $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση δύο μεταβλητών που έχει μερικές παραγώγους f_x και f_y. Οι μερικές παράγωγοι f_x και f_y είναι επίσης πραγματικές συναρτήσεις δύο μεταβλητών, επομένως μπορούμε να θεωρήσουμε τις μερικές παραγώγους των f_x και f_y, δηλαδή τις $(f_x)_x$, $(f_x)_y$, $(f_y)_x$, $(f_y)_y$ (σε όποια σημεία υπάρχουν) και οι οποίες ονομάζονται **δεύτερες μερικές παράγωγοι (ή μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης) της συνάρτησης f** .

Συμβολισμός:

$$(f_x)_x = f_{xx} = \frac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$(f_x)_y = f_{xy} = \frac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$(f_y)_x = f_{yx} = \frac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$(f_y)_y = f_{yy} = \frac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Ορισμός: Έστω $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών και $\overrightarrow{a} \in A$. Έστω ότι για κάποιο $\delta > 0$ με $B_\delta(\overrightarrow{a}) \subseteq A$ υπάρχει η πρώτη μερική παράγωγος $f_{x_i}(\overrightarrow{x})$ για κάποιο i με $1 \leq i \leq n$ και για κάθε $\overrightarrow{x} \in B_\delta(\overrightarrow{a})$. Τότε η μερική παράγωγος $f_{x_i x_j}(\overrightarrow{a})$ είναι η **δεύτερη μερική παράγωγος της f ως προς τις μεταβλητές x_i και x_j στο σημείο** $\overrightarrow{a}$ και ορίζεται ως

$$f_{x_i x_j}(\overrightarrow{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\overrightarrow{a}) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) := \lim_{h\to 0} \frac{f_{x_i}(\overrightarrow{a} + h\overrightarrow{e_j}) - f_{x_i}(\overrightarrow{a})}{h}$$

(αν υπάρχει αυτό το όριο).

Αν υπάρχει η μερική παράγωγος $f_{x_i}(\overrightarrow{x})$ για κάθε $\overrightarrow{x} \in A$, τότε η συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο

$$f_{x_i x_j}(\overrightarrow{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\overrightarrow{x}) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(\overrightarrow{x}) := \lim_{h\to 0} \frac{f_{x_i}(\overrightarrow{x} + h\overrightarrow{e_j}) - f_{x_i}(\overrightarrow{x})}{h}$$

ονομαζεται **δεύτερη μερική παράγωγος** (ή μερική παράγωγος δεύτερης τάξης) **της f ως προς τις μεταβλητές x_i και x_j** .

Σχόλιο: Στον συμβολισμό $f_{x_i x_j}$ η σειρά με την οποία γίνονται οι παραγωγίσεις ακολουθούν τους δείκτες από αριστερά προς δεξιά (δηλαδή πρώτα ως x_i και μετά ως x_j), ενώ στον συμβολισμό $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ (ο οποίος είναι ισοδύναμος) η σειρά με την οποία γίνονται οι παραγωγίσεις ακολουθούν τους δείκτες από δεξιά προς αριστερά (δηλαδή πάλι πρώτα ως x_i και μετά ως x_j).

Συμβολισμός: Στην περίπτωση που έχουμε $i = j$ συμβολικά μπορούμε να γράψουμε $f_{x_i^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ αντί για $f_{x_i x_i}(\overrightarrow{x}) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}$.

Σχόλιο: Οι μερικές παράγωγοι μεγαλύτερης τάξης ορίζονται κατά παρόμοιο τρόπο.
π.χ. $f_{xyy} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(f_{xy}\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) = \dfrac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}$

C^2 συνάρτηση

Ορισμός: Έστω $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μιά πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών. Η συνάρτηση f ονομάζεται C^2 **συνάρτηση** (ή δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση) **στο σημείο** $\overrightarrow{a} \in A$, όταν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι f_{x_i} (για όλα τα $1 \leq i \leq n$) σε μία περιοχή $B_\delta(\overrightarrow{a}) \subseteq A$ του σημείου $\overrightarrow{a}$ και οι συναρτήσεις $f_{x_i} : B_\delta(\overrightarrow{a}) \to \mathbb{R}$ είναι C^1 συναρτήσεις στο σημείο $\overrightarrow{a}$, δηλαδή όταν υπάρχουν οι δεύτερες μερικές παράγωγοι $f_{x_i x_j}$ για κάθε $1 \leq i, j \leq n$ σε μία περιοχή $B_\epsilon(\overrightarrow{a}) \subseteq B_\delta(\overrightarrow{a})$ και οι συναρτήσεις $f_{x_i x_j} : B_\epsilon(\overrightarrow{a}) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς στο σημείο $\overrightarrow{a}$.
Η συνάρτηση f ονομάζεται C^2 **συνάρτηση** (ή δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση), όταν η f είναι C^2 σε όλα τα σημεία $\overrightarrow{x} \in A$, δηλαδή όταν υπάρχουν οι δεύτερες μερικές παράγωγοι $f_{x_i x_j}$ στο A για κάθε $1 \leq i, j \leq n$ και είναι συνεχείς συναρτήσεις στο A.

Σχόλιο: Επαγωγικά ορίζονται οι $C^3, C^4, ..., C^\infty$ συναρτήσεις.

Θεώρημα Clairaut: Για μία συνάρτηση $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ η οποία είναι C^2 σε ένα σημείο $\overrightarrow{a} \in A$ ισχύει ότι:

$$f_{x_i x_j}(\overrightarrow{a}) = f_{x_j x_i}(\overrightarrow{a}) \ ,$$

για κάθε $1 \leq i, j \leq n$.

Άσκηση 1

Να βρεθεί η κλίση (ή αλλιώς το ανάδελτα) της συνάρτησης

$$f(x,y) = sin\left(\frac{3x+x^2}{1-y}\right)$$

Λύση

$$f_x(x,y) = cos\left(\frac{3x+x^2}{1-y}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{3x+x^2}{1-y}\right) = cos\left(\frac{3x+x^2}{1-y}\right)\frac{3+2x}{1-y}$$
$$f_y(x,y) = cos\left(\frac{3x+x^2}{1-y}\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{3x+x^2}{1-y}\right) = cos\left(\frac{3x+x^2}{1-y}\right)\frac{3x+x^2}{(1-y)^2}$$

Επομένως η κλίση της συνάρτησης είναι

$$\nabla f(x,y) = \left(cos\left(\frac{3x+x^2}{1-y}\right)\frac{3+2x}{1-y}, \, cos\left(\frac{3x+x^2}{1-y}\right)\frac{3x+x^2}{(1-y)^2}\right)$$

Άσκηση 2

Να υπολογιστεί η παράγωγος της συνάρτησης $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x,y,z) = x^2e^y + ycosz - zy^2$$

Λύση

Αρχικά υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους.

$$f_x(x,y,z) = 2xe^y$$
$$f_y(x,y,z) = x^2e^y + cosz - 2zy$$
$$f_z(x,y,z) = -ysinz - y^2$$

Επομένως η παράγωγος της συνάρτησης f είναι ο 1×3 συναρτησιακός πίνακας

$$f'(x,y,z) = [2xe^y \quad x^2e^y + cosz - 2zy \quad -(ysinz + y^2)].$$

Άσκηση 3
Να δειχθεί ότι η συνάρτηση

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}\ ,\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0\ ,\quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$ αλλά δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$.
Λύση

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0\ ,$$
$$f_y(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0\ .$$

Επομένως υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι f_x και f_y της f στο $(0,0)$, άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $(0,0)$ και η παράγωγος της δίνεται από:

$$f'(0,0)=[f_x(0,0)\ f_y(0,0)]=[0\ 0]$$

Η f όμως δεν είναι συνεχής καθώς δεν υπάρχει το όριο $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ αφού για τις διαδρομές $x=0$ και $x=y$ παίρνουμε

$$\lim_{(0,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{0}{y^2}=0$$
$$\lim_{(x,x)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+x^2}=\frac{1}{2}$$

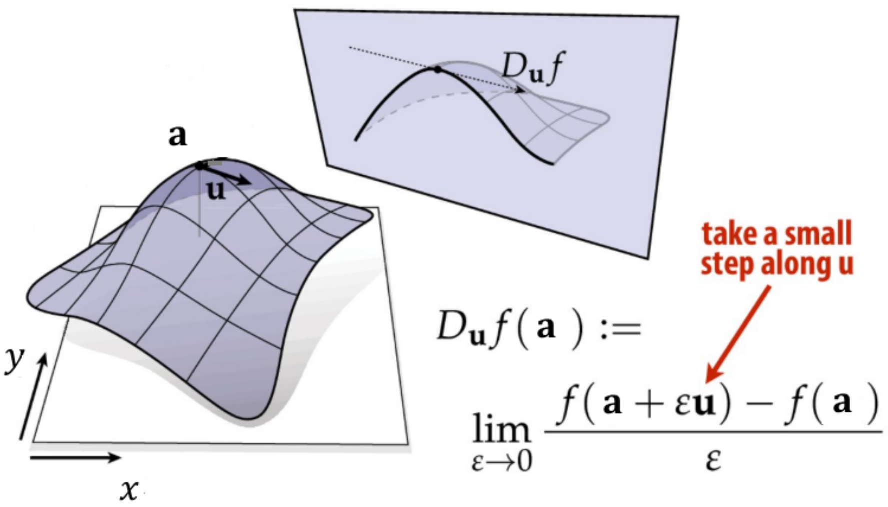
άρα δεν υπάρχει το όριο στο σημείο $(0,0)$ και επομένως η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$.

Κατευθυνόμενη Παράγωγος

Ορισμός 1: Έστω $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση δύο μεταβλητών με A ανοικτό, $\overrightarrow{a} = (a, b) \in A$ και $\overrightarrow{u} = (u, v)$ μία κατεύθυνση του $\mathbb{R}^2$ (δηλαδή $||\overrightarrow{u}|| = 1$). Τότε **κατευθυνόμενη παράγωγος της f στο σημείο $\overrightarrow{a}$ ως προς την κατεύθυνση $\overrightarrow{u}$** είναι ο πραγματικός αριθμός $f_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{a})$ που ορίζεται από τον τύπο:

$$\begin{aligned} f_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{a}) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a + uh, b + vh) - f(a, b)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(\overrightarrow{a} + h\overrightarrow{u}) - f(\overrightarrow{a})}{h} \end{aligned}$$

Συμβολισμός: $f_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{a}) \equiv D_{\overrightarrow{u}} f(\overrightarrow{a})$.



Γεωμετρική ερμηνεία: Η κατευθυνόμενη παράγωγος $f_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{a})$ είναι ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης f στο σημείο $\overrightarrow{a} = (a, b)$ κατά την κατεύθυνση $\overrightarrow{u} = (u, v)$ (συγκεκριμένα κατά μήκος της ευθείας του $\mathbb{R}^2$ η οποία περνάει από το σημείο (a, b) και είναι παράλληλη προς την κατεύθυνση $\overrightarrow{u}$).

Σχόλιο: Η κατευθυνόμενη παράγωγος είναι μία επέκταση (γενίκευση) της μερικής παραγώγου, καθώς η μερική παράγωγος $f_x(a, b)$ της συνάρτησης $f(x, y)$ ως προς τη μεταβλητή x στο σημείο (a, b) είναι η κατευθυνόμενη παράγωγος της συνάρτησης f στο σημείο (a, b) ως προς την κατεύθυνση $(1, 0)$. Αντίστοιχα, η μερική παράγωγος $f_y(a, b)$ της συνάρτησης $f(x, y)$ ως προς τη μεταβλητή y στο σημείο (a, b) είναι η κατευθυνόμενη παράγωγος της συνάρτησης f στο σημείο (a, b) ως προς την κατεύθυνση $(0, 1)$.

Ορισμός 2: Έστω $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών με A ανοικτό, $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, ..., a_n) \in A$ και $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, ...u_n)$ μία κατεύθυνση του $\mathbb{R}^n$ (δηλαδή $||\overrightarrow{u}|| = 1$). Τότε **κατευθυνόμενη παράγωγος της f στο σημείο $\overrightarrow{a}$ ως προς την κατεύθυνση $\overrightarrow{u}$** είναι ο πραγματικός αριθμός $f_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{a})$ που ορίζεται από τον τύπο:

$$\begin{aligned} f_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{a}) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a_1 + u_1 h, a_2 + u_2 h, ..., a_n + u_n h) - f(a_1, a_1, ..., a_n)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(\overrightarrow{a} + h\overrightarrow{u}) - f(\overrightarrow{a})}{h} \end{aligned}$$

Σχόλιο: Η κατευθυνόμενη παράγωγος είναι μία επέκταση (γενίκευση) της μερικής παραγώγου, καθώς η μερική παράγωγος $f_{x_i}(\overrightarrow{a})$ της συνάρτησης f ως προς τη μεταβλητή x_i στο σημείο $\overrightarrow{a}$ είναι η κατευθυνόμενη παράγωγος της συνάρτησης f στο σημείο $\overrightarrow{a}$ ως προς την κατεύθυνση $\overrightarrow{e_i}$ (όπου $\overrightarrow{e_i}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στο $\mathbb{R}^n$ που έχει όλες τις συντεταγμένες μηδέν εκτός από την i-οστή συντεταγμένη που είναι ίση με ένα).

Παρατήρηση 1: Μία συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο $\overrightarrow{a}$, δεν έχει πάντα κατευθυνόμενη παράγωγο $f_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{a})$ στο σημείο $\overrightarrow{a}$ ως προς κάθε κατεύθυνση $\overrightarrow{u}$.

Παρατήρηση 2: Μία συνάρτηση f που έχει κατευθυνόμενη παράγωγο $f_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{a})$ σε ένα σημείο $\overrightarrow{a}$ ως προς κάθε κατεύθυνση $\overrightarrow{u}$, δεν είναι πάντα συνεχής στο σημείο $\overrightarrow{a}$.

Θεώρημα 1: Έστω $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών που είναι διαφορίσιμη στο σημείο $\overrightarrow{a} \in A$. Τότε υπάρχει η κατευθυνόμενη παράγωγος $f_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{a})$ της f στο σημείο $\overrightarrow{a}$ για κάθε κατεύθυνση $\overrightarrow{u}$ και ισχύει ο τύπος:

$$f_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{a}) = \nabla f(\overrightarrow{a}) \cdot \overrightarrow{u}$$

Παρατήρηση 3: Μία συνάρτηση f που έχει κατευθυνόμενη παράγωγο $f_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{a})$ σε ένα σημείο $\overrightarrow{a}$ ως προς κάθε κατεύθυνση $\overrightarrow{u}$, δεν είναι πάντα διαφορίσιμη στο $\overrightarrow{a}$.

Θεώρημα 2: Έστω $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών που είναι διαφορίσιμη στο σημείο $\overrightarrow{a} \in A$ με $\nabla f(\overrightarrow{a}) \neq 0$ και $\overrightarrow{u}$ μία κατεύθυνση του $\mathbb{R}^n$. Τότε η κατευθυνόμενη παράγωγος $f_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{a})$ (ως συνάρτηση του $\overrightarrow{u}$) παίρνει **μέγιστη τιμή** όταν τα διανύσματα $\nabla f(\overrightarrow{a})$ και $\overrightarrow{u}$ είναι παράλληλα και ομόρροπα και **ελάχιστη τιμή** όταν τα διανύσματα $\nabla f(\overrightarrow{a})$ και $\overrightarrow{u}$ είναι παράλληλα και αντίρροπα. Συγκεκριμένα, η κατευθυνόμενη παράγωγος $f_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{a})$ της συνάρτησης f στο σημείο $\overrightarrow{a}$ παίρνει μέγιστη τιμή ίση με $||\nabla f(\overrightarrow{a})||$ στην κατεύθυνση $\overrightarrow{u} = \dfrac{\nabla f(\overrightarrow{a})}{||\nabla f(\overrightarrow{a})||}$ και ελάχιστη τιμή ίση με $-||\nabla f(\overrightarrow{a})||$ στην κατεύθυνση $\overrightarrow{u} = -\dfrac{\nabla f(\overrightarrow{a})}{||\nabla f(\overrightarrow{a})||}$.

Απόδειξη: Από το Θεώρημα έχουμε ότι

$$f_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{a}) = \nabla f(\overrightarrow{a}) \cdot \overrightarrow{u} = ||\nabla f(\overrightarrow{a})|| \, ||\overrightarrow{u}|| cos\theta = ||\nabla f(\overrightarrow{a})|| cos\theta \qquad (1)$$

με θ τη γωνία μεταξύ $\nabla f(\overrightarrow{a})$ και $\overrightarrow{u}$. Αφού λοιπόν ισχύει ότι $-1 \leq cos\theta \leq 1$, καταλήγουμε ότι η $f_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{a})$ παίρνει τη μέγιστη τιμή όταν $cos\theta = 1$ (δηλαδή $\theta = 0$) και την ελάχιστη τιμή όταν $cos\theta = -1$ (δηλαδή $\theta = \pi$). Επομένως, η μέγιστη και ελάχιστη τιμή καθώς και οι κατευθύνσεις για τις οποίες παίρνει αυτές τις τιμές η κατευθυνόμενη παράγωγος δίνονται αντικαθιστώντας τις παραπάνω τιμές της γωνίας θ στη σχέση (1).

Άσκηση 4: Να υπολογιστεί η κατευθυνόμενη παράγωγος της παρακάτω συνάρτησης f στο σημείο (0,0) ως προς την κατεύθυνση $\overrightarrow{u} = (u, v)$, όπου

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{sin(xy)}{y}, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

Λύση: Από τον Ορισμό έχουμε τον τύπο:

$$f_{(u,v)}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+uh, 0+vh) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{sin(uvh^2)}{vh}}{h}$$
$$= \frac{u}{u} \lim_{h\to 0} \frac{sin(uvh^2)}{vh^2} = u \lim_{h\to 0} \frac{sin(uvh^2)}{uvh^2} = u1 = u$$

για $uv \neq 0$.

Μας απομένουν οι περιπτώσεις για $uv = 0$, δηλαδή για $u = 0$ ή $v = 0$ και επειδή έχουμε ορίσει την κατεύθυνση να έχει $||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{u^2 + v^2} = 1$ αυτές οι κατευθύνσεις είναι τελικά οι $\overrightarrow{u} = (0, 1)$ και $\overrightarrow{u} = (1, 0)$. Επομένως,

$$f_{(0,1)}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$f_{(1,0)}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

Άσκηση 5: Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}\,, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

είναι παραγωγίσιμη στο (0,0) αλλά δεν υπάρχει η κατευθυνόμενη παράγωγος $f_{(u,v)}(0,0)$ για καμία κατεύθυνση (u,v) με $uv \neq 0$.

Λύση: Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο (0,0) με παράγωγο $f'(0,0) = [f_x(0,0)\ f_y(0,0)] = [\,0\ 0\,]$.
Όσον αφορά την κατευθυνόμενη παράγωγο, από τον Ορισμό έχουμε ότι

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+uh, 0+vh) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{uvh^2}{(u^2+v^2)h^2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{uv}{h} = \begin{cases} 0 \text{ για } uv = 0 \\ \text{δεν υπάρχει το όριο για } uv \neq 0 \end{cases}$$

(καθώς $\lim_{h\to 0+} \dfrac{uv}{h} = (uv)(+\infty)$ και $\lim_{h\to 0-} \dfrac{uv}{h} = (uv)(-\infty)$).
Επομένως δεν υπάρχει η κατευθυνόμενη παράγωγος $f_{(u,v)}(0,0)$ της f στο (0,0) ως προς την κατεύθυνση (u,v) για $uv \neq 0$.

Άσκηση 6: Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}\,, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

έχει κατευθυνόμενη παράγωγο $f_{(u,v)}(0,0)$ στο (0,0) ως προς κάθε κατεύθυνση $\overrightarrow{u} = (u,v)$ αλλά δεν είναι συνεχής στο (0,0).

Λύση: Από τον Ορισμό έχουμε ότι

$$\begin{aligned} f_{(u,v)}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0+uh,0+vh) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{uv^2h^3}{u^2h^2+v^4h^4}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{uv^2}{u^2+v^4h^2} = \frac{uv^2}{u^2} = \frac{v^2}{u} \text{ για } u \neq 0 \end{aligned}$$

Για την περίπτωση $u=0$, παίρνουμε την κατεύθυνση $(u,v) = (0,1)$ (ώστε $||(u,v)|| = \sqrt{u^2+v^2} = 1$) και έχουμε

$$\begin{aligned} f_{(0,1)}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0+0h,0+1h) - f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{0}{h^4} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0 \end{aligned}$$

Επομένως, η f έχει κατευθυνόμενες παραγώγους στο σημείο (0,0) ως προς όλες τις κατευθύνσεις $\overrightarrow{u} = (u,v)$.
Η συνάρτηση f όμως δεν είναι συνεχής στο (0,0) καθώς δεν υπάρχει καν το όριο $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ αφού για τις διαδρομές $y=0$ και $x=y^2$ παίρνουμε

$$f(x,0) = \frac{0}{x^2} = 0 \to 0 \quad \text{και} \quad f(y^2,y) = \frac{y^4}{y^4+y^4} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}\,.$$

Άσκηση 7: Να υπολογιστεί η κατευθυνόμενη παράγωγος της συνάρτησης $f(x,y,z) = xe^y + zsiny$ στο σημείο $\overrightarrow{a} = (1,0,1)$ ως προς την κατεύθυνση του διανύσματος $\overrightarrow{u} = (1,1,0)$.

Λύση: Η συνάρτηση f είναι διαφορίσιμη **διότι** οι μερικές της παράγωγοι

$$f_x(x,y,z) = e^y \quad , \quad f_y(x,y,z) = xe^y + zcosy \quad , \quad f_z(x,y,z) = siny$$

υπάρχουν και είναι συνεχείς. Η κλίση της f είναι
$\nabla f(x,y,z) = (f_x(x,y,z), f_y(x,y,z) f_z(x,y,z)) = (e^y, xe^y + zcosy, siny)$
η οποία παίρνει στο σημείο $(1,0,1)$ την τιμή $\nabla f(1,0,1) = (1,2,0)$.

Το διάνυσμα $\overrightarrow{u} = (1,1,0)$ δεν είναι μοναδιαίο (δηλαδή $||u|| \neq 1$) επομένως θέλουμε να βρούμε την κατεύθυνσή του ώστε να βρούμε έπειτα την κατευθυνόμενη παράγωγο της f στο σημείο (1,0,1) ως προς την κατεύθυνση του $\overrightarrow{u}$. Επομένως η ζητούμενη κατεύθυνση (δηλαδή το ζητούμενο μοναδιαίο διάνυσμα) είναι η

$$\overrightarrow{w} = \frac{\overrightarrow{u}}{||\overrightarrow{u}||} = \frac{(1,1,0)}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \frac{(1,1,0)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

Επομένως από το Θεώρημα υπάρχει η κατευθυνόμενη παράγωγος της f στο σημείο (1,0,1) ως προς την κατεύθυνση του διανύσματος $\overrightarrow{u} = (1,1,0)$ (δηλαδή ως προς το μοναδιαίο διάνυσμα $\overrightarrow{w} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0))$ και δίνεται από τον τύπο

$$f_{\overrightarrow{w}}(\overrightarrow{a}) = \nabla f(1,0,1) \cdot \overrightarrow{w} = (1,2,0) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = 1\frac{1}{\sqrt{2}} + 2\frac{1}{\sqrt{2}} + 0 = \frac{3}{\sqrt{2}} \ .$$

Άσκηση 8: Έστω $f(x,y,z) = x - y^2 + xz^3$. (i) Να βρεθούν **οι κ** ατευθύνσεις $\overrightarrow{u}$ για τις οποίες παίρνει η κατευθυνόμενη παράγωγος της f στο σημείο $\overrightarrow{a} = (0,0,0)$ μέγιστη και ελάχιστη τιμή. (ii) Αντίστοιχα, να βρεθούν οι κατευθύνσεις $\overrightarrow{u}$ για τις οποίες παίρνει η κατευθυνόμενη παράγωγος της f στο σημείο $\overrightarrow{a} = (2,1,1)$ μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

Λύση: $\nabla f(x,y,z) = (f_x(x,y,z), f_y(x,y,z), f_z(x,y,z)) = (1+z^3,\ -2y,\ 3xz^2)$

(i) Στο σημείο $\overrightarrow{a} = (0,0,0)$ έχουμε $\nabla f(0,0,0) = (1,0,0)$.
Επομένως, από το Θεώρημα 2 έχουμε ότι η κατεύθυνση για την οποία η κατευθυνόμενη παράγωγος $f_{\overrightarrow{u}}(0,0,0)$ παίρνει μέγιστη τιμή είναι η

$$\overrightarrow{u} = \frac{\nabla f(0,0,0)}{||\nabla f(0,0,0)||} = \frac{(1,0,0)}{||(1,0,0)||} = (1,0,0)$$

και η κατεύθυνση για την οποία η κατευθυνόμενη παράγωγος $f_{\overrightarrow{u}}(0,0,0)$ παίρνει ελάχιστη τιμή είναι η

$$\overrightarrow{u} = -\frac{\nabla f(0,0,0)}{||\nabla f(0,0,0)||} = -\frac{(1,0,0)}{||(1,0,0)||} = (-1,0,0).$$

(ii) Στο σημείο $\overrightarrow{a} = (2,1,1)$ έχουμε $\nabla f(2,1,1) = (2,-2,6)$.
Επομένως, από το Θεώρημα 2 έχουμε ότι η κατεύθυνση για την οποία η κατευθυνόμενη παράγωγος $f_{\overrightarrow{u}}(2,1,1)$ παίρνει μέγιστη τιμή είναι η

$$\overrightarrow{u} = \frac{\nabla f(2,1,1)}{||\nabla f(2,1,1)||} = \frac{(2,-2,6)}{||(2,-2,6)||} = (\frac{2}{\sqrt{44}}, \frac{-2}{\sqrt{44}}, \frac{6}{\sqrt{44}})$$

και η κατεύθυνση για την οποία η κατευθυνόμενη παράγωγος $f_{\overrightarrow{u}}(2,1,1)$ παίρνει ελάχιστη τιμή είναι η

$$\overrightarrow{u} = -\frac{\nabla f(2,1,1)}{||\nabla f(2,1,1)||} = -\frac{(2,-2,6)}{||(2,-2,6)||} = (\frac{-2}{\sqrt{44}}, \frac{2}{\sqrt{44}}, \frac{-6}{\sqrt{44}}).$$

Διπλό Ολοκλήρωμα

I. Πάνω σε ορθογώνιο

Έστω

$$f : R = [\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta] \longrightarrow \mathbb{R}$$

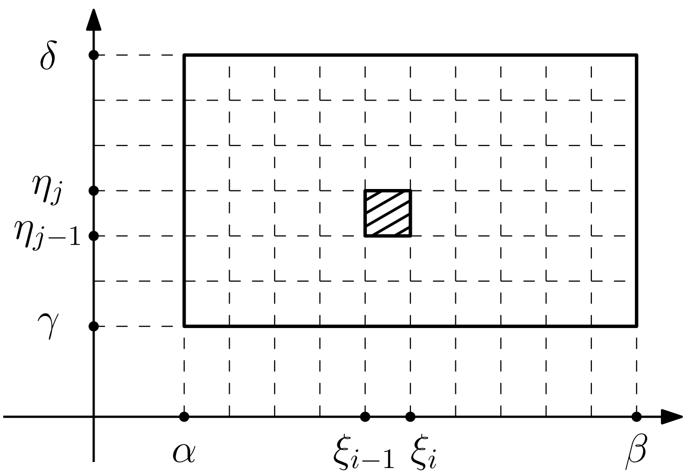
μία φραγμένη συνάρτηση στο ορθογώνιο R. Ορίζουμε μία διαμέριση του ορθογωνίου R, ως εξής:

$$Px = \{\alpha, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}, \beta\}, \quad \text{με } \alpha = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_{n-1} < \xi_n = \beta$$
$$Py = \{\gamma, n_1, n_2, \dots, n_{n-1}, \delta\}, \ \text{με } \gamma = n_0 < n_1 < \dots < n_{n-1} < n_n = \delta$$

διαμερίσεις των διαστημάτων $[\alpha, \beta]$, $[\gamma, \delta]$, αντίστοιχα, δηλαδή

$$[\alpha, \beta] = \bigcup_{i=1}^{n} [\xi_{i-1}, \xi_i], \ [\gamma, \delta] = \bigcup_{j=1}^{m} [n_{j-1}, n_j]$$

Το σύνολο



$$\{R_{ij} : 1 \leq i \leq n, \ 1 \leq j \leq m\},$$

όπου

$$R_{ij} = [\xi_{i-1}, \xi_i] \times [n_{j-1}, n_j]$$

είναι μία διαμέριση του ορθογωνίου R.

Έστω

$$A(R_{ij}) : \text{το εμβαδόν του } R_{ij} = (\xi_{i-1}, \xi_i)(n_{j-1}, n_j)$$

και

$$M_{ij} = \sup_{R_{ij}} f(x,y),\ m_{ij} = \inf_{R_{ij}} f(x,y)$$

Αν P μία τυχούσα διαμέριση του R, ορίζουμε:

$$U(f,P) := \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} M_{ij}A(R_{ij}) \quad : \text{άνω άθροισμα}$$
$$L(f,P) := \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} m_{ij}A(R_{ij}) \quad : \text{κάτω άθροισμα}$$

Επίσης ορίζουμε (αποδεικνύεται ότι υπάρχουν)

$$\int_R^- fd(A) := \inf_P U(f,P) \quad : \text{άνω ολοκλήρωμα της } f \text{στο } R.$$
$$\int_{-R} fd(A) := \sup_P L(f,P) \quad : \text{κάτω ολοκλήρωμα της } f \text{στο } R.$$

Ορισμός
Η f θα λέγεται ολοκληρώσιμη στο ορθογώνιο R, όταν

$$\int_R^- fd(A) = \int_{-R} fd(A)$$

Ο αριθμός $\int_R^- fd(A) = \int_{-R} fd(A)$ λέγεται διπλό ολοκλήρωμα της f στο R και συμβολίζεται

$$\int\int_R fd(A) \text{ ή } \int\int_R f(x,y)dxdy$$

Ιδιότητες του διπλού ολοκληρώματος

Έχει τις ίδιες ιδιότητες με το (απλό) ορισμένο ολοκλήρωμα.
π.χ.

$i.$

$$\int\int_D (\lambda_1 f_1(x,y) + \lambda_2 f_2(x,y))\,dxdy = \\ = \lambda_1 \int\int_D f_1(x,y)dxdy + \lambda_2 \int\int_D f_2(x,y)dxdy$$

$ii.$

$$\left|\int\int_D f(x,y)dxdy\right| \leq \int\int_D |f(x,y)|\,dxdy$$

Αν $D = \cup_{k=1}^{\ell} D_k,\ D_k$: κλ. ορθ., ανά δύο δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία, τότε

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \sum_{k=1}^{\ell} \int\int_{Dk} f(x,y)dxdy$$

Διαδοχικά ολοκληρώματα

Ορίζονται ως

$$\int_\alpha^\beta \int_\gamma^\delta f(x,y)dydx = \int_\alpha^\beta \left[\int_\gamma^\delta f(x,y)dy\right] dx$$
$$\int_\gamma^\delta \int_\alpha^\beta f(x,y)dxdy = \int_\gamma^\delta \left[\int_\alpha^\beta f(x,y)dx\right] dy$$

με την υπόθεση ότι υπάρχουν τα επιμέρους (απλά) ορισμένα ολοκληρώματα.

Θεώρημα 1. *Έστω*

$$f : D = [\alpha,\beta] \times [\gamma,\delta] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ συνεχής}$$

τότε υπάρχουν: $\int\int_D f(x,y)dxdy, \int_\alpha^\beta \int_\gamma^\delta f(x,y)dydx, \int_\gamma^\delta \int_\alpha^\beta f(x,y)dxdy$ *και είναι ίσα.*

II. Σε φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$

Έστω

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

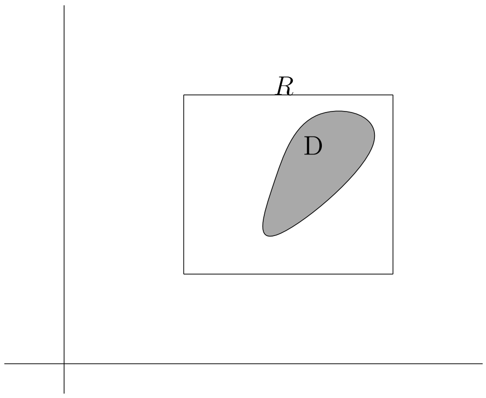
φραγμένη συνάρτηση, ορισμένη στο φραγμένο σύνολο $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Έστω R κλειστό ορθογώνιο του $\mathbb{R}^2$ τέτοιο ώστε $D \subseteq \mathbb{R}$ (το R υπάρχει, αφού D φραγμένο). Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\bar{f} : R \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

όπου

$$\bar{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \in R - D \end{cases}$$

δηλαδή η $\bar{f}$ είναι μία επέκταση της f στο R, προφανώς φραγμένη.



Ορισμός

Η συνάρτηση f λέγεται ολοκληρώσιμη στο D όταν η $\bar{f}$ είναι ολοκληρώσιμη στο R και ορίζουμε

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_R \bar{f}(x,y)dxdy$$

Αποδεικνύεται ότι το ολοκλήρωμα $\int\int_D f(x,y)dxdy$ είναι ανεξάρτητο από το ορθογώνιο R.

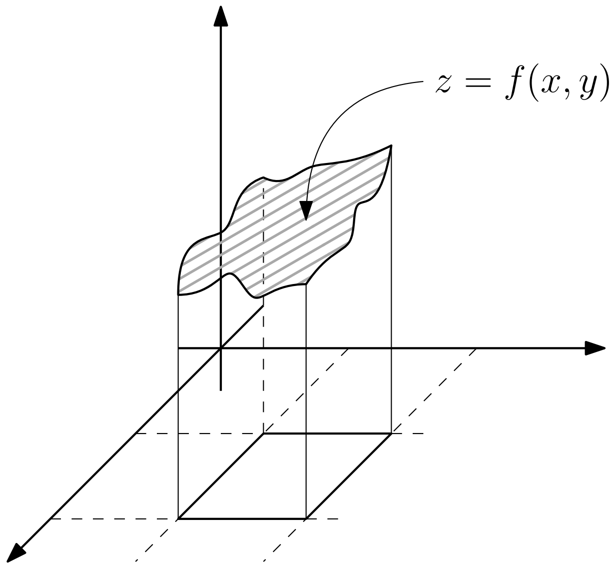
Θεώρημα 2. *Αν η $f : R \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε είναι ολοκληρώσιμη στο R.*

Το διπλό ολοκλήρωμα παριστάνει γεωμετρικά τα εξής:

$$(i) \int\int_R dxdy = \text{εμβαδόν του } R$$

$$(ii) \quad \int\int_R f(x,y)dxdy = \text{όγκος του στερεού } \Sigma(f,\, R), \text{ όπου } \Sigma(f,\, R)$$

είναι το στερεό:



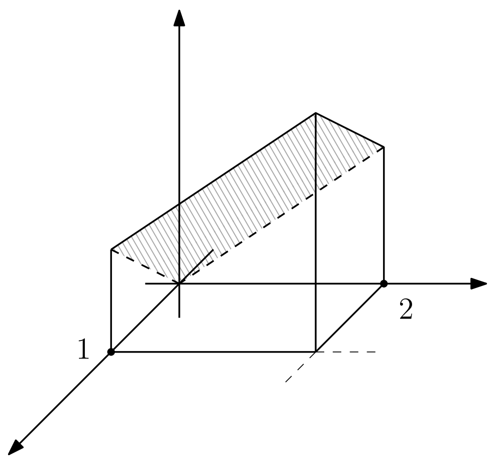
Παραδείγματα

1) $D = [0,1] \times [2,3],\ f(x,y) = x^2y + y\cos(\pi x)$

$$\begin{aligned}
\int\int_D f(x,y)dxdy &= \int_0^1 \int_2^3 \left(x^2y + y^3\cos(\pi x)\right) dy dx = \\
&= \int_0^1 \left[x^2\frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4}\cos(\pi x)\right]_2^3 dx = \\
&= \int_0^1 \left(\frac{5}{2}x^2 + \frac{65}{4}\cos(\pi x)\right) dx = \\
&= \left[\frac{5}{6}x^3 - \frac{65}{4\pi}\cos(\pi x)\right]_0^1 = \\
&= \frac{5}{6}
\end{aligned}$$

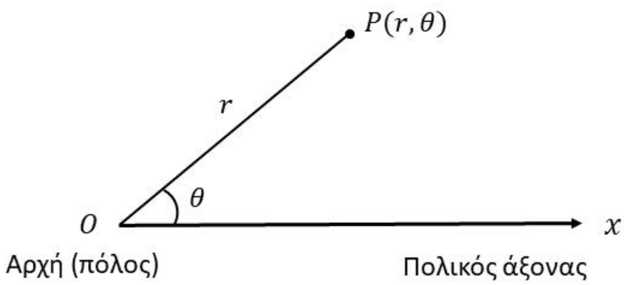
2) Να βρεθεί ο όγκος του στερεού $\Sigma(f,\ R)$, όπου
$D = [0, 1] \times [0, 2],\ f(x, y) = x + y$

$$V = \int\int_D f(x,y)dxdy = \int_0^1 \int_0^2 (x+y)dydx = \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_2^0 dx =$$
$$= \int_0^1 (2x+2)dx = \left[x^2 + 2x\right]_1^0 = 3.$$



Πολικές Συντεταγμένες

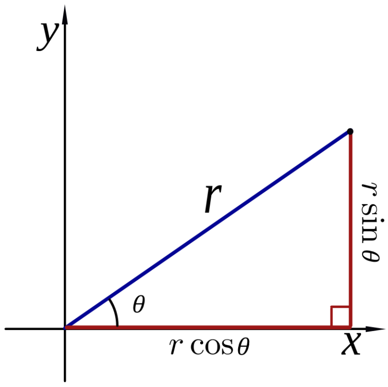
Έστω O ο πόλος. Με αφετηρία το O σχεδιάζουμε τον πολικό άξονα, κατά αντιστοιχία με τον θετικό ημιάξονα x στις Καρτεσιανές συντεταγμένες. Ένα τυχαίο σημείο P του επιπέδου μπορεί να περιγραφεί απο ένα ζεύγος πολικών συντεταγμένων (r, θ), όπου το r δείχνει την κατευθυνόμενη απόσταση του P απο το O και το θ δείχνει την κατευθυνόμενη γωνία του $\overrightarrow{OP}$ με τον πολικό άξονα ($\theta > 0$ όταν διαγράφεται αριστερόστροφα και $\theta < 0$ όταν διαγράφεται δεξιόστροφα).



Συσχετισμός πολικών και καρτεσιανών συντεταγμένων

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad x^2 + y^2 = r^2, \quad \frac{y}{x} = \tan\theta$$

Πολικός Μετασχηματισμός



$$\overrightarrow{T} : \begin{cases} x = r\cos\theta\,, & 0 \le r < \infty\,, \\ y = r\sin\theta\,, & 0 \le \theta \le 2\pi\ . \end{cases}$$

$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$\overrightarrow{T} : G \subseteq \mathbb{R}^2 \to \overrightarrow{T}(G) = D \subseteq \mathbb{R}^2$ (πολικός μετασχημ.)

$$det\left(J\overrightarrow{T}(r,\theta)\right) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} cos\theta & -rsin\theta \\ sin\theta & rcos\theta \end{vmatrix} = r$$

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_G f(rcos\theta, rsin\theta)\,r\,drd\theta$$

και

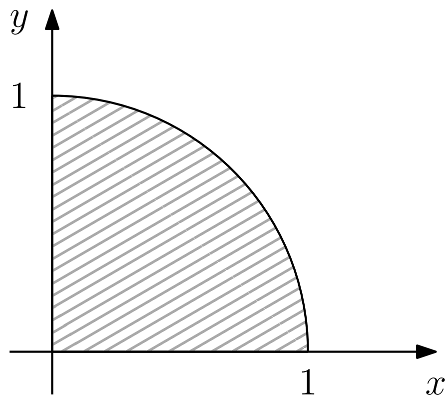
$$A(D) = \iint_D r\,drd\theta$$

Ασκήσεις

1) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $I = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} (x^2+y^2)dxdy$

Λύση

$$D : 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq x \leq \sqrt{1-y^2}$$



Εφαρμόζουμε τον πολικό μετασχηματισμό:

$$\vec{T} : \begin{cases} x = r\cos\theta, & 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ y = r\sin\theta, & 0 \leq r \leq 1. \end{cases}$$

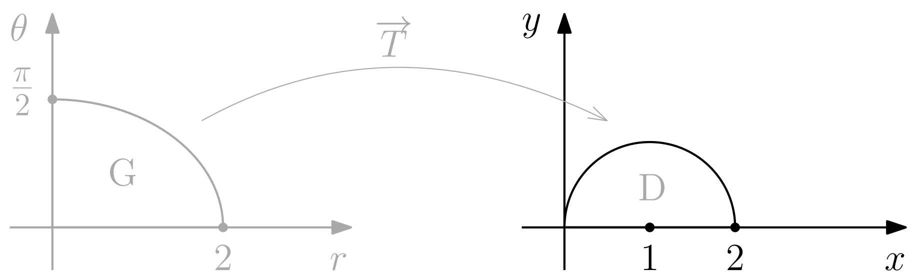
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^2 r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{8}.$$

2) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $I = \int_2^0 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}dydx$

Λύση

$$D : 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq \sqrt{2x-x^2}$$

Αν $y = \sqrt{2x-x^2} \ \Rightarrow\ (x-1)^2 + y^2 = 1$



Εφαρμόζουμε τον πολικό μετασχηματισμό:

$$\vec{T} : \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

Η εξίσωση του ημικυκλίου σε πολικές συντεταγμένες είναι:
$r^2 = 2r\cos\theta$, δηλαδή $r = 2\cos\theta$.
Άρα $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ και $0 \leq r \leq 2\cos\theta$.

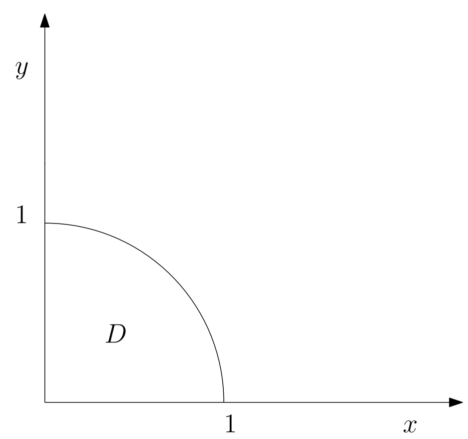
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} rrdrd\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[r^3\right]_0^{2\cos\theta} d\theta = \frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta d\theta =$$
$$= \frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta(1-\sin^2\theta)d\theta = \frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta - \frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta d\sin\theta =$$
$$= \left[\frac{8}{3}\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\frac{8}{3}\frac{\sin^3\theta}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{3} - \frac{8}{9} = \frac{16}{9}.$$

3) Να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα: $\int\int_D \sqrt{1-x^2}dxdy$, όπου $D = \{(x,y) : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2+y^2 \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο και περιέχεται μεταξύ των αξόνων Ox, Oy και της περιφέρειας του κύκλου $x^2+y^2=1$.

Λύση

Παρατηρούμε ότι το D είναι απλό σύνολο, δηλαδή

$$D = \{(x,y) : x \in [0,1] \text{ και } 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\} = \\ = \{(x,y) : y \in [0,1] \text{ και } 0 \leq x \leq \sqrt{1-y^2}\}$$



Έτσι έχουμε:

$$\int\int_D \sqrt{1-x^2}dxdy = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2}dydx = \\ = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-x^2}dxdy$$

Το πρώτο διαδοχικό ολοκλήρωμα υπολογίζεται ευκολότερα ως εξής:

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2}dydx = \int_0^1 \left[\sqrt{1-x^2}y\right]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^1 (1-x^2)dx = \\ = \left[x - \frac{x}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

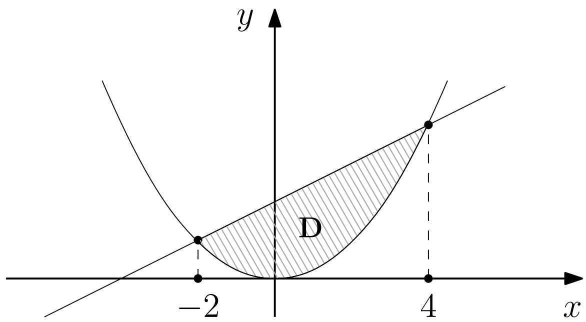
***Σημείωση*:**

Ο υπολογισμός του ολοκληρώματος $\int \sqrt{1-x^2}dx$ μπορεί να γίνει εάν εφαρμόσουμε το μετασχηματισμό: $x = \frac{2t}{t^2+1},\ t \in (-1,1)$ ή $x = \sin t$.

Θεώρημα 3. *Έστω $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο D (x-απλό) ή υπάρχουν πεπερασμένα σημεία ασυνέχειας, τότε υπάρχουν τα: $\int\int_D f(x,y)dxdy$, $\int_\alpha^\beta \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dydx$ και είναι ίσα.*

Εφαρμογή

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int\int_D x\cos y dxdy$, όπου D είναι το υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ που βρίσκεται μεταξύ της παραβολής $y = \frac{x^2}{4}$ και της ευθείας $x - 2y + 4 = 0$.



Το D είναι x - απλό:

$$D = \{(x,y) : x \in [-2,4] \text{ και } \frac{x^2}{4} \leq y \leq \frac{x}{2} + 2\}$$

$$\int\int_D x\cos y dxdy = \int_{-2}^{4}\int_{\frac{x^2}{4}}^{\frac{x}{2}+2} x\cos y dydx = \int_{-2}^{4} [x\sin y]_{\frac{x^2}{4}}^{\frac{x}{2}+2} dx =$$

$$= \int_{-2}^{4}\left[x\sin(\frac{x}{2}+2) - x\sin\frac{x^2}{4}\right] dx$$

Ασκήσεις

1) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $I = \int\int_D \frac{x+y}{x^2+y^2} dxdy$, όπου

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \geq \alpha^2,\ x^2+y^2 \leq \beta^2,\ y \geq 0\}$$

Λύση

Εφαρμόζουμε τον πολικό μετασχηματισμό:

$$\vec{T} : \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

Από

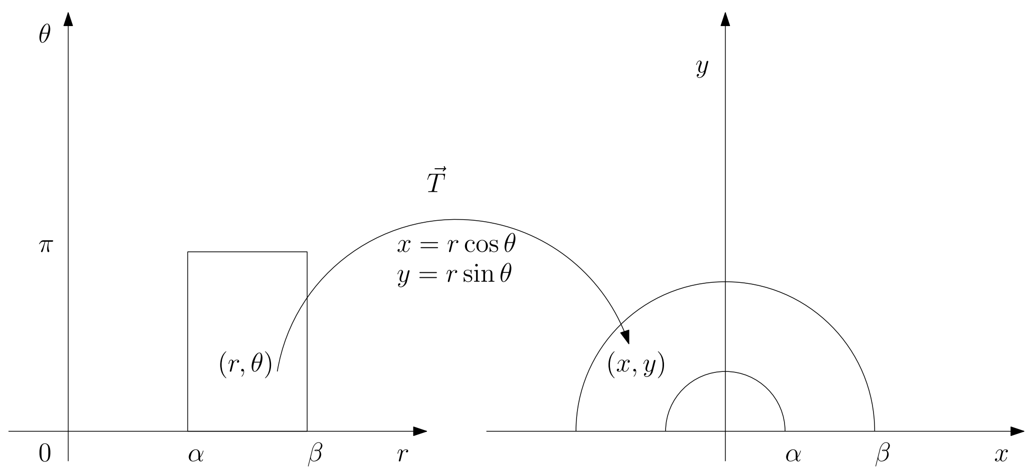
$$x^2+y^2 \geq \alpha^2 \Rightarrow r^2 \geq \alpha^2 \Rightarrow r \geq \alpha$$
$$x^2+y^2 \leq \beta^2 \Rightarrow r^2 \leq \beta^2 \Rightarrow r \leq \beta$$

Άρα

$$\alpha \leq r \leq \beta \ .$$

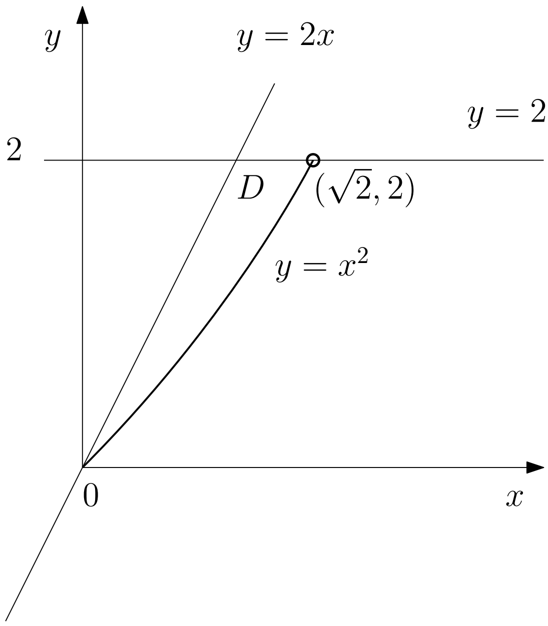
Από

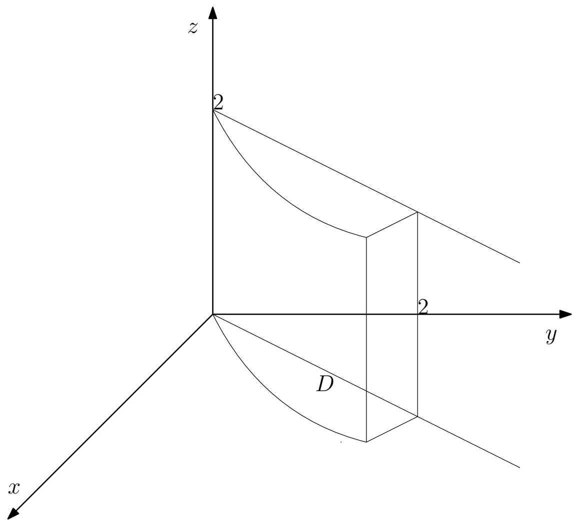
$$y \geq 0 \Rightarrow r\sin\theta \geq 0 \Rightarrow 0 \leq \theta \leq \pi \ .$$



$$\int\int_D \frac{x+y}{x^2+y^2} dxdy = \int_0^\pi \int_\alpha^\beta \frac{r\cos\theta + r\sin\theta}{r^2} r dr d\theta =$$
$$= \int_0^\pi \int_\alpha^\beta (\cos\theta + \sin\theta) dr d\theta = 2(\beta - \alpha)$$

2) Να βρεθεί το εμβαδόν $A(D)$ του συνόλου D που περικλείεται από την παραβολή $y = x^2$ και τις ευθείες $y = 2$, $y = 2x$. Επίσης, να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού $\Sigma(f, D)$ όπου $f(x, y) = 2 - \frac{3x+4y}{6}$.





Το σύνολο D είναι y-απλό:

$$D = \{(x, y) : y \in [0, 2] \text{ και } \frac{y}{2} \leq x \leq \sqrt{y}\}$$

$$A(D) = \int\int_D dxdy = \int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} dxdy = \int_0^2 \left(\sqrt{y} - \frac{y}{2}\right) dy =$$

$$= \left[\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} - \frac{y^2}{4}\right]_0^2 = \frac{4\sqrt{2}}{3} - 1.$$

$$V = \int\int_D \left[2 - \frac{3x+4y}{6}\right] dxdy = \int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} \left(2 - \frac{3x+4y}{6}\right) dxdy =$$
$$= \int_0^2 \left[2x - \frac{x^2}{4} - \frac{2y}{3}x\right]_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} dx =$$
$$= \int_0^2 \left(2\sqrt{y} - \frac{y}{4} - \frac{2y^{\frac{3}{2}}}{3} - y + \frac{y^2}{16} + \frac{y^2}{3}\right) dy = \frac{56\sqrt{2}}{15} - \frac{26}{3}.$$

3) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του συνόλου $D \subseteq \mathbb{R}^2$ που περιβάλλεται από τις καμπύλες με εξισώσεις:

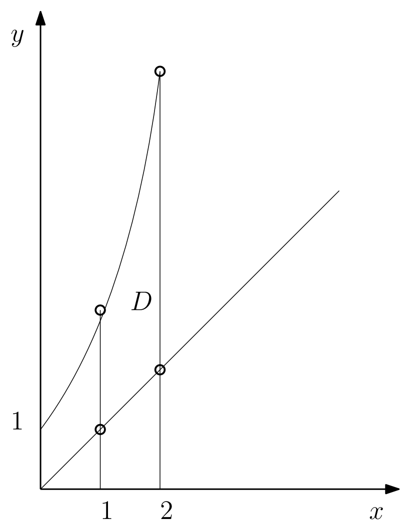
$$y = e^x,\ y = x,\ x = 1,\ x = 2.$$

Επίσης, να υπολογιστεί και ο όγκος του στερεού $\Sigma(f, D)$, όπου $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(x, y) = x + y + 1$.

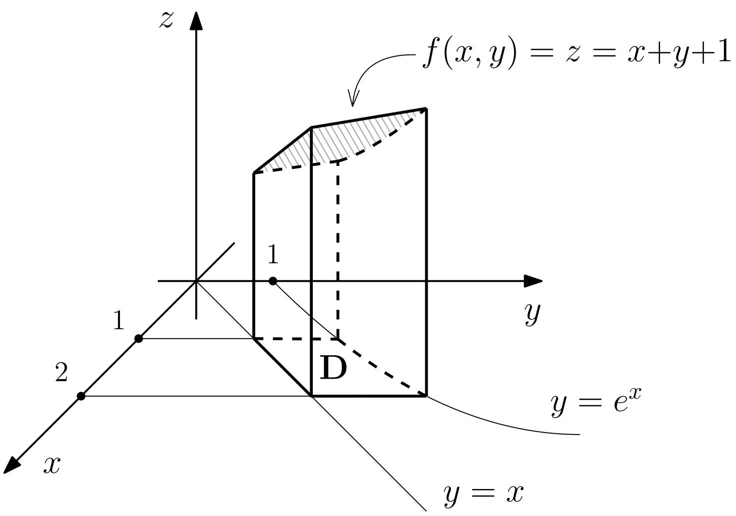
Λύση

Το σύνολο D είναι x-απλό:

$$D = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 2,\ x \leq y \leq e^x\}.$$



$$A(D) = \int\int_D dxdy = \int_1^2 \int_x^{e^x} dydx = \int_1^2 (e^x - x)dx =$$
$$= \left[e^x - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 = e^2 - e - \frac{3}{2}$$

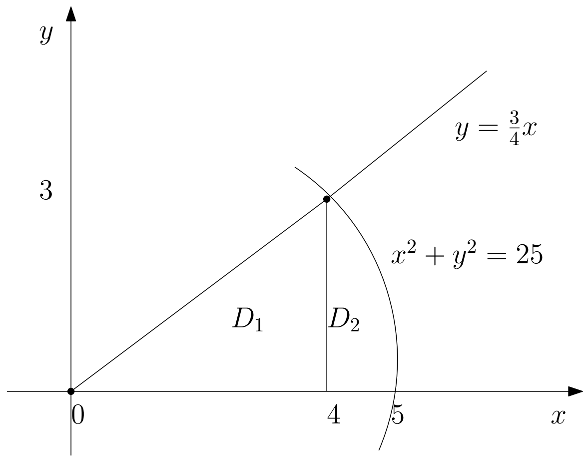


$$V = \int\int_D (x + y + 1)dxdy = \int_1^2 \int_x^{e^x} (x + y + 1)dydx =$$
$$= \int_1^2 \left[xy + \frac{y^2}{2} + y\right]_x^{e^x} dx = \int_1^2 (xe^x + e^x + \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{3}{2}x^2 - x)dx =$$
$$= ... = \frac{e^4 + 7e^2}{4} - e - 5$$

4) Να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα $I = \int\int_D xdxdy$ όπου:

$$D = \{(x,y) : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2+y^2 \leq 25,\ -3x+4y \leq 0\}.$$

Λύση



Το σύνολο D είναι y-απλό:

$$D = \{(x,y) : 0 \leq y \leq 3,\ \frac{4}{3}y \leq x \leq \sqrt{25-y^2}\}.$$

$$\begin{aligned}\int\int_D xdxdy &= \int_0^3 \int_{\frac{4}{3}y}^{\sqrt{25-y^2}} xdxdy = \frac{1}{2}\int_0^3 \left[x^2\right]_{\frac{4}{3}y}^{\sqrt{25-y^2}} dy = \\ &= \frac{1}{2}\int_0^3 (25-y^2-\frac{16}{9}y^2)dy = \frac{1}{2}\left[25y - \frac{25}{9}\frac{y^3}{3}\right]_0^3 = \\ &= \frac{1}{2}(75-25) = 25.\end{aligned}$$

Άλλος τρόπος

Το D είναι και στοιχειώδες σύνολο: $D = D_1 \bigcup D_2$, όπου

$$D_1 = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 4,\ 0 \leq y \leq \frac{3}{4}x\},$$
$$D_2 = \{(x,y) : 4 \leq x \leq 5,\ 0 \leq y \leq \sqrt{25-x^2}\} \text{ και } x-\text{απλό}.$$

Έτσι:

$$\int\int_D xdxdy = \int\int_{D_1} xdxdy + \int\int_{D_2} xdxdy =$$
$$= \int_0^4 \int_0^{\frac{3}{4}x} xdydx + \int_4^5 \int_0^{\sqrt{25-x^2}} xdydx = ... = 16 + 9 = 25.$$

5) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \int\int_D ydxdy$ όπου D είναι η καρδιοειδής $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 2\sqrt{x^2+y^2} - 2x\}$.

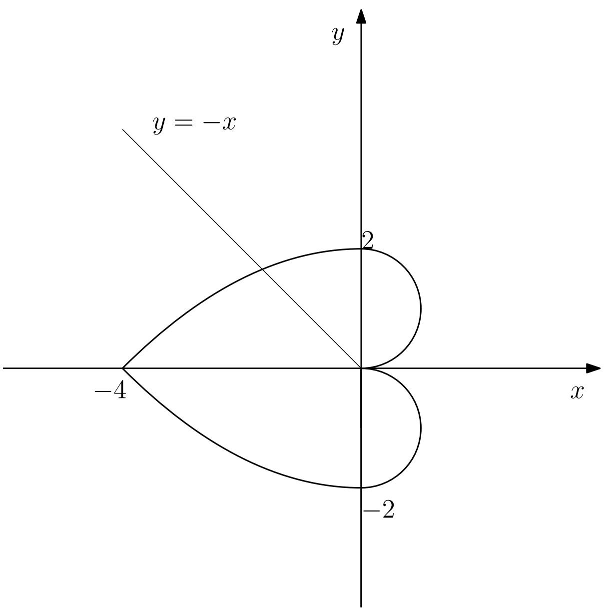
Λύση

Για $y = 0$:

$$x^2 + 2x \pm 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+4) = 0 \\ x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = -4$$

Για $x = 0$:

$$y^2 = \pm 2y \Leftrightarrow \begin{cases} y(y+2) = 0 \\ y(y-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 0 \text{ ή } y = -2 \text{ ή } y = 2$$



Εφαρμόζουμε τον πολικό μετασχηματισμό:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, & 0 \le \theta \le \frac{3}{4}\pi \\ y = r\sin\theta, & 0 \le r \le 2(1-\cos\theta) \end{cases}$$

$$I = \int_0^{\frac{3}{4}\pi} \int_0^{2(1-\cos\theta)} r^2 \sin\theta dr d\theta = \frac{8}{3} \int_0^{\frac{3}{4}\pi} (1-\cos\theta)^3 d(1-\cos\theta) =$$

$$= \frac{8}{3} \left[\frac{(1-\cos\theta)^4}{4} \right]_0^{\frac{3}{4}\pi} = \frac{8}{3*4} \left[\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^4 \right] = \frac{2}{3} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^4$$

Λημνίσκος: $(x^2+y^2)^2 = 2(x^2-y^2)$

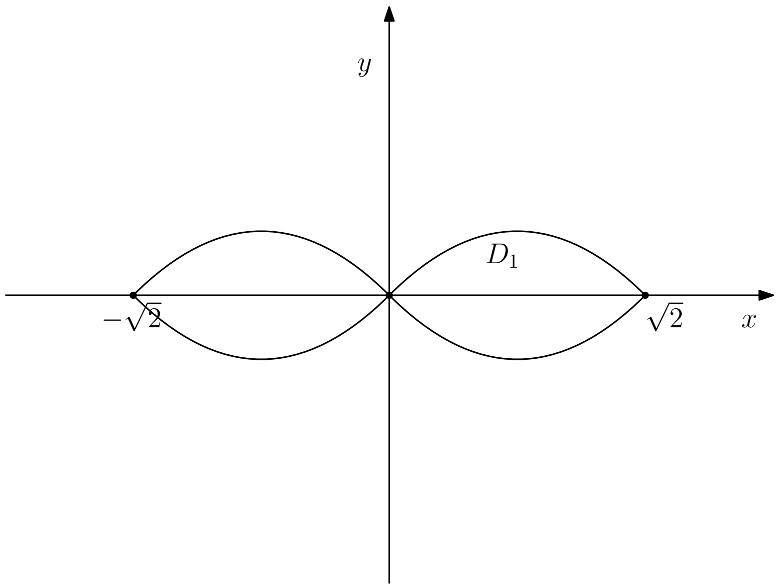
Εφαρμόζουμε τον πολικό μετασχηματισμό:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow$$

$$r^4 = 2r(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \Rightarrow r^2 = 2\cos 2\theta$$

Για $y = 0$:

$$x^4 = 2x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$



$A(D) = 4A(D_1)$

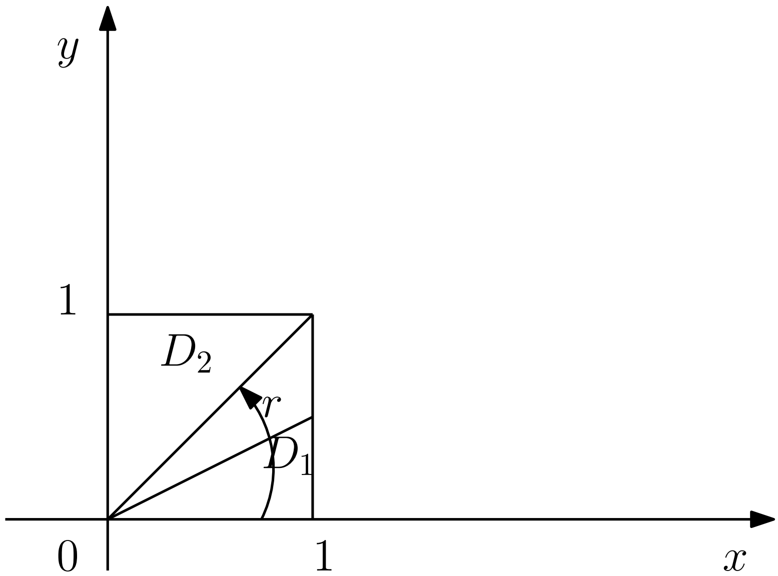
$$A(D_1) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sqrt{2\cos 2\theta}} r dr d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\cos 2\theta d\theta = \frac{1}{2} \left[\sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}.$$

$A(D)$ **= 2**

$$x^2 \geq y^2 \Rightarrow \tan\theta \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$$

6) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $I = \int\int_D (1+x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}} dxdy$ όπου D είναι το τετράγωνο: $D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$.

Λύση



$$D = D_1 \bigcup D_2$$

$$I = I_1 + I_2 = \int\int_{D_1} (1+x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}} dxdy + \int\int_{D_2} (1+x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}} dxdy$$

$$D_1 : \begin{cases} x = r\cos\theta, & 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \\ x = r\sin\theta, & 0 \leq r \leq \frac{1}{\cos\theta} \end{cases} \Rightarrow$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{1}{\cos\theta}} \left(1+r^2\right)^{-\frac{3}{2}} r dr d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{1}{-\frac{1}{2}} \left(1+r^2\right)^{-\frac{1}{2}} \right]_0^{\frac{1}{\cos\theta}} d\theta =$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\left(1 + \frac{1}{\cos^2\theta}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1 \right] d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[1 - \frac{\cos\theta}{\sqrt{2-\sin^2\theta}} d\theta \right] =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\sin\theta}{\sqrt{2-\sin^2\theta}} = \frac{\pi}{4} - \left[\arcsin\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \arcsin\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}} + \arcsin 0 = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}$$

$$I_2 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{1}{\sin\theta}} \left(1+r^2\right)^{-\frac{3}{2}} r dr d\theta = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{-\frac{1}{2}}\left(1+r^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right]_0^{\frac{1}{\sin\theta}} d\theta =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left[1 - \frac{\sin\theta}{(1+\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}}\right] d\theta = \frac{\pi}{4} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\cos\theta}{\sqrt{2-\cos^2\theta}} =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \left[\arcsin\frac{\cos\theta}{\sqrt{2}}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}$$

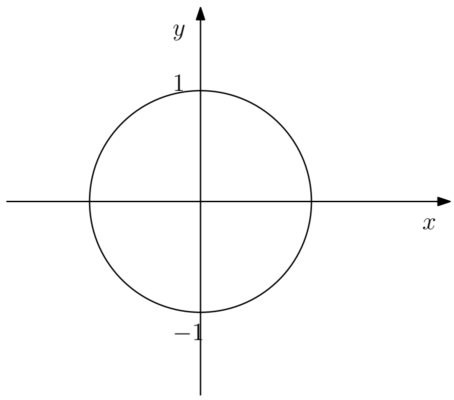
Άρα

$$I = I_1 + I_2 = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{12} \Leftrightarrow I = \frac{\pi}{6}$$

7) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $I = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$

Λύση

Είναι



$$\begin{cases} -1 \leq y \leq 1 \\ -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2} \Rightarrow x^2 \leq 1-y^2 \Rightarrow x^2+y^2 \leq 1 \end{cases}$$

Εφαρμόζουμε τον πολικό μετασχηματισμό:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

Άρα

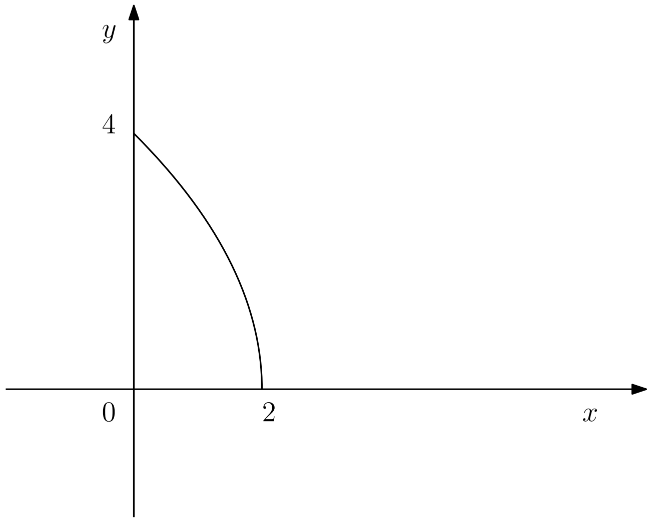
$$x^2+y^2 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq r \leq 1 \text{ και } 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^1 e^{-r^2} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^1 d\theta =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (e^{-1}-1) d\theta = \frac{1-e^{-1}}{2}2\pi = \pi(1-\frac{1}{e})$$

8) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $I = \int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{xe^{2y}}{4-y} dydx$

Λύση



Είναι

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 4 - x^2 \\ y = -x^2 + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq y \leq 4 \\ 0 \leq x \leq \sqrt{4-y} \end{cases}$$

Άρα

$$I = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{4-y}} \frac{e^{2y}}{4-y} x dx dy = \int_0^4 \left[\frac{e^{2y}}{4-y} \frac{x^2}{2} \right]_0^{\sqrt{4-y}} dy =$$
$$= \int_0^4 \frac{e^{2y}(4-y)}{2(4-y)} dy = \frac{1}{4} \left[e^{2y} \right]_0^4 = \frac{1}{4}(e^{8y} - 1)$$

9) Υπολογίστε το εμβαδόν του επιπέδου χωρίου που βρίσκεται στο εσωτερικό του Λημνίσκου: $(x^2+y^2)^2 = \alpha(x^2-y^2)$

Λύση

Εφαρμόζουμε τον πολικό μετασχηματισμό:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow r^4 = \alpha^2 r^2 \cos 2\theta \Rightarrow r^2 = \alpha^2 \cos 2\theta$$

Είναι

$$A(D) = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\alpha\sqrt{\cos 2\theta}} r dr d\theta = 2\alpha^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta d\theta = \alpha^2 \left[\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \alpha^2.$$

10) Να αποδείξετε ότι ισχύει: $\frac{4}{3} \leq \int\int_D e^{xy} dx dy \leq \frac{4}{3}e^2$, όπου

$$D = \{(x,y):\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1+x^2\}.$$

Λύση

Είναι

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1+x^2 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq xy \leq 1+x^2 \Rightarrow e^0 \leq e^{xy} \leq e^{1+x^2} \xrightarrow{x \leq 1}$$

$$\Rightarrow e^0 \leq e^{xy} \leq e^2 \Rightarrow 1 \leq e^{xy} \leq e^2$$

Είναι

$$\int_0^1 \int_0^{1+x^2} e^{xy} dy dx \geq \int_0^1 \int_0^{1+x^2} dy dx = \int_0^1 \int_0^{1+x^2} dy dx = \int_0^1 [y]_0^{1+x^2} dx =$$

$$= \int_0^1 (1+x^2) dx = \left[x + \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{4}{3}$$

Και

$$\int_0^1 \int_0^{1+x^2} e^{xy} dy dx \leq \int_0^1 \int_0^{1+x^2} e^2 dy dx = \int_0^1 e^2 [y]_0^{1+x^2} dx$$

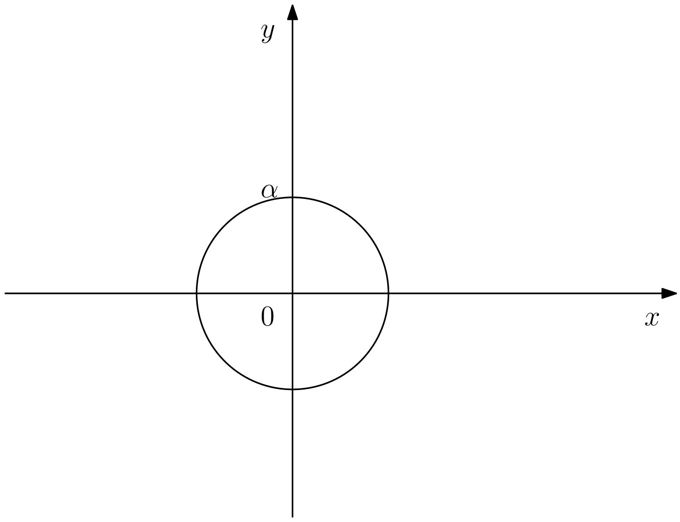
$$= \int_0^1 e^2(1+x^2) dx = e^2 \left[x + \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = e^2 \frac{4}{3}$$

Δηλαδή

$$\frac{4}{3} \leq \int\int_D e^{xy} dxdy \leq \frac{4}{3}e^2$$

11) Να υπολογίσετε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα:

$$I = \int_0^{\alpha} \int_0^{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} \left(\alpha^2 - y^2\right)^{\frac{3}{2}} dydx$$



Υπολογίζεται με αλλαγή τάξης ολοκλήρωσης

Αν $x-$απλό τότε υπολογίζεται δύσκολα.

Αν $y-$απλό τότε:

$$D = \{(x, y) : \ 0 \leq y \leq \alpha, \ 0 \leq x \leq \sqrt{\alpha^2 - y^2}\}.$$

Είναι

$$\begin{aligned} I = \int_0^{\alpha} \int_0^{\sqrt{\alpha^2 - y^2}} \left(\alpha^2 - y^2\right)^{\frac{3}{2}} dxdy &= \int_0^{\alpha} \left[x\left(\alpha^2 - y^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\sqrt{\alpha^2 - y^2}} dy = \\ &= \int_0^{\alpha} \left(\alpha^2 - y^2\right)^2 dy = \\ &= \int_0^{\alpha} (\alpha^4 + y^4 - 2\alpha^2 y^2) dy = \\ &= \left[\alpha^4 y + \frac{y^5}{5} - \frac{2}{3}\alpha^2 y^3\right]_0^{\alpha} = \\ &= \alpha^5 + \frac{\alpha^5}{5} - \frac{2}{3}\alpha^5 = \frac{8\alpha^5}{15}. \end{aligned}$$

Μήκος καμπύλης και Μέση τιμή συνάρτησης κατά μήκος καμπύλης

Ορισμός 1:
Έστω $\Gamma = \Gamma(\overrightarrow{r})$ μία απλή και λεία παραμετρική καμπύλη του $\mathbb{R}^3$ που ορίζεται από την απλή και λεία παραμέτρηση $\overrightarrow{r} : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$. Ως **μήκος** $l(\Gamma)$ **της καμπύλης** Γ ορίζουμε το ολοκλήρωμα:

$$l(\Gamma) := \int_a^b ||\overrightarrow{r}'(t)||\, dt$$

Ορισμός 2:
Έστω $\Gamma = \Gamma(\overrightarrow{r})$ μία απλή και λεία παραμετρική καμπύλη του $\mathbb{R}^3$ που ορίζεται από την απλή και λεία παραμέτρηση $\overrightarrow{r} : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ και έχει μήκος $l(\Gamma) > 0$. Επίσης, έστω $f : \Gamma \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση. Ως **μέση τιμή** $\mu(f, \Gamma)$ **της συνάρτησης** f **κατά μήκος της καμπύλης** Γ ορίζεται (ο πραγματικός αριθμός):

$$\mu(f, \Gamma) := \frac{1}{l(\Gamma)} \int_\Gamma f\, ds$$

Σχόλιο: Το παραπάνω επικαμπύλιο ολοκλήρωμα είναι:
$\int_\Gamma f\, ds = \int_a^b f(\overrightarrow{r}(t))||\overrightarrow{r}'(t)||\, dt,$

όπου $\overrightarrow{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ άρα $f(\overrightarrow{r}(t)) = f(x(t), y(t), z(t))$
και $\overrightarrow{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ με $||\overrightarrow{r}'(t)|| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$.

Άσκηση 1:
Να βρεθεί η μέση τιμή της συνάρτησης $f(x, y, z) = xy + z$ κατά μήκος της παραμετρικής καμπύλης $\Gamma = \Gamma(\overrightarrow{r})$ η οποία ορίζεται από την παραμέτρηση $\overrightarrow{r}(t) = (\, t - sint\, ,\, 2\, ,\, cost\,),\, t \in [0, 2\pi]$.

Λύση:
Το ζητούμενο ολοκλήρωμα δίνεται στον Ορισμό 2. Δηλαδή, θα υπολογίσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_\Gamma f\, ds$, επίσης θα υπολογίσουμε το μήκος της καμπύλης $l(\Gamma)$ και τέλος θα βρούμε τη ζητούμενη μέση τιμή $\mu(f, \Gamma)$ από τον τύπο του Ορισμού 2, δηλαδή διαιρώντας το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα με το μήκος της καμπύλης.

Από $\overrightarrow{r}(t) = (t - sin(t),\, 2,\, cos(t))$ παίρνουμε $\overrightarrow{r}'(t) = (1 - cos(t),\, 0,\, -sin(t))$ και άρα

$$\begin{aligned}||\overrightarrow{r}'(t)|| &= \sqrt{1 - 2cos(t) + cos^2(t) + sin^2(t)} = \sqrt{2 - 2cos(t)} \\ &= \sqrt{2(1 - cos(t))} = \sqrt{4sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} = 2sin\left(\frac{t}{2}\right)\end{aligned}$$

[αφού $sin^2(t) + cos^2(t) = 1$ και $sin^2\left(\frac{t}{2}\right) = \dfrac{1 - cos(t)}{2}$].

Επίσης, $f(\overrightarrow{r}(t)) = x(t)y(t) + z(t) = (t - sin(t))2 + cos(t)$
$= 2t - 2sin(t) + cos(t)$.
Επομένως, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_\Gamma f\, ds$ δίνεται από:

$$\begin{aligned}\int_\Gamma f\, ds &= \int_0^{2\pi} f(\overrightarrow{r}(t))||\overrightarrow{r}'(t)||dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\{2t - 2sin(t) + cos(t)\}\, 2sin\left(\frac{t}{2}\right)\right) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\left\{2t - 4sin\left(\frac{t}{2}\right) cos\left(\frac{t}{2}\right) + 2cos^2\left(\frac{t}{2}\right) - 1\right\} 2sin\left(\frac{t}{2}\right)\right) dt\end{aligned}$$

[αφού $sin(t) = 2sin\left(\frac{t}{2}\right) cos\left(\frac{t}{2}\right)$ και $cos(t) = 2cos^2\left(\frac{t}{2}\right) - 1$]

$$= \int_0^{2\pi} \left(4tsin\left(\frac{t}{2}\right) - 8sin^2\left(\frac{t}{2}\right)cos\left(\frac{t}{2}\right) + 4cos^2\left(\frac{t}{2}\right)sin\left(\frac{t}{2}\right) - 2sin\left(\frac{t}{2}\right)\right)dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(4t\left(\frac{-cos\left(\frac{t}{2}\right)}{\frac{1}{2}}\right)' - 8\left(\frac{sin^3\left(\frac{t}{2}\right)}{3\frac{1}{2}}\right)' + 4\left(\frac{-cos^3\left(\frac{t}{2}\right)}{3\frac{1}{2}}\right)' - 2\left(\frac{-cos\left(\frac{t}{2}\right)}{\frac{1}{2}}\right)'\right)dt$$

$$= \left\{8\left[-tcos\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^{2\pi} - 8\int_0^{2\pi}\left(-cos\left(\frac{t}{2}\right)\right)dt\right\} - \frac{16}{3}\left[sin^3\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^{2\pi}$$

$$- \frac{8}{3}\left[cos^3\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^{2\pi} + 4\left[cos\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^{2\pi}$$

$$= \left\{8(-2\pi cos(\pi) - 0) - 8\left[\frac{-sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\frac{1}{2}}\right]_0^{2\pi}\right\} - \frac{16}{3}\left(sin^3(\pi) - sin^3(0)\right)$$

$$- \frac{8}{3}\left(cos(\pi) - cos(0)\right) + 4\left(cos(\pi) - cos(0)\right)$$

$$= \{8\left((-2\pi)(-1) - 0\right) - 16\{sin(\pi) - sin(0)\} - \frac{16}{3}(0-0) - \frac{8}{3}\left((-1)^3 - (1)^3\right) + 4(-1-1)$$

$$= 16\pi - 16(0) - \frac{16}{3}(0) - \frac{8}{3}(-2) + 4(-2) = 16\pi + \frac{16}{3} - 8 = 8(2\pi - \frac{1}{3})\,.$$

Επίσης, το μήκος $l(\Gamma)$ της καμπύλης Γ (από τον Ορισμό 1) δίνεται από:

$$l(\Gamma) = \int_0^{2\pi} ||\overrightarrow{r}'(t)||\,dt = \int_0^{2\pi} 2sin\left(\frac{t}{2}\right)dt = \int_0^{2\pi} 2\left(\frac{-cos\left(\frac{t}{2}\right)}{\frac{1}{2}}\right)' dt$$

$$= 4\left[-cos\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^{2\pi} = 4(-cos(\pi) + cos(0)) = 8\,.$$

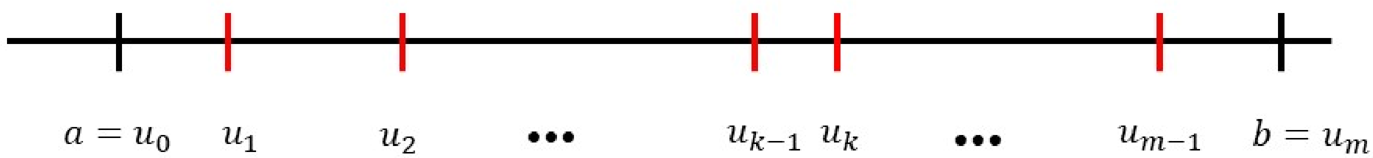
Άρα τελικά η ζητούμενη μέση τιμή είναι ίση με:

$$\mu(f,\Gamma) := \frac{1}{l(\Gamma)}\int_\Gamma f\,ds = \frac{1}{8}8(2\pi - \frac{1}{3}) = 2\pi - \frac{1}{3}\,.$$

Αριθμητικό Επικαμπύλιο Ολοκλήρωμα μίας κατά τμήματα C^1 συνάρτησης

Ορισμός 3:
Έστω $\Gamma = \Gamma(\overrightarrow{r})$ μία κατά τμήματα C^1 παραμετρική καμπύλη του $\mathbb{R}^3$, που ορίζεται από την κατά τμήματα C^1 παραμέτρηση $\overrightarrow{r} : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$. Επίσης, έστω $P = [a = u_0 < u_1 < u_2 < ... < u_m = b]$ μία διαμέριση του $[a,b]$ η οποία προσδιορίζει τα C^1 τόξα $\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_m$ της καμπύλης Γ (δηλαδή $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + ... + \Gamma_m$). Επίσης, έστω $f : \Gamma \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ μία συνεχης συνάρτηση. Τότε ορίζουμε ως **επικαμπύλιο ολοκλήρωμα πρώτου είδους (ή βαθμωτό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ή αριθμητικό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα)** $\int_\Gamma f\, ds$ της συνάρτησης f κατά μήκος της καμπύλης Γ, το άθροισμα των επικαμπυλίων ολοκληρωμάτων της f κατά μήκος των Γ_k για $k = 1, 2, ..., m$, δηλαδή:

$$\int_\Gamma f\, ds := \sum_{k=1}^{m} \int_{\Gamma_k} f\, ds = \sum_{k=1}^{m} \int_{u_{k-1}}^{u_k} f(\overrightarrow{r}(t)) ||\overrightarrow{r}'(t)||\, dt$$



Σχήμα: Διαμέριση $P = [a = u_0 < u_1 < u_2 < ... < u_m = b]$

Άσκηση 2:

Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_\Gamma (x + y^2 + e^z) ds$ κατά μήκος της καμπύλης $\Gamma = \Gamma(\overrightarrow{r})$ η οποία ορίζεται από την παραμέτρηση $\overrightarrow{r}(t) = (\,|t| + t\,,\, |t-1|\,,\, t) : [-1, 3] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$.

Λύση:

Η καμπύλη Γ δεν είναι C^1 στα σημεία $t = 0$ και $t = 1$ (δηλαδή στα σημεία που τα απόλυτα αλλάζουν τιμή). Θεωρώντας λοιπόν τη διαμέριση $P = [-1 < 0 < 1 < 3]$ του $[-1, 3]$ η καμπύλη Γ είναι κατά τμήματα C^1 (ως προς αυτή τη διαμέριση) και ισχύει ότι:

• Στο $[-1, 0]$ διάστημα της διαμέρισης έχουμε: $|t| = -t$ και $|t-1| = 1-t$.
Άρα $\overrightarrow{r}(t) = (\,-t+t\,,\,1-t\,,\,t) = (\,0\,,\,1-t\,,\,t\,)$.
Άρα $\overrightarrow{r}'(t) = (\,0\,,\,-1\,,\,1\,) \Rightarrow ||\overrightarrow{r}'(t)|| = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

• Στο $[0, 1]$ διάστημα της διαμέρισης έχουμε: $|t| = t$ και $|t-1| = 1-t$.
Άρα $\overrightarrow{r}(t) = (\,2t\,,\,1-t\,,\,t)$.
Άρα $\overrightarrow{r}'(t) = (\,2\,,\,-1\,,\,1\,) \Rightarrow ||\overrightarrow{r}'(t)|| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$.

• Στο $[1, 3]$ διάστημα της διαμέρισης έχουμε: $|t| = t$ και $|t-1| = t-1$.
Άρα $\overrightarrow{r}(t) = (\,2t\,,\,t-1\,,\,t)$.
Άρα $\overrightarrow{r}'(t) = (\,2\,,\,1\,,\,1\,) \Rightarrow ||\overrightarrow{r}'(t)|| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}$.

Επομένως, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_\Gamma f\, ds$ της συνάρτησης $f(x, y, z) = x + y^2 + e^z$ κατά μήκος της καμπύλης $\Gamma = \Gamma(\overrightarrow{r})$ δίνεται από τον Ορισμό 3 ως το άθροισμα:

$$\int_\Gamma f\, ds = \int_{-1}^{0} f(\overrightarrow{r}(t))||\overrightarrow{r}'(t)||\, dt + \int_{0}^{1} f(\overrightarrow{r}(t))||\overrightarrow{r}'(t)||\, dt + \int_{1}^{3} f(\overrightarrow{r}(t))||\overrightarrow{r}'(t)||\, dt$$

$$= \int_{-1}^{0} (0 + (1-t)^2 + e^t)\sqrt{2}\, dt + \int_{0}^{1} (2t + (1-t)^2 + e^t)\sqrt{6}\, dt + \int_{1}^{3} (2t + (t-1)^2 + e^t)\sqrt{6}\, dt$$

$$= \sqrt{2}\int_{-1}^{0} (1 - 2t + t^2 + e^t) dt + \sqrt{6}\int_{0}^{1} (1 + t^2 + e^t) dt + \sqrt{6}\int_{1}^{3} (1 + t^2 + e^t) dt$$

$$= \sqrt{2}\int_{-1}^{0} (1 - 2t + t^2 + e^t) dt + \sqrt{6}\int_{0}^{3} (1 + t^2 + e^t) dt$$

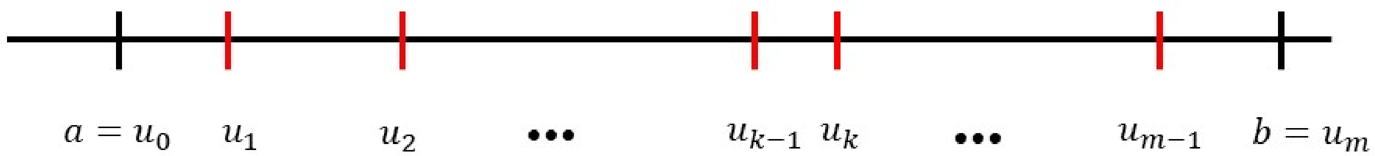
$$= \sqrt{2}\left([t]_{-1}^{0} - [t^2]_{-1}^{0} + \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{0} + \left[e^t\right]_{-1}^{0} \right) + \sqrt{6}\left([t]_{0}^{3} + \left[\frac{t^3}{3}\right]_{0}^{3} + \left[e^t\right]_{0}^{3} \right)$$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{10}{3} - \frac{1}{e}\right) + \sqrt{6}\left(11 + e^3\right) .$$

Διανυσματικό Επικαμπύλιο Ολοκλήρωμα μίας κατά τμήματα C^1 συνάρτησης

Ορισμός 4:
Έστω $\Gamma = \Gamma(\overrightarrow{r})$ μία κατά τμήματα C^1 παραμετρική καμπύλη του $\mathbb{R}^3$, που ορίζεται από την κατά τμήματα C^1 παραμέτρηση $\overrightarrow{r} : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$. Έπίσης, έστω $P = [a = u_0 < u_1 < u_2 < \ldots < u_m = b]$ μία διαμέριση του $[a,b]$ η οποία προσδιορίζει τα C^1 τόξα $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_m$ της καμπύλης Γ (δηλαδή $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \ldots + \Gamma_m$). Επίσης, έστω $\overrightarrow{F}\Gamma \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ μία συνεχης συνάρτηση. Τότε ορίζουμε ως **επικαμπύλιο ολοκλήρωμα δευτερου είδους (ή διανυσματικό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα)** $\int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$ της συνάρτησης $\overrightarrow{F}$ κατά μήκος της καμπύλης Γ, το άθροισμα των επικαμπυλίων ολοκληρωμάτων της $\overrightarrow{F}$ κατά μήκος των Γ_k για $k = 1, 2, \ldots, m$, δηλαδή:

$$\int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} := \sum_{k=1}^{m} \int_{\Gamma_k} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \sum_{k=1}^{m} \int_{u_{k-1}}^{u_k} \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t)) \cdot \overrightarrow{r}'(t)\, dt$$



Σχήμα: Διαμέριση $P = [a = u_0 < u_1 < u_2 < \ldots < u_m = b]$

Άσκηση 3:
Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_\Gamma x^2dx + (x+y^2)dy + e^z dz$ κατά μήκος της παραμετρικής καμπύλης $\Gamma = \Gamma(\overrightarrow{r})$ η οποία ορίζεται από την παραμέτρηση $\overrightarrow{r}(t) = \left(sin|t| \, , \, sin|t - \frac{\pi}{2}| \, , \, t^2 \right)$ για $t \in [-\frac{\pi}{2}, \pi]$.

Λύση:
Η καμπύλη Γ δεν είναι C^1 αφού δεν είναι παραγωγίσιμη στα σημεία $t = 0$ και $t = \frac{\pi}{2}$.

Θεωρώντας λοιπόν τη διαμέριση $P = \left[-\frac{\pi}{2} < 0 < \frac{\pi}{2} < \pi \right]$ του $[-\frac{\pi}{2}, \pi]$
η καμπύλη Γ είναι κατά τμήματα C^1 (ως προς αυτή τη διαμέριση) και ισχύει ότι:

- Στο $\left[-\frac{\pi}{2}, 0 \right]$ έχουμε ότι: $t \leq 0$ άρα $|t| = -t$ και $t - \frac{\pi}{2} \leq 0$ άρα $|t - \frac{\pi}{2}| = \frac{\pi}{2} - t$.

Άρα $\overrightarrow{r}(t) = \left(sin(-t) \, , \, sin\left(\frac{\pi}{2} - t \right) \, , \, t^2 \right) = (\, -sin(t) \, , \, cos(t) \, , \, t^2 \,)$

[αφού $sin(-t) = -sin(t)$ και $sin\left(\frac{\pi}{2} - t \right) = cos(t)$]

Άρα $\overrightarrow{r}'(t) = (\, -cos(t) \, , -sin(t) \, , \, 2t)$.

- Στο $\left[0, \frac{\pi}{2} \right]$ έχουμε ότι: $t \geq 0$ άρα $|t| = t$ και $t - \frac{\pi}{2} \leq 0$ άρα $|t - \frac{\pi}{2}| = \frac{\pi}{2} - t$.

Άρα $\overrightarrow{r}(t) = \left(sin(t) \, , \, sin\left(\frac{\pi}{2} - t \right) \, , \, t^2 \right) = (\, sin(t) \, , \, cos(t) \, , \, t^2 \,)$

Άρα $\overrightarrow{r}'(t) = (\, cos(t) \, , -sin(t) \, , \, 2t)$.

- Στο $\left[\frac{\pi}{2}, \pi \right]$ έχουμε ότι: $t \geq 0$ άρα $|t| = t$ και $t - \frac{\pi}{2} \geq 0$ άρα $|t - \frac{\pi}{2}| = t - \frac{\pi}{2}$.

Άρα $\overrightarrow{r}(t) = (\, sin(t) \, , \, sin\left(t - \frac{\pi}{2} \right) \, , \, t^2 \,) = (\, sin(t) \, , \, -cos(t) \, , \, t^2 \,)$

[αφού $sin\left(t - \frac{\pi}{2} \right) = sin\left(-\left(\frac{\pi}{2} - t \right) \right) = -sin\left(\frac{\pi}{2} - t \right) = -cos(t)$]

Άρα $\overrightarrow{r}'(t) = (\, cos(t) \, , sin(t) \, , \, 2t)$.

Επομένως, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$
της $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (\, x^2 \, , \, x + y^2 \, , \, e^z \,)$ κατά μήκος της καμπύλης $\Gamma = \Gamma(\overrightarrow{r})$ δίνεται από τον Ορισμό 4 ως το άθροισμα:

$$\int_\Gamma \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r} = \int_{-\pi/2}^{0} \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t))\cdot \overrightarrow{r}'(t)\,dt + \int_{0}^{\pi/2} \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t))\cdot \overrightarrow{r}'(t)\,dt + \int_{\pi/2}^{\pi} \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t))\cdot \overrightarrow{r}'(t)\,dt$$

$$= \int_{-\pi/2}^{0} \Big((-sin(t))^2\,,\, -sin(t)+cos^2(t)\,,\, e^{t^2} \Big)\cdot (\,-cos(t)\,,\, -sin(t)\,,\, 2t\,)\,dt$$

$$+ \int_{0}^{\pi/2} \Big(sin^2(t)\,,\, sin(t)+cos^2(t)\,,\, e^{t^2} \Big)\cdot (\,cos(t)\,,\, -sin(t)\,,\, 2t\,)\,dt$$

$$+ \int_{\pi/2}^{\pi} \Big(sin^2(t)\,,\, sin(t)+(-cos(t))^2\,,\, e^{t^2} \Big)\cdot (\,cos(t)\,,\, sin(t)\,,\, 2t\,)\,dt$$

Παρακάτω υπολογίζουμε το πρώτο από τα τρία ολοκληρώματα και αντίστοιχα δουλεύουμε για τα υπόλοιπα δύο ολοκληρώματα.

$$\int_{-\pi/2}^{0} \Big((-sin(t))^2\,,\, -sin(t)+cos^2(t)\,,\, e^{t^2} \Big)\cdot (\,-cos(t)\,,\, -sin(t)\,,\, 2t\,)\,dt$$

$$= \int_{-\pi/2}^{0} \Big(-sin^2(t)cos(t) + sin^2(t) - cos^2(t)sin(t) + 2te^{t^2} \Big)\,dt$$

$$= \int_{-\pi/2}^{0} \left(-sin^2(t)cos(t) + \frac{1-cos(2t)}{2} - cos^2(t)sin(t) + 2te^{t^2} \right)dt$$

$$= -\left[\frac{sin^3(t)}{3}\right]_{-\pi/2}^{0} + \left\{ \frac{1}{2}[t]_{-\pi/2}^{0} - \frac{1}{2}\left[\frac{sin(2t)}{2}\right]_{-\pi/2}^{0} \right\} + \left[\frac{cos^3(t)}{3}\right]_{-\pi/2}^{0} + \left[e^{t^2}\right]_{-\pi/2}^{0}$$

Επαναληπτικές Ασκήσεις (12-01-2022)

Άσκηση 1:
Έστω οι πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1} \,.$$

Να υπολογιστούν οι πίνακες $2A$ και $A \cdot B$.

Λύση:

$$2A = 2\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 6 & 0 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot(-2) + 1\cdot 5 + (-1)\cdot 1 \\ 3\cdot(-2) + 0\cdot 5 + 2\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1} \,.$$

Άσκηση 2:
Να υπολογιστεί η κατευθυνόμενη παράγωγος της συνάρτησης $f(x,y) = x^2y^3 - 4y$ στο σημείο $(2,-1)$ κατά την κατεύθυνση του διανύσματος $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{i} + 5\overrightarrow{j}$.

Λύση:
Αρχικά θα υπολογίσουμε την κλίση (ανάδελτα) της συνάρτησης στο σημείο $(2,-1)$:

$$\nabla f(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y)) = \left(2xy^3, 3x^2y^2 - 4\right)$$
$$\nabla f(2,-1) = (-4, 8)$$

Παρατηρούμε ότι το διάνυσμα $\overrightarrow{v} = (2,5)$ δεν είναι μοναδιαίο αφού $\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{2^2 + (5)^2} = \sqrt{29}$. Το αντίστοιχο μοναδιαίο διάνυσμα είναι το

$$\overrightarrow{w} = \frac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{29}}(2,5) = (\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}})$$

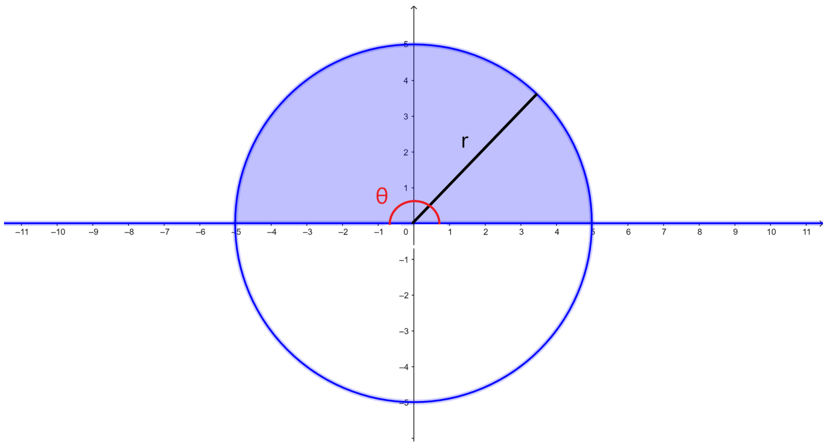
Επομένως η ζητούμενη κατευθυνόμενη παράγωγος δίνεται από τον τύπο:

$$D_{\overrightarrow{w}} f(2,-1) = \nabla f(2,-1) \cdot \overrightarrow{w} = (-4,8) \cdot (\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}}) = -4 \cdot \frac{2}{\sqrt{29}} + 8 \cdot \frac{5}{\sqrt{29}} = \frac{32}{\sqrt{29}} \,.$$

Άσκηση 3

Να υπολογιστεί με χρήση πολικών συντεταγμένων το ολοκλήρωμα $\iint_D x^2 + y^2 dA$, όπου D το άνω μισό του δίσκου με ακτίνα 5 και κέντρο την αρχή των αξόνων.

Λύση



Πολικές συντεταγμένεες

$$x = rcos\theta \ , \ y = rsin\theta \ , \ r \geqslant 0 \ , \ \theta \in [0, 2\pi] \ .$$

Το χωρίο D (άνω μισό του κυκλικού δίσκου), με χρήση πολικών συντεταγμένων μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$D = \{(r, \theta) \mid 0 \leqslant r \leqslant 5 \ , \ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi\} \ .$$

Η Ιακωβιανή για τον πολικό μετασχηματισμό είναι $J = r$. Επομένως το ολοκλήρωμα γράφεται ως

$$\iint_D x^2 + y^2 dA = \int_0^\pi \int_0^5 (r^2cos^2\theta + r^2sin^2\theta)\, r\, drd\theta = \int_0^\pi \int_0^5 r^2 \cancelto{1}{(cos^2\theta + sin^2\theta)}\, rdrd\theta$$

$$= \int_0^\pi \int_0^5 r^3 drd\theta = \int_0^\pi \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^5 d\theta = \int_0^\pi \frac{5^4}{4} d\theta = \frac{625}{4} [\theta]_0^\pi = \frac{625\pi}{4} \ .$$

Άσκηση 4:

Έστω το διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F}(x, y, z) = y^2z^3\overrightarrow{i} + 2xyz^3\overrightarrow{j} + 3xy^2z^2\overrightarrow{k}$. Να αποδειχθεί ότι είναι αστρόβιλο (δηλαδή ότι $\nabla \times \overrightarrow{F}(x, y, z) = \overrightarrow{0}$).

Λύση

$$\nabla \times \overrightarrow{F}(x, y, z) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y^2z^3 & 2xyz^3 & 3xy^2z^2 \end{vmatrix}$$

$$= \left(6xyz^2 - 6xyz^2\right) \overrightarrow{i} - \left(3y^2z^2 - 3y^2z^2\right) \overrightarrow{j} + \left(2yz^3 - 2yz^3\right) \overrightarrow{k} = \overrightarrow{0} \ .$$