Μιγαδικοί Αριθμοί

Ορισμός:

Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών συμβολίζεται με $\mathbb{C}$ και είναι ένα σύνολο στο οποίο:

• Υπάρχει ένα στοιχείο i τέτοιο ώστε $i^2 = -1$.

• Κάθε στοιχείο $z \in \mathbb{C}$ γράφεται με μοναδικό τρόπο στη μορφή $z = a+bi$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$. Το a λέγεται πραγματικό ($real$) μέρος του z και συμβολίζεται με $a = Re(z)$ και το b λέγεται φανταστικό ($imaginary$) μέρος του z και συμβολίζεται με $b = Im(z)$.
Δηλαδή $z = a + bi \ = Re(z) + i\, Im(z)$.

• Επεκτείνονται οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού έτσι ώστε να έχουν τις ίδιες ιδιότητες όπως είχαν στο σύνολο $\mathbb{R}$. Το μηδέν που μπορεί να γραφεί ως $0 + 0i$ είναι το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης και το ένα που μπορεί να γραφεί ως $1 + 0i$ είναι το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού.

Παρατηρήσεις:

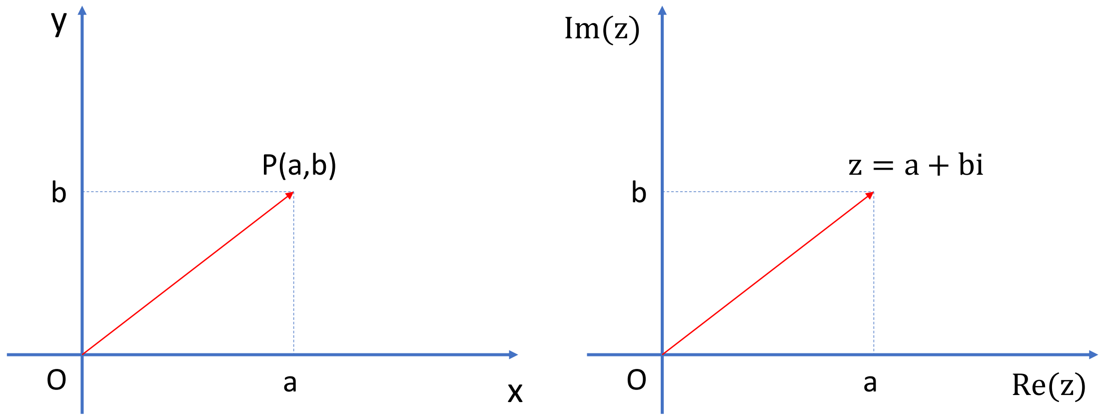
Οι αριθμοί της μορφής $a + bi$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$, λέγονται μιγαδικοί αριθμοί.
Ειδικές περιπτώσεις των μιγαδικών αριθμών είναι οι παρακάτω δύο:

Οι αριθμοί της μορφής a (δηλαδή $a + 0i \in \mathbb{C}$), όπου $a \in \mathbb{R}$, είναι οι πραγματικοί αριθμοί. Επομένως, το σύνολο των μιγαδικών αριθμών είναι ένα υπερσύνολο του συνόλου των πραγματικών αριθμών.

Οι αριθμοί της μορφής bi (δηλαδή $0 + bi \in \mathbb{C}$), όπου $b \in \mathbb{R}$, οι οποίοι ονομάζονται φανταστικοί αριθμοί.

Γεωμετρική αναπαράσταση μιγαδικών αριθμών:

Στο καρτεσιανό επίπεδο μπορούμε να αντιστοιχίσουμε έναν μιγαδικό αριθμό $a + bi$ στο σημείο $P(a, b)$. Το σημείο $P(a, b)$ λέγεται εικόνα του μιγαδικού $a + bi$. Επίσης, ένας μιγαδικός αριθμός παριστάνεται με τη διανυσματική ακτίνα του σημείου P, δηλαδή με το διάνυσμα $\overrightarrow{OP}$, όπου $O(0, 0)$ η αρχή των αξόνων. Το καρτεσιανό επίπεδο του οποίου τα σημεία είναι εικόνες μιγαδικών αριθμών λέγεται μιγαδικό επίπεδο. Στο μιγαδικό επίπεδο ο x-άξονας λέγεται πραγματικός άξονας αφού πάνω σε αυτόν ανήκουν οι εικόνες των πραγματικών αριθμών a $(= a + 0i)$ και ο y-άξονας λέγεται φανταστικός άξονας αφού πάνω σε αυτόν ανήκουν οι εικόνες των φανταστικών αριθμών bi $(= 0 + bi)$. Συνοψίζοντας, στο μιγαδικό επίπεδο ο μιγαδικός αριθμός $z = a + bi$ αναπαρίσταται ως ένα σημείο $P(a, b)$ με καρτεσιανές συντεταγμένες a, b, όπου η τετμημένη είναι το πραγματικό μέρος του (δηλ. $Re(z) = a$) και η τεταγμένη είναι το φανταστικό μέρος του (δηλ. $Im(z) = b$).



Σχήμα 1: Το διάνυσμα OP παριστάνει τον μιγαδικό αριθμό $a + bi$ στο μιγαδικό επίπεδο

Ισότητα μιγαδικών αριθμών:

Δύο μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = a + bi$ και $z_2 = c + di$ είναι ίσοι (δηλαδή $a + bi = c + di$) αν και μόνο αν $a = c$ και $b = d$.
Ειδική περίπτωση του παραπάνω είναι για $z_2 = 0$ για την οποία παίρνουμε $a + bi = 0$ $(= 0 + 0i)$ αν και μόνο αν $a = 0$ και $b = 0$.

Συζυγής μιγαδικού αριθμού:

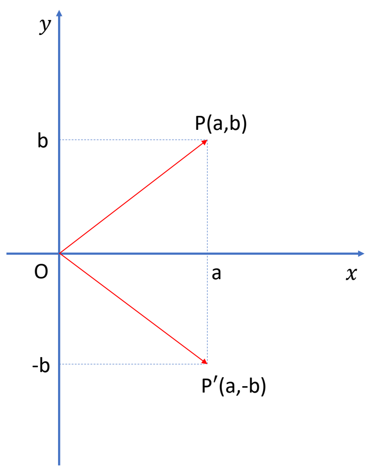
Έστω $z = a + bi \in \mathbb{C}$. Ο αριθμός $a - bi$ ονομάζεται συζυγής του z και συμβολίζεται με

$$\overline{z} = \overline{a + bi} = a - bi$$

Αντίστοιχα, ο συζυγής του μιγαδικού αριθμού $\overline{z} = a - bi$ είναι ο

$$\overline{\overline{z}} = \overline{a - bi} = a + bi = z$$

Οι $a + bi$, $a - bi$ λέγονται συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί.



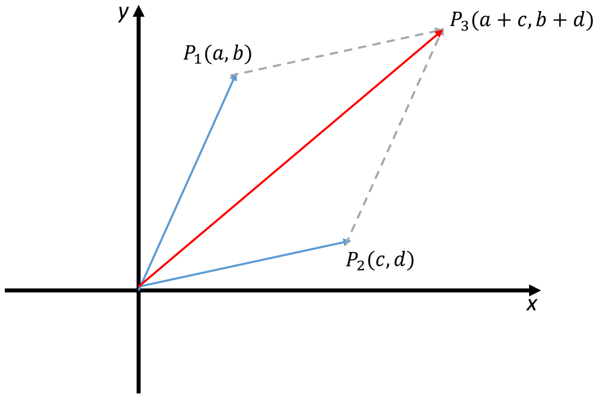
Σχήμα 2: Οι εικόνες $P(a, b)$ και $P'(a, -b)$ των συζυγών μιγαδικών $a + bi$ και $a - bi$ αντίστοιχα, είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον x-άξονα.

Πράξεις μιγαδικών αριθμών:

Έστω $z_1 = a + bi$ και $z_2 = c + di$ δύο μιγαδικοί αριθμοί.

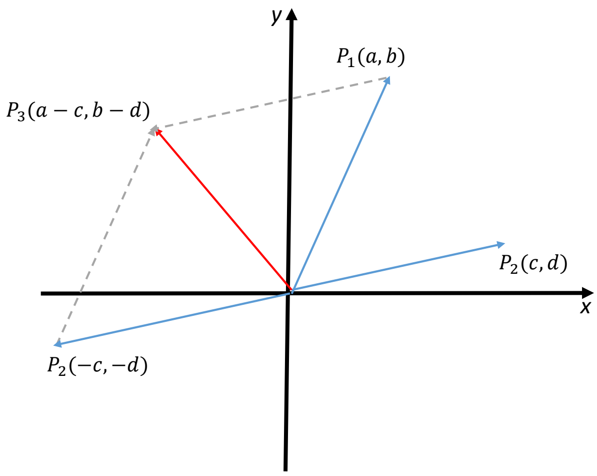
- **Πρόσθεση:**

$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$



- **Αφαίρεση:**

$z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$



- **Γινόμενο:**

$z_1 z_2 = (a + bi)(c + di) = ac + adi + cbi - bd = (ac - bd) + (ad + bc)i,$

(όπου χρησιμοποιήθηκε η σχέση $i^2 = -1$).
Επιπλέον, το γινόμενο των συζυγών μιγαδικών αριθμών $z = a + bi$ και $\overline{z} = a - bi$ είναι ο πραγματικός αριθμός $z\overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$.

- **Πηλίκο:**

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(ac + bd) + (-ad + bc)i}{c^2 + d^2} = \frac{(ac + bd)}{(c^2 + d^2)} + \frac{(bc - ad)}{(c^2 + d^2)}i.$$

Ιδιότητες συζυγών μιγαδικών αριθμών:

Έστω $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ δύο μιγαδικοί αριθμοί και $\overline{z_1} = a - bi$, $\overline{z_2} = c - di$ οι συζυγείς τους αντίστοιχα.

- $z_1 + \overline{z_1} = 2a$
- $z_1 - \overline{z_1} = 2bi$
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$
- $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

Δυνάμεις μιγαδικών αριθμών:

Οι δυνάμεις ενός μιγαδικού αριθμού $z \in \mathbb{C}$ ορίζονται όπως ορίζονται και στους πραγματικούς αριθμούς. Πιο συγκεκριμένα

- $z^1 = z,\ \ z^2 = z\,z\,,\ ...\ ,\ z^n = z^{n-1}\,z$ για κάποιον εκθέτη $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 1$.
- $z^0 = 1$, για $z \neq 0 (= 0 + 0i)$.
- $z^{-n} = \dfrac{1}{z^n}$, για $z \neq 0$ και για κάποιον εκθέτη $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 1$.

Ειδικότερα για το στοιχείο $i = 0 + 1i$ έχουμε ότι

- $i^0 = 1,\ \ i^1 = i,\ \ i^2 = -1,\ \ i^3 = i^2\,i = (-1)i = -i,\ \ i^4 = i^2\,i^2 = (-1)(-1) = 1$

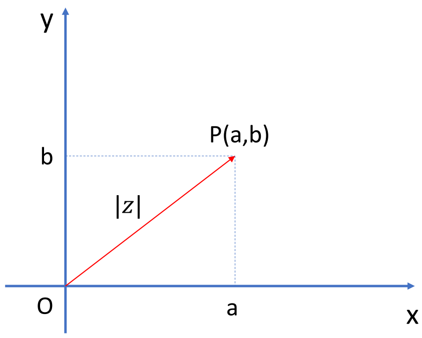
και συνεχίζοντας ομοίως παρατηρούμε ότι οι τιμές επαναλαμβάνονται. Παίρνουμε λοιπόν ότι για κάποιον εκθέτη $n \in \mathbb{N}$ γράφοντάς τον στη μορφή $n = 4m + k$, με $m \in \mathbb{N}$ και $k = 0, 1, 2, 3$, έχουμε ότι

$$i^n = i^{4m+k} = (i^4)^m i^k = (1)i^k = i^k = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ i, & k = 1, \\ -1, & k = 2, \\ -i, & k = 3. \end{cases}$$

Μέτρο μιγαδικού αριθμού:

Έστω $P(a,b)$ η εικόνα του μιγαδικού $z = a + bi$ στο μιγαδικό επίπεδο. Τότε ως μέτρο $|z|$ του z ορίζεται η απόσταση του σημείου $P(a,b)$ από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$. Δηλαδή $|z| = |\overrightarrow{OP}|$ και είναι ίσο με

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



Σχήμα 3: Το μέτρο $|z|$ του μιγαδικού $z = a + bi$

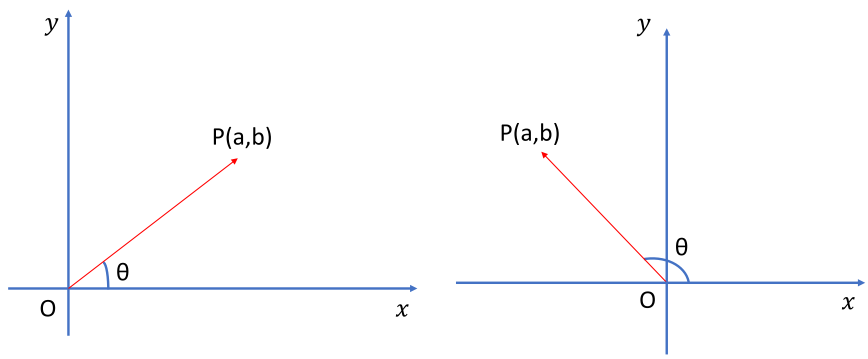
Ιδιότητες:

Έστω $z_1 = a + bi$ και $z_2 = c + di$ δύο μιγαδικοί αριθμοί. Επίσης, $\overline{z_1} = a - bi$ και $-z_1 = -a - bi$. Ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

- $|z_1|^2 = z_1 \cdot \overline{z_1}$.
- $|z_1| = |\overline{z_1}| = |-z_1|$
- $|z_1|^2 = z_1\overline{z_1}$
- $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$
- $|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

Όρισμα μιγαδικού αριθμού:

Έστω $z = a + bi$ ένας μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός. Έστω $P(a, b)$ η εικόνα του μιγαδικού z στο μιγαδικό επίπεδο και $\overrightarrow{OP}$ η διανυσματική ακτίνα του. Τότε ως όρισμα του z ονομάζεται η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\overrightarrow{OP}$ με τον $Ox-$άξονα και συμβολίζεται με $arg(z)$. Αν μία γωνία θ είναι όρισμα του z τότε κάθε γωνία $\theta + 2k\pi$, όπου k ακέραιος, είναι επίσης όρισμα του z. Δηλαδή το όρισμα ενός μιγαδικού δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένο. Η γωνία θ για την οποία ισχύει $0 \leq \theta < 2\pi$ ονομάζεται πρωτεύον ή βασικό όρισμα του z και συμβολίζεται με $Arg(z)$. Έχουμε λοιπόν ότι $arg(z) = Arg(z) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Για τον μηδενικό μιγαδικό αριθμό $z = 0$ δεν ορίζεται όρισμα, γιαυτό όταν αναφερόμαστε σε όρισμα μιγαδικού αριθμού εννοούμε μη μηδενικού.



Σχήμα 4: Όρισμα θ του μιγαδικού $z = a + bi$

Πολική (ή τριγωνομετρική) μορφή μιγαδικού αριθμού:

Έστω $z = a + bi$ ένας μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός. Οι αριθμοί $a = Re(z)$ και $b = Im(z)$ προσδιορίζουν πλήρως τον μιγαδικό z στο επίπεδο όπως είδαμε προηγουμένως (βλέπε Σχήμα 1). Ένας άλλος τρόπος να προσδιοριστεί ο μιγαδικός z στο επίπεδο είναι μέσω των πολικών συντεταγμένων αντί των καρτεσιανών συντεταγμένων. Οι πολικές συντεταγμένες ενός μιγαδικού αριθμού z είναι οι r, θ όπου $r \equiv |z|$ είναι το μέτρο του και $\theta = arg(z)$ είναι ένα όρισμά του.

Οι καρτεσιανές συντεταγμένες a, b του z εκφράζονται μέσω των πολικών συντεταγμένων r, θ του z ως εξής:

$$a = rcos\theta \ , \quad b = rsin\theta$$

και αντίστοιχα οι πολικές συντεταγμένες του z εκφράζονται μεσω των καρτεσιανών συντεταγμένων του z ως εξής:

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \ , \quad \theta = arg(z) = tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) \ .$$

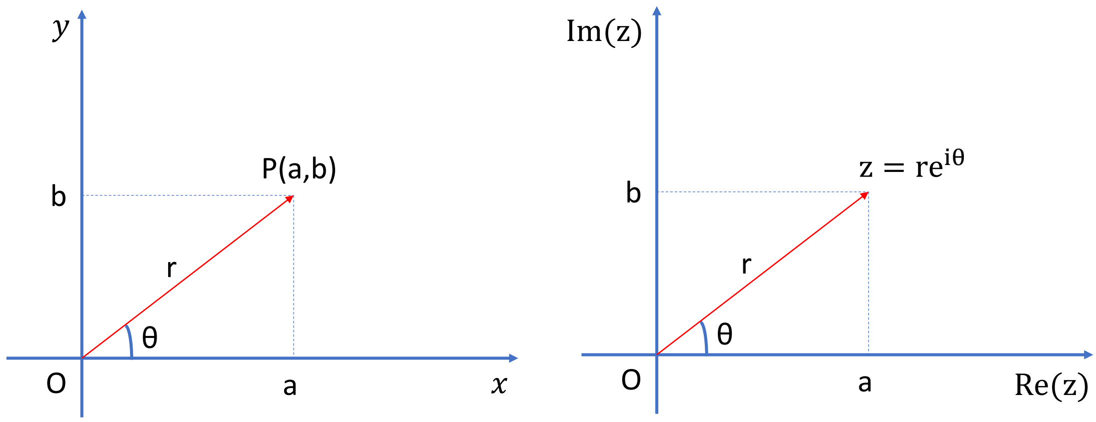
Από τα παραπάνω έχουμε ότι

$$\begin{aligned} z &= a + bi \\ &= rcos\theta + irsin\theta = r(cos\theta + isin\theta) \\ &= re^{i\theta} . \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήθηκε ο τύπος του $Euler$

$$e^{i\theta} = cos\theta + isin\theta \ .$$

Η μορφή $z = re^{i\theta}$ $(= |z|e^{i\, arg(z)})$ ονομάζεται πολική μορφή του μιγαδικού z.



Σχήμα 5: Γεωμετρική αναπαράσταση του μιγαδικού $z = a+bi$ που δείχνει τις πολικές r, θ συντεταγμένες του.

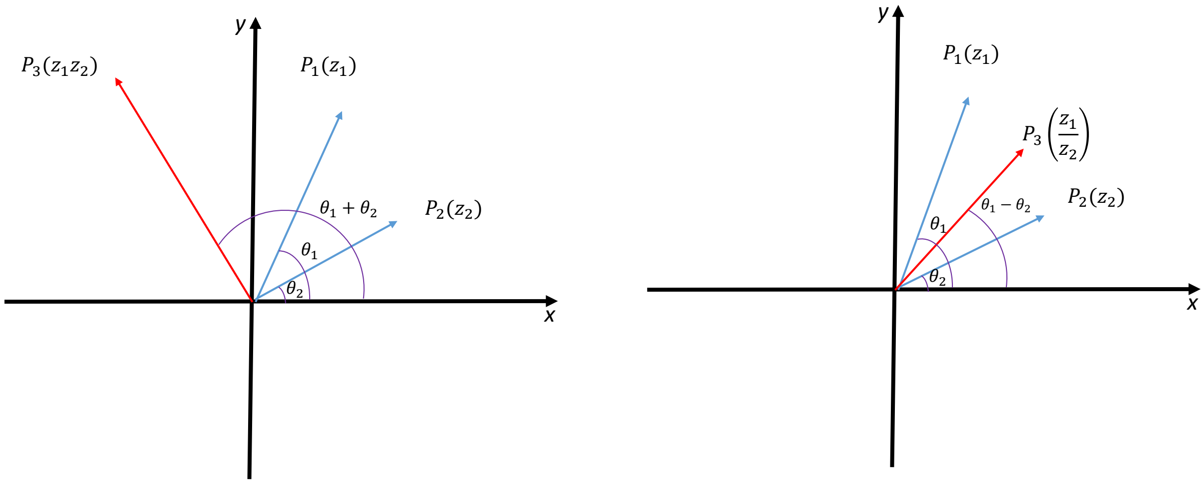
Έχοντας ορίσει την πολική μορφή ενός μιγαδικού αριθμού z επανερχόμαστε στο γινόμενο, όπου αν $z_1 = r_1(cos(\theta_1) + isin(\theta_1))$ και $z_2 = r_2(cos(\theta_2) + isin(\theta_2))$ είναι οι πολικές μορφές δύο μιγαδικών, τότε

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 \left[(cos\theta_1 cos\theta_2 - sin\theta_1 sin\theta_2) + i(sin\theta_1 cos\theta_2 + cos\theta_1 sin\theta_2) \right] \\ &= r_1 r_2 \left[cos(\theta_1 + \theta_2) + isin(\theta_1 + \theta_2) \right] \ . \end{aligned}$$

Ομοίως δουλεύοντας για το πηλίκο πολλ/ζοντας με τον συζηγή του παρονομαστή προκύπτει

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{r_1 r_2 \left[(cos\theta_1 cos\theta_2 + sin\theta_1 sin\theta_2) + i(sin\theta_1 cos\theta_2 - cos\theta_1 sin\theta_2) \right]}{(r_2)^2} \\ &= \frac{r_1}{r_2} \left[cos(\theta_1 - \theta_2) + isin(\theta_1 - \theta_2) \right] \ . \end{aligned}$$

Επομένως η Γεωμετρική ερμηνεία του γινομένου και του πηλίκου δύο μιγαδικών είναι η ακόλουθη:



Σχήμα 6: (α) Όρισμα $\theta_1+\theta_2$ του μιγαδικού z_1z_2 (β) Όρισμα $\theta_1-\theta_2$ του μιγαδικού z_1/z_2

Ιδιότητες:

1. Βάσει της πολικής μορφής του μιγαδικου αριθμού, δύο μιγαδικοί αριθμοί είναι ίσοι αν και μόνο αν τα μέτρα τους είναι ίσα και η διαφορά των ορισμάτων τους είναι ακέραιο πολλ/σιο του $2k$ για $k \in \mathbb{Z}$. Δηλ. αν $z_1 = r_1(cos(\theta_1) + isin(\theta_1))$ και $z_2 = r_2(cos(\theta_2) + isin(\theta_2))$ τότε
$$z_1 = z_2 \;\Leftrightarrow\; r_1 = r_2 \text{ και } \theta_1 - \theta_2 = 2k\pi \ .$$

2. *Θεώρημα DeMoivre*
Έστω $z = r(cos\theta + isin\theta)$ ένας μιγαδικό αριθμός στην πολική μορφή του.
Τότε $z^n = r^n(cos(n\theta) + isin(n\theta))$ όπου $n \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 1
Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 3 + 1i$.
Να υπολογίστούν τα $z_1 + z_2$, $z_2 - z_1$, $|z_1|$, $|z_2|$, $\overline{z_1} - z_2$, $|\overline{z_1} - z_2|$, $|\overline{z_1}|$, z_1z_2, $z_1\overline{z_1}$, z_1/z_2, $z_1/\overline{z_1}$, $|-z_1|$, $|z_1z_2|$, $|z_1/z_2|$, $\overline{z_1+z_2}$.
Επιπλέον, να επαληθευτούν οι ιδιότητες $|z_1| = |\overline{z_1}| = |-z_1|$, $z_1\overline{z_1} = |z_1|^2$, $|z_1z_2| = |z_1||z_2|$, $|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, $\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

Λύση:

- $z_1 + z_2 = (1 + 2i) + (3 + 1i) = (1 + 3) + (2 + 1)i = 4 + 3i$
- $z_2 - z_1 = (3 + 1i) - (1 + 2i) = (3 - 1) + (1 - 2)i = 2 - 1i$
- $|z_1| = |1 + 2i| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$
- $|z_2| = |3 + 1i| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$
- $\overline{z_1} - z_2 = (1 - 2i) - (3 + 1i) = (1 - 3) + (-2 - 1)i = -2 - 3i$
- $|\overline{z_1} - z_2| = |-2 - 3i| = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$

- $|\overline{z_1}| = |1-2i| = \sqrt{1^2+(-2)^2} = \sqrt{5} = |z_1|$
- $z_1 z_2 = (1+2i)(3+1i) = 3+1i+6i+2i^2 = 3+7i-2 = 1+7i$
- $z_1\overline{z_1} = (1+2i)(1-2i) = 1-2i+2i-4i^2 = 1+4 = 5 = |z_1|^2$
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+2i}{3+1i} = \frac{(1+2i)(3-1i)}{(3+1i)(3-1i)} = \frac{(1+2i)(3-1i)}{|3+1i|^2} = \frac{3-1i+6i-2i^2}{3^2+1^2} = \frac{5+5i}{10} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$
- $\frac{z_1}{\overline{z_1}} = \frac{1+2i}{1-2i} = \frac{(1+2i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{(1+2i)(1+2i)}{|1-2i|^2} = \frac{1+2i+2i+4i^2}{1^2+2^2} = \frac{-3+4i}{5} = -\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$
- $|-z_1| = |-(1+2i)| = |-1-2i| = \sqrt{(-1)^2+(-2)^2} = \sqrt{5} = |z_1|$
- $|z_1 z_2| = |1+7i| = \sqrt{1^2+7^2} = \sqrt{50} = \sqrt{5}\,\sqrt{10} = |z_1||z_2|$
- $|\frac{z_1}{z_2}| = |\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$
- $\overline{z_1+z_2} = \overline{4+3i} = 4-3i = (1-2i)+(3-1i) = \overline{z_1}+\overline{z_2}$

Άσκηση 2
Έστω ο μιγαδικός $z = (x-2)+(y-1)i\ ,\ x,y \in \mathbb{R}$.
Να βρεθούν τα x, y ώστε:

1. $z = 3i$.
2. Η εικόνα του z είναι το $P(0,0)$.
3. $z \in \mathbb{R}$ και $Re(z) = 5$.

Λύση

1. $z = 3i \;\Leftrightarrow\; (x-2)+(y-1)i = 0+3i \;\Leftrightarrow\; x=2\ ,y=4$.
2. $z = 0+0i \;\Leftrightarrow\; (x-2)+(y-1)i = 0+0i \;\Leftrightarrow\; x=2\ ,y=1$.
3. $z \in \mathbb{R} \;\Leftrightarrow\; Im(z)=0 \;\Leftrightarrow\; y-1=0 \;\Leftrightarrow\; y=1$.
   $Re(z)=5 \;\Leftrightarrow\; x-2=5 \;\Leftrightarrow\; x=7$.

Άσκηση 3
Να υπολογίσετε την παράσταση $(1-i)^{15}$.

Λύση
Υπόδειξη: Ελέγχουμε αν το $(1-i)^2$ ή το $(1-i)^3$ δίνει κάτι βολικό και αν ναι γράφουμε την δύναμη ^{15} ως $^{2*7+1}$ ή ^{3*5}.

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα $(1-i)^2 = 1-2i+i^2 = 1-2i-1 = -2i$.
Επομένως

$$(1-i)^{15} = (1-i)^{2*7+1} = \left((1-i)^2\right)^7(1-i) = (-2i)^7(1-i) = (-128)(-i)^7(1-i)$$
$$= 128i(1-i) = 128+128i\ .$$

Άσκηση 4

Αν για το μιγαδικό $z = a + bi$ ισχύει $z = |-\overline{z}| - 1 + |1 - 2i|i$ να βρείτε το μέτρο του.

Λύση

$$|-\overline{z}| = |\overline{z}| = |z| \;,\; \text{και} \;\; |1 - 2i| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5} \;.$$

Άρα

$$z = |z| - 1 + i\sqrt{5} = a + bi \;\Rightarrow\; a = |z| - 1 \;, b = \sqrt{5} \;,$$

αρα

$$|z| = \sqrt{(|z| - 1)^2 + (\sqrt{5})^2} \;\Leftrightarrow\; |z|^2 = (|z| - 1)^2 + 5 \;\Leftrightarrow\; |z|^2 = |z|^2 - 2|z| + 1 + 5 \;\Leftrightarrow\; |z| = 3 \;.$$