# Εισαγωγή στον $\mathbf{R^n}$

$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$
Για μια διατεταγμένη $n$-άδα $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\overrightarrow{x}$, δηλαδή $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

## Ισότητα

Δύο διανύσματα $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}$ είναι ίσα όταν:

$$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y} \Leftrightarrow x_i = y_i \quad , \text{ για } i = 1, \dots, n$$

## Πράξεις

Έστω $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \overrightarrow{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.

1) $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$ (Πρόσθεση)
2) $\lambda \overrightarrow{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$ (Βαθμωτός Πολλαπλασιασμός)

Το $\overrightarrow{0} = (0, 0, \dots, 0)$ είναι το μηδενικό στοιχείο της πρόσθεσης και το $-\overrightarrow{x} = (-1)\overrightarrow{x} = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$ το αντίθετο διάνυσμα του $\overrightarrow{x}$.
Άρα

$$\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y} = \overrightarrow{x} + (-\overrightarrow{y}) = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \dots, x_n - y_n)$$

## Κανονική Βάση του $\mathbb{R}^n$

Θεωρούμε τα διανύσματα

$$\begin{gathered} e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0) \\ e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e_n = (0, 0, 0, \dots, 1). \end{gathered}$$

Τα $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και παράγουν το χώρο, δηλαδή

$\forall \overrightarrow{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ έχουμε $\overrightarrow{x} = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n$.
Άρα $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ είναι κανονική βάση του $\mathbb{R}^n$.

## Εσωτερικό Γινόμενο

Έστω $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\overrightarrow{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.
Το εσωτερικό γινόμενο των $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}$ ορίζεται ως:

$$\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$$

## Ιδιότητες Εσωτερικού Γινομένου

Έστω $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z} \in \mathbb{R}^n$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε ισχύουν:

1) $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = \overrightarrow{y} \cdot \overrightarrow{x}$
2) $\overrightarrow{x} \cdot (\overrightarrow{y} + \overrightarrow{z}) = \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} + \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{z}$
3) $(\lambda \overrightarrow{x}) \cdot \overrightarrow{y} = \lambda(\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}) = \overrightarrow{x} \cdot (\lambda \overrightarrow{y})$
4) $\overrightarrow{0} \cdot \overrightarrow{x} = 0$.

## Ευκλείδεια Νόρμα

**Νόρμα στον** $\mathbb{R}^n$ καλείται η απεικόνιση $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:

1) $\|\overrightarrow{x}\| \geq 0 \quad \forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$ και $\|\overrightarrow{x}\| = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$
2) $\|\lambda \overrightarrow{x}\| = |\lambda| \|\overrightarrow{x}\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$
3) $\|\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\| \leq \|\overrightarrow{x}\| + \|\overrightarrow{y}\| \quad \forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n$.

**Ευκλείδεια Νόρμα στον** $\mathbb{R}^n$ καλείται η απεικόνιση $\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ ώστε $\forall \overrightarrow{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\|\overrightarrow{x}\|_2 (:= \|\overrightarrow{x}\|) = \sqrt{\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$$

και η οποία ικανοποιεί τις παραπάνω 4 ιδιότητες νόρμας.

### Ανισότητα Cauchy – Schwarz

Για κάθε $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n$ ισχύει η ανισότητα *Cauchy – Schwarz*

$$|\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}| \leq \|\overrightarrow{x}\| \|\overrightarrow{y}\|$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $\exists\ \lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\overrightarrow{y} = \lambda \overrightarrow{x}$ ή $\overrightarrow{x} = \lambda \overrightarrow{y}$ (δηλαδή $\overrightarrow{x} \parallel \overrightarrow{y}$).

**Απόδειξη:** Αν $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y} = \overrightarrow{0}$ ισχύει. Έστω ένα $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\overrightarrow{0}\}$.

$0 \leq \|\lambda \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\|^2 = (\lambda \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) \cdot (\lambda \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) = \lambda \overrightarrow{x} \cdot \lambda \overrightarrow{x} + 2\lambda \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} + \overrightarrow{y} \cdot \overrightarrow{y} = \lambda^2 \|\overrightarrow{x}\|^2 + 2\lambda \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} + \|\overrightarrow{y}\|^2.$

Πολυώνυμο 2ου βαθμού ως προς το $\lambda \in \mathbb{R}$. Άρα

$\Delta \leq 0 \Rightarrow 4\,(\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y})^2 - 4\|\overrightarrow{x}\|^2 \|\overrightarrow{y}\|^2 \leq 0 \Rightarrow 4\,(\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y})^2 \leq 4\|\overrightarrow{x}\|^2 \|\overrightarrow{y}\|^2 \Rightarrow |\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}| \leq \|\overrightarrow{x}\| \|\overrightarrow{y}\|.$

### Ευκλείδεια Απόσταση

Έστω $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n$. Η Ευκλείδεια απόσταση μεταξύ των $\overrightarrow{x}$ και $\overrightarrow{y}$ ορίζεται ως:

$$d(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = \|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}\|$$

### Ιδιότητες Ευκλείδειας Απόστασης

Έστω $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z} \in \mathbb{R}^n$. Τότε ισχύουν:

1) $d(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \geqslant 0$ και $d(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{x} = \overrightarrow{y}$
2) $d(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = d(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{x})$
3) $d(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \leqslant d(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{z}) + d(\overrightarrow{z}, \overrightarrow{y})$ (Τριγωνική Ανισότητα)

### Γωνία δύο μη-μηδενικών διανυσμάτων

Έστω $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\overrightarrow{0}\}$. Για τη γωνία $\theta = \sphericalangle(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ των $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}$ ισχύει ο τύπος

$$\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = \|\overrightarrow{x}\|\|\overrightarrow{y}\| cos\theta \quad , \quad \theta \in [0, \pi].$$

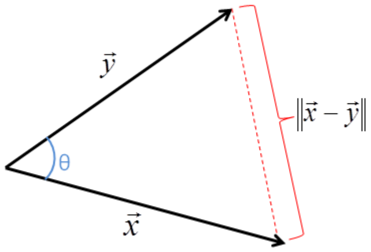
**Απόδειξη:** Από το νόμο των συνημιτόνων ισχύει ότι:

$$\|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}\|^2 = \|\overrightarrow{x}\|^2 + \|\overrightarrow{y}\|^2 - 2\|\overrightarrow{x}\|\|\overrightarrow{y}\| \cos\theta.$$

Επιπλέον, από τον ορισμό της Ευκλείδιας νόρμας προκύπτει ότι:

$$\|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}\|^2 = (\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}) \cdot (\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}) = \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} \cdot \overrightarrow{y} - 2\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = \|\overrightarrow{x}\|^2 + \|\overrightarrow{y}\|^2 - 2\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}.$$

Επομένως, από τις παραπάνω δύο σχέσεις έπεται η απόδειξη.




Σχήμα 1: Γωνία $\theta = \sphericalangle(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$

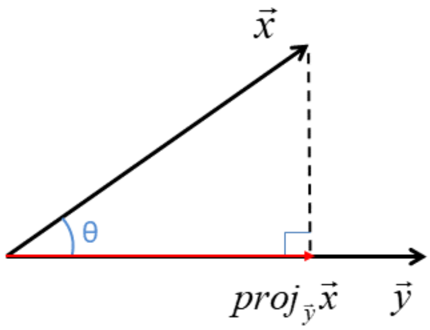
### Κάθετα Διανύσματα

Έστω $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n$. Τα $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}$ καλούνται κάθετα όταν το εσωτερικό τους γινόμενο είναι μηδέν. Δηλαδή:

$$\overrightarrow{x} \perp \overrightarrow{y} \Leftrightarrow \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = 0$$

**Απόδειξη:** Η απόδειξη έπεται άμεσα από τη σχέση $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = \|\overrightarrow{x}\|\|\overrightarrow{y}\| \cos\theta$, καθώς όταν τα $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}$ είναι κάθετα ισχύει $\theta = 90^o$, δηλαδή $\cos\theta = 0$.

**Προβολή Διανύσματος**




Σχήμα 2: Προβολή του διανύσματος $\overrightarrow{x}$ στο $\overrightarrow{y}$

Έστω $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n$ με $\overrightarrow{y} \neq \overrightarrow{0}$. Η προβολή ενός διανύσματος $\overrightarrow{x}$ πάνω σε ένα μη-μηδενικό διάνυσμα $\overrightarrow{y}$ συμβολίζεται με $proj_{\overrightarrow{y}}(\overrightarrow{x})$ και δίνεται από τον τύπο:

$$proj_{\overrightarrow{y}}(\overrightarrow{x}) = \frac{\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}}{\|\overrightarrow{y}\|^2}\overrightarrow{y}$$

Επιπλέον, η αριθμητική συνιστώσα (προβολή) του $\overrightarrow{x}$ κατά την κατεύθυνση του $\overrightarrow{y}$ συμβολίζεται με $comp_{\overrightarrow{y}}(\overrightarrow{x})$ και δίνεται απο:

$$comp_{\overrightarrow{y}}(\overrightarrow{x}) = \frac{\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}}{\|\overrightarrow{y}\|}$$

**Εξωτερικό Γινόμενο**

Έστω $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\overrightarrow{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$.
Το εξωτερικό γινόμενο των $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}$ ορίζεται ως:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} &= \overrightarrow{i}\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} - \overrightarrow{j}\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} + \overrightarrow{k}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \\ &= \overrightarrow{i}(x_2y_3 - x_3y_2) - \overrightarrow{j}(x_1y_3 - x_3y_1) + \overrightarrow{k}(x_1y_2 - x_2y_1),\end{aligned}$$

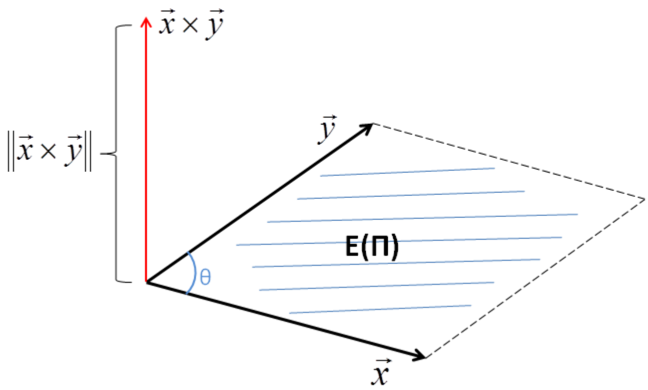
όπου $\overrightarrow{i} = (1, 0, 0)$, $\overrightarrow{j} = (0, 1, 0)$, $\overrightarrow{k} = (0, 0, 1)$.

## Ιδιότητες Εξωτερικού Γινομένου

Έστω $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε ισχύουν:

1) $\vec{x} \times \vec{x} = \vec{0}$
2) $\vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x}$
3) $\vec{x} \times (\lambda \vec{y}) = \lambda(\vec{x} \times \vec{y})$
4) $(\vec{x} \times \vec{y}) \perp \vec{x}$ και $(\vec{x} \times \vec{y}) \perp \vec{y}$
5) $\|\vec{x} \times \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2 - (\vec{x} \cdot \vec{y})^2$ (Ταυτότητα *Lagrange*)
6) $\|\vec{x} \times \vec{y}\| = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \sin\theta$

**Παρατήρηση:** Η ιδιότητα 6 ερμηνεύεται ως εξής:
Έστω $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$. Η νόρμα του εξωτερικού τους γινομένου $\|\vec{x} \times \vec{y}\|$ ισούται με το εμβαδόν Ε(Π) του παραλληλογράμμου Π=$\{\lambda\vec{x} + \mu\vec{y} \;\; , \;\; 0 \leq \lambda, \mu \leq 1\}$.




Σχήμα 3: Ε(Π)=$\|\vec{x} \times \vec{y}\| = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| sin\theta$

**Σημείωση:**
1) Για το εξωτερικό γινόμενο δεν ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα.
2) Το εσωτερικό γινόμενο είναι μια απεικόνιση $\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$.
Επομένως το $\vec{x} \cdot \vec{y}$ για $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ είναι ένας πραγματικός αριθμός.
Το εξωτερικό γινόμενο είναι μια απεικόνιση $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$.
Επομένως το $\vec{x} \times \vec{y}$ για $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ είναι ένα διάνυσμα.

## Μικτό Γινόμενο

Έστω $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\overrightarrow{y} = (y_1, y_2, y_3)$, $\overrightarrow{z} = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3$.
Το μικτό γινόμενο των $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}$ ορίζεται ως:

$$\overrightarrow{x} \cdot (\overrightarrow{y} \times \overrightarrow{z}) = (x_1, x_2, x_3) \cdot \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

$$= x_1 \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

# Πραγματικές συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

**Ορισμός**: Μία συνάρτηση η οποία σε κάθε σημείο $\overrightarrow{x}$ ενός υποσυνόλου $A$ του $\mathbb{R}^n$ αντιστοιχεί έναν πραγματικό αριθμό $f(\overrightarrow{x})$, ονομάζεται **πραγματική** (ή βαθμωτή) **συνάρτηση n μεταβλητών** και συμβολίζεται ως:

$$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \ .$$

Το υποσύνολο $A$ του $\mathbb{R}^n$ ονομάζεται **πεδίο ορισμού** της συνάρτησης $f$.
Το υποσύνολο $f(A)$ του $\mathbb{R}$ το οποίο ορίζεται ως:

$$f(A) := \{y \in \mathbb{R} : y = f(\overrightarrow{x}) \text{ για κάποιο } \overrightarrow{x} \in A\} \ ,$$

ονομάζεται **πεδίο τιμών** (ή **εικόνα**) της συνάρτησης $f$.

**Συμβολισμός:** Το σημείο $\overrightarrow{x} \in A \subseteq \mathbb{R}^n$ γράφεται ως $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ και η συνάρτηση $f(\overrightarrow{x})$ γράφεται ως $f(\overrightarrow{x}) = f(x_1, x_2, ...x_n)$.

Στις ειδικές περιπτώσεις που $n = 2$ ή $n = 3$ συνήθως γράφουμε $\overrightarrow{x} = (x, y)$ ή $\overrightarrow{x} = (x, y, z)$ αντίστοιχα, αντί για $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2)$ ή $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, x_3)$ αντίστοιχα.

**Παράδειγμα:** Η **απόσταση** ενός (οποιουδήποτε) σημείου $(x, y, z)$ από την αρχή των αξόνων $(0, 0, 0)$ είναι μία πραγματική συνάρτηση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ που δίνεται από τον τύπο:

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \ .$$

Επίσης, η απόσταστη ενός σημείου $(x_1, x_2, ...x_n)$ από ένα σταθερό σημείο $(a_1, a_2, ...a_n)$ είναι μία πραγματική συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ που δίνεται από τον τύπο:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + ... + (x_n - a_n)^2} \ .$$

**Πράξεις πραγματικών συναρτήσεων:** Έστω δύο πραγματικές συναρτήσεις $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Τότε ορίζουμε τις εξής συναρτήσεις:

1) Άθροισμα

$$f + g : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \ , \quad \text{όπου} \quad (f + g)(\overrightarrow{x}) = f(\overrightarrow{x}) + g(\overrightarrow{x}) \ ,$$

2) Αριθμητικό γινόμενο

$$\lambda f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \ , \quad \text{όπου} \quad (\lambda f)(\overrightarrow{x}) = \lambda f(\overrightarrow{x}) \quad \text{για } \lambda \in \mathbb{R} \ ,$$

3) Γινόμενο

$$fg : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \ , \quad \text{όπου} \quad (fg)(\overrightarrow{x}) = f(\overrightarrow{x})g(\overrightarrow{x}) \ ,$$

4) Πηλίκο

$$\frac{f}{g} : A_g \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \ , \quad \text{όπου} \quad \left(\frac{f}{g}\right)(\overrightarrow{x}) = \frac{f(\overrightarrow{x})}{g(\overrightarrow{x})} \quad \text{με } A_g := \{\overrightarrow{x} \in A : g(\overrightarrow{x}) \neq 0\} \ .$$

Σχόλιο: Η αφαίρεση πραγματικών συναρτήσεων είναι συνδιασμός των παραπάνω 1) και 2) για $\lambda = -1$, δηλαδή $f - g = f + (-1)g$.

**Γραφική παράσταση πραγματικών συναρτήσεων πολλών μεταβλητών:**

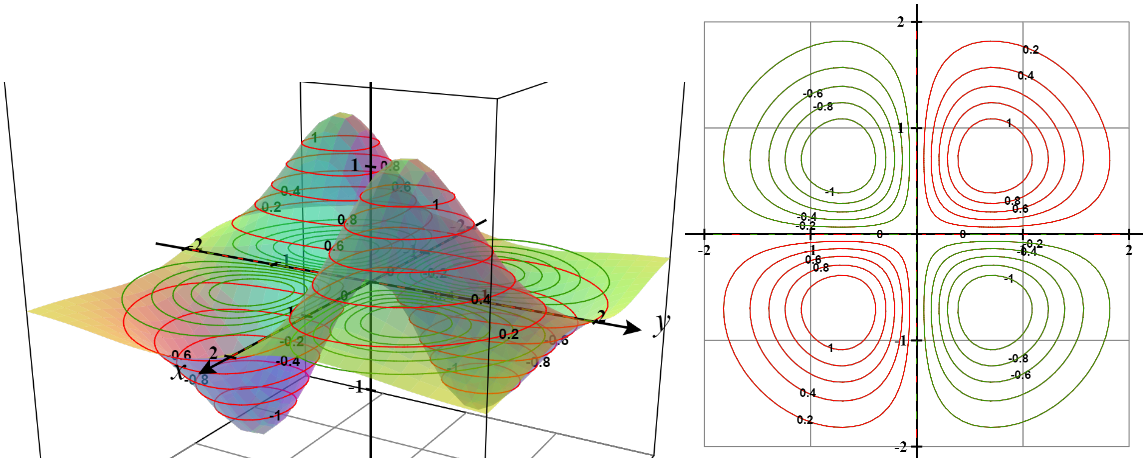
**Ορισμός:** Έστω $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση $n$ μεταβλητών.
Το σύνολο $Graph(f)$ που ορίζεται ως:

$$Graph(f) := \{(x_1, x_2, ..., x_n, f(x_1, x_2, ...x_n)) : (x_1, x_2, ..., x_n) \in A\} ,$$

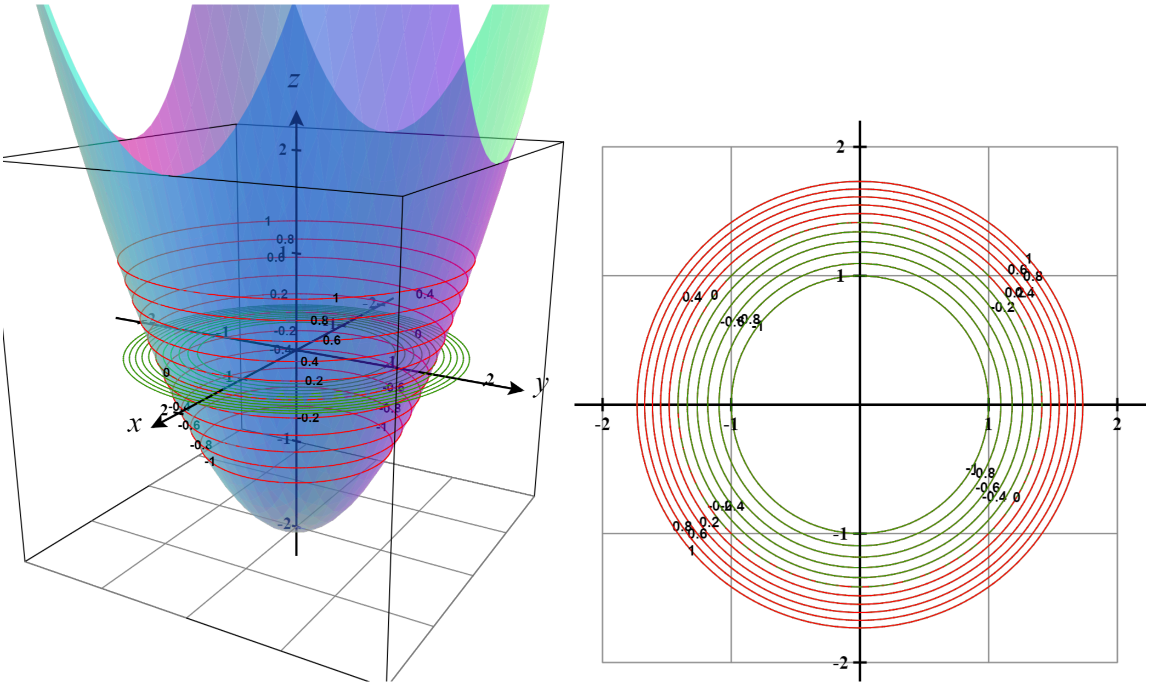
ονομάζεται **γράφημα** της $f$ και είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}^{n+1}$.

Στην ειδική περίπτωση που $n = 1$, δηλαδή η $f$ είναι μία πραγματική συνάρτηση μίας μεταβλητής, τότε ως γράφημά της ορίζεται το υποσύνολο $Graph(f) := \{(x, f(x)) : x \in A\}$ του $\mathbb{R}^2$ και είναι μία καμπύλη του $xy$-επιπέδου με εξίσωση $y = f(x)$. Η σχεδίαση ενός γραφήματος σε αυτήν την περίπτωση ($n = 1$) απαιτεί δύο άξονες (τον $x$-άξονα και τον $y$-άξονα όπου $y = f(x)$).

Στην ειδική περίπτωση που $n = 2$, δηλαδή η $f$ είναι μία πραγματική συνάρτηση δύο μεταβλητών, τότε ως γράφημά της ορίζεται το υποσύνολο $Graph(f) := \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in A\}$ του $\mathbb{R}^3$ και είναι μία επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$ με εξίσωση $z = f(x, y)$. Η σχεδίαση ενός γραφήματος σε αυτήν την περίπτωση ($n = 2$) απαιτεί τρείς άξονες (τον $x$-άξονα, τον $y$-άξονα και τον $z$-άξονα όπου $z = f(x, y)$) και γίνεται με τη βοήθεια ορισμένων ειδικών καμπυλών που ονομάζονται **ισοϋψείς καμπύλες** και βρίσκονται ως τομές της επιφάνειας με εξίσωση $z = f(x, y)$ με τα οριζόντια επίπεδα $z = c$ (όπου $c$ σταθερά) για διάφορες τιμές του $c$. Οι προβολές των ισοϋψών καμπυλών πάνω στο $xy$-επίπεδο ονομάζονται **σταθμικές καμπύλες** και δημιουργούν έναν **τοπογραφικό χάρτη** της επιφάνειας.



- Γράφημα της συνάρτησης $f(x, y) = \dfrac{7xy}{e^{(x^2+y^2)}}$. Στο πρώτο σχήμα βλέπουμε τις ισοϋψείς καμπύλες (κόκκινες καμπύλες) της συνάρτησης και τις σταθμικές καμπύλες (πράσινες καμπύλες). Στο δεύτερο σχήμα βλέπουμε τις σταθμικές καμπύλες (κόκκινες και πράσινες καμπύλες) της συνάρτησης δηλαδή τις προβολές των ισοϋψών καμπυλών στο $xy$-επίπεδο.




- Γράφημα της συνάρτησης $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2$. Στο πρώτο σχήμα βλέπουμε τις ισοϋψείς καμπύλες (κόκκινες καμπύλες) και τις σταθμικές καμπύλες (πράσινες καμπύλες) της συνάρτησης. Στο δεύτερο σχήμα βλέπουμε τις σταθμικές καμπύλες (κόκκινες και πράσινες καμπύλες) της συνάρτησης στο $xy$-επίπεδο.

## Διανυσματικές συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

**Ορισμός**: Μία συνάρτηση η οποία σε κάθε σημείο $\vec{x}$ ενός υποσυνόλου $A$ του $\mathbb{R}^n$ αντιστοιχεί έναν στοιχειο $\vec{f}(\vec{x})$ του $\mathbb{R}^m$, ονομάζεται **διανυσματική συνάρτηση n μεταβλητών** και συμβολίζεται ως:

$$\vec{f} : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \ .$$

Το υποσύνολο $A$ του $\mathbb{R}^n$ ονομάζεται **πεδίο ορισμού** της συνάρτησης $\vec{f}$.
Το υποσύνολο $\vec{f}(A)$ του $\mathbb{R}^m$ το οποίο ορίζεται ως:

$$\vec{f}(A) := \{\vec{y} \in \mathbb{R}^m = \vec{f}(\vec{x}) \text{ για κάποιο } \vec{x} \in A\} \ ,$$

ονομάζεται **πεδίο τιμών** (ή **εικόνα**) της συνάρτησης $\vec{f}$.

**Συμβολισμός:** Το σημείο $\vec{x} \in A \subseteq \mathbb{R}^n$ γράφεται ως $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ και η συνάρτηση $\vec{f}(\vec{x})$ γράφεται ως $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(x_1, x_2, ...x_n)$.

Επιπλέον, η συνάρτηση $\vec{f}(\vec{x})$ γράφεται ως $\vec{f}(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), ..., f_m(\vec{x}))$, όπου οι $f_1, f_2, ..., f_m : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι πραγματικές συναρτήσεις $n$ μεταβλητών και ονομάζονται **συνιστώσες συναρτήσεις** της διανυσματικής συνάρτησης $\vec{f}$.

**Πράξεις διανυσματικών συναρτήσεων:** Έστω δύο διανυσματικές συναρτήσεις $\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g} : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Τότε ορίζουμε τις εξής συναρτήσεις:

1) Άθροισμα

$$\overrightarrow{f} + \overrightarrow{g} : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \ , \quad \text{όπου} \quad (\overrightarrow{f} + \overrightarrow{g})(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) + \overrightarrow{g}(\overrightarrow{x}) \ ,$$

2) Αριθμητικό γινόμενο

$$\lambda \overrightarrow{f} : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \ , \quad \text{όπου} \quad (\lambda \overrightarrow{f})(\overrightarrow{x}) = \lambda \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) \quad \text{για } \lambda \in \mathbb{R} \ ,$$

3) Εσωτερικό γινόμενο

$$\overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{g} : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \ , \quad \text{όπου} \quad (\overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{g})(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) \cdot \overrightarrow{g}(\overrightarrow{x}) = \sum_{i=1}^{m} f_i(\overrightarrow{x}) g_i(\overrightarrow{x}) \ ,$$

4) Εξωτερικό γινόμενο (για $n = m = 3$)

$$\overrightarrow{f} \times \overrightarrow{g} : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \ , \quad \text{όπου} \quad \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) \times \overrightarrow{g}(\overrightarrow{x}) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ f_1(\overrightarrow{x}) & f_2(\overrightarrow{x}) & f_3(\overrightarrow{x}) \\ g_1(\overrightarrow{x}) & g_2(\overrightarrow{x}) & g_3(\overrightarrow{x}) \end{vmatrix} \ .$$

## Τοπολογία στον $\mathbb{R}^n$

**Ορισμός**: Έστω $\overrightarrow{x_0} \in \mathbb{R}^n$ και $\varepsilon > 0$. **Ανοικτή μπάλα** του $\mathbb{R}^n$ με κέντρο $\overrightarrow{x_0}$ και ακτίνα $\varepsilon$ καλείται το σύνολο:

$$B(\overrightarrow{x_0}, \varepsilon) = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n \quad : \quad \|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x_0}\| < \varepsilon\}$$

**Ορισμός**: Έστω $\overrightarrow{x_0} \in \mathbb{R}^n$ και $\varepsilon > 0$ . **Κλειστή μπάλα** του $\mathbb{R}^n$ με κέντρο $\overrightarrow{x_0}$ και ακτίνα $\varepsilon$ καλείται το σύνολο:

$$\overline{B}(\overrightarrow{x_0}, \varepsilon) = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n \ : \ \|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x_0}\| \leq \varepsilon\}$$

**Παραδείγματα:**

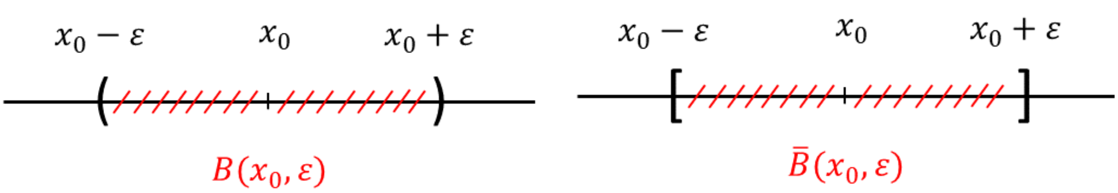
**1.** Για $n = 1$ (δηλαδή στο $\mathbb{R}$) :

$i)$ Ανοικτό διάστημα :

$$B(x_0, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \varepsilon\} = \{x \in \mathbb{R} : x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon\} = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$$

$ii)$ Κλειστό διάστημα :

$$\overline{B}(x_0, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| \leq \varepsilon\} = \{x \in \mathbb{R} : x_0 - \varepsilon \leq x \leq x_0 + \varepsilon\} = [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$$



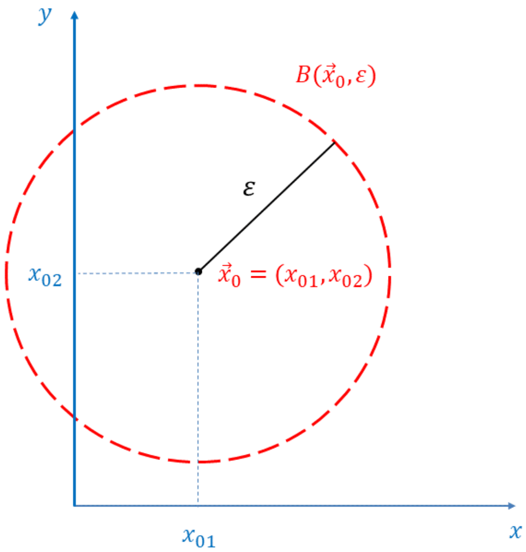

**2.** Για $n = 2$ (δηλαδή στο $\mathbb{R}^2$) :
Έστω $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2)$ και $\overrightarrow{x_0} = (x_{01}, x_{02}) \in \mathbb{R}^2$.

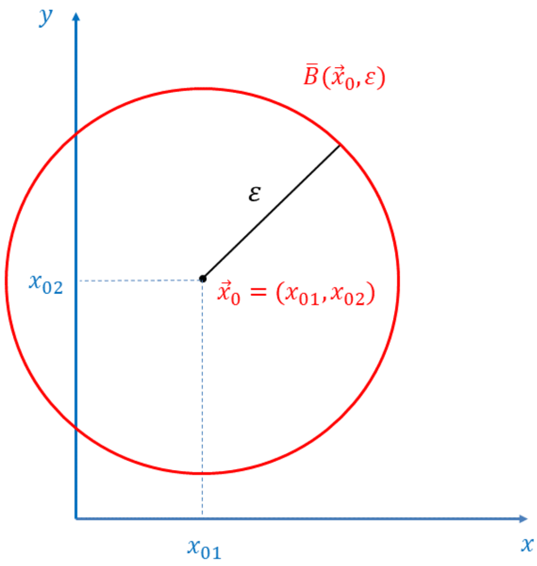
$i)$ Ανοικτή μπάλα :

$$B(\overrightarrow{x_0}, \varepsilon) = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x_0}\| < \varepsilon\} = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x_1 - x_{01})^2 + (x_2 - x_{02})^2} < \varepsilon\}$$

$ii)$ Κλειστή μπάλα :

$$\overline{B}(\overrightarrow{x_0}, \varepsilon) = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x_0}\| \leq \varepsilon\} = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x_1 - x_{01})^2 + (x_2 - x_{02})^2} \leq \varepsilon\}$$




**3.** Για $n = 3$ (δηλαδή στο $\mathbb{R}^3$) :

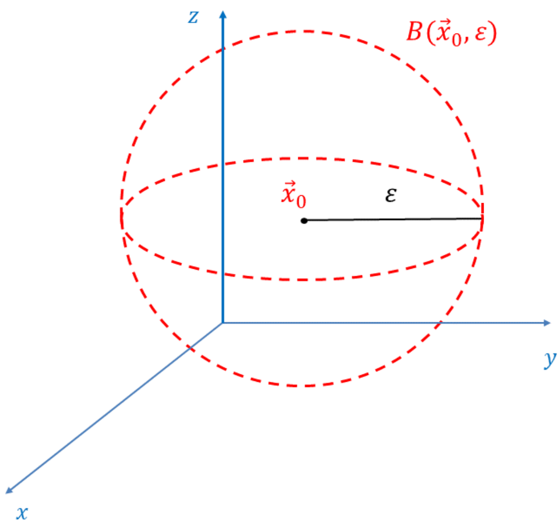
Έστω $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, x_3)$ και $\overrightarrow{x_0} = (x_{01}, x_{02}, x_{03}) \in \mathbb{R}^3$.

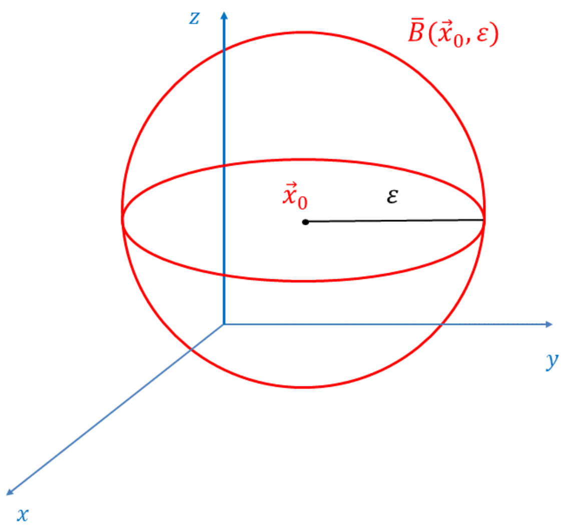
$i)$ Ανοικτή μπάλα :

$B(\overrightarrow{x_0}, \varepsilon) = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x_0}\| < \varepsilon\} = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x_1 - x_{01})^2 + (x_2 - x_{02})^2 + (x_3 - x_{03})^2} < \varepsilon\}$

$ii)$ Κλειστή μπάλα :

$\overline{B}(\overrightarrow{x_0}, \varepsilon) = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x_0}\| \leq \varepsilon\} = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x_1 - x_{01})^2 + (x_2 - x_{02})^2 + (x_3 - x_{03})^2} \leq \varepsilon\}$




**Ορισμός**: Ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ονομάζεται **ανοικτό σύνολο** αν $\forall x \in A, \exists\ \varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $B(x, \varepsilon) \subseteq A$. Δηλαδή για κάθε $x \in A$ να υπάρχει ανοικτή μπάλα με κέντρο $x$ και ακτίνα $\varepsilon$ που να περιέχεται στο $A$.

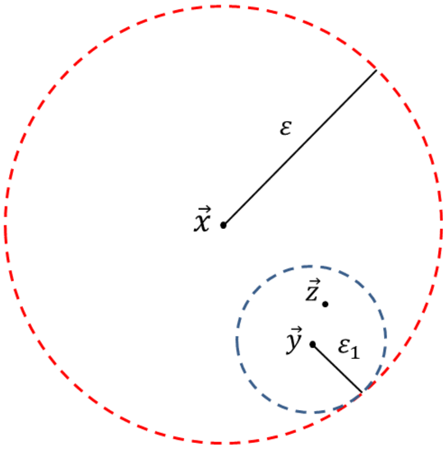
**Ορισμός**: Ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ονομάζεται **κλειστό σύνολο** αν το $A^c$ είναι ανοικτό σύνολο (όπου $A^c$ είναι το συμπλήρωμα του $A$).

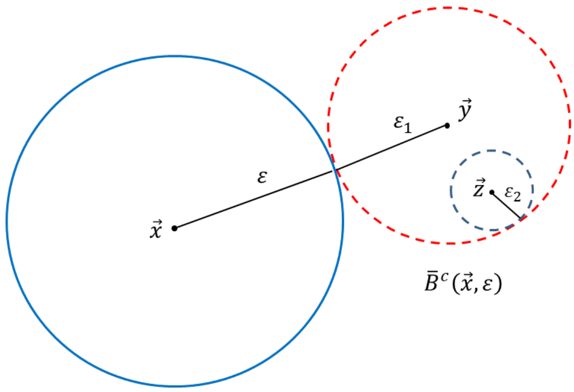
**Πρόταση**:

1. Η ανοικτή μπάλα $B(\overrightarrow{x}, \varepsilon)$ είναι ανοικτό σύνολο.
2. Η κλειστή μπάλα $\overline{B}(\overrightarrow{x}, \varepsilon)$ είναι κλειστό σύνολο.

**Απόδειξη:**
1) $\varepsilon_1 = \varepsilon - ||\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}|| > 0$, με $||\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}|| < \varepsilon$. Ισχύει ότι: $B(\overrightarrow{y}, \varepsilon_1) \subseteq B(\overrightarrow{x}, \varepsilon)$ καθώς αν $\overrightarrow{z} \in B(\overrightarrow{y}, \varepsilon_1) \Rightarrow ||\overrightarrow{z} - \overrightarrow{x}|| \leq ||\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}|| + ||\overrightarrow{y} - \overrightarrow{z}|| \leq ||\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}|| + \varepsilon_1 = \varepsilon$
$\Rightarrow \overrightarrow{z} \in B(\overrightarrow{x}, \varepsilon) \Rightarrow B(\overrightarrow{x}, \varepsilon)$ ανοικτό σύνολο.

2) Για να δειχθεί ότι το $\overline{B}(\overrightarrow{x}, \varepsilon)$ είναι κλειστό σύνολο, αρκεί να δειχθεί ότι το $\overline{B}^c(\overrightarrow{x}, \varepsilon)$ είναι ανοικτό. Για $\overrightarrow{y} \in \overline{B}^c(\overrightarrow{x}, \varepsilon)$ έχω $\varepsilon_1 = ||\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}|| - \varepsilon > 0 \Rightarrow B(\overrightarrow{y}, \varepsilon_1) \subseteq \overline{B}^c(\overrightarrow{x}, \varepsilon) \Rightarrow$ ανοικτό $\Rightarrow \overline{B}(\overrightarrow{x}, \varepsilon)$ κλειστό.



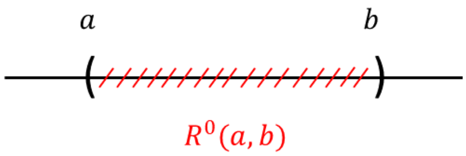

**Ορισμός**: Το καρτεσιανό γινόμενο $I = I_1 \times I_2 \times ... \times I_n$ των διαστημάτων $I_1, I_2, ..., I_n$ του $\mathbb{R}$ ονομάζεται **ορθογώνιο** του $\mathbb{R}^n$. Όταν τα μήκη των $I_1, I_2, ..., I_n$ είναι ίσα, ονομάζεται **κύβος** του $\mathbb{R}^n$.

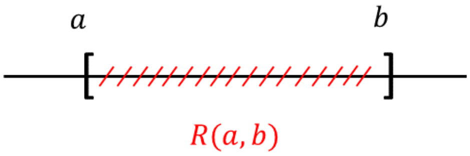
**Ορισμός**: Έστω $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$.
**Ανοικτό ορθογώνιο** του $\mathbb{R}^n$ ονομάζεται το καρτεσιανό γινόμενο $R^o(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times ... \times (a_n \times b_n)$ των ανοικτών διαστημάτων $(a_i, b_i)$, με $a_i < b_i$ $(1 \leq i \leq n)$.
**Ανοικτός κύβος** ονομάζεται το καρτεσιανό γινόμενο $C^o(\overrightarrow{a}, \varepsilon) = (a_1 - \varepsilon, a_1 + \varepsilon) \times (a_2 - \varepsilon, a_2 + \varepsilon) \times ... \times (a_n - \varepsilon, a_n + \varepsilon)$ των ισομηκών ανοικτών διαστημάτων $(a_i - \varepsilon, a_i + \varepsilon)$, $1 \leq i \leq n$.

**Ορισμός**: Έστω $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$.
**Κλειστό ορθογώνιο** του $\mathbb{R}^n$ ονομάζεται το καρτεσιανό γινόμενο $R(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times ... \times [a_n \times b_n]$ των κλειστών διαστημάτων $[a_i, b_i]$, με $a_i < b_i$ $(1 \leq i \leq n)$.
**Κλειστός κύβος** ονομάζεται το καρτεσιανό γινόμενο $C(\overrightarrow{a}, \varepsilon) = [a_1 - \varepsilon, a_1 + \varepsilon] \times [a_2 - \varepsilon, a_2 + \varepsilon] \times ... \times [a_n - \varepsilon, a_n + \varepsilon]$ των ισομηκών κλειστών διαστημάτων $[a_i - \varepsilon, a_i + \varepsilon]$, $1 \leq i \leq n$.

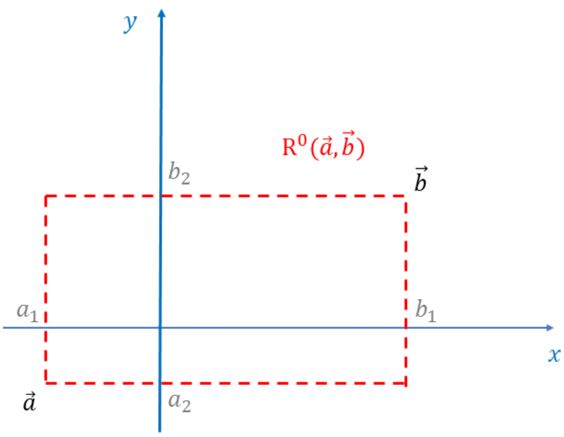
**Παραδείγματα:**

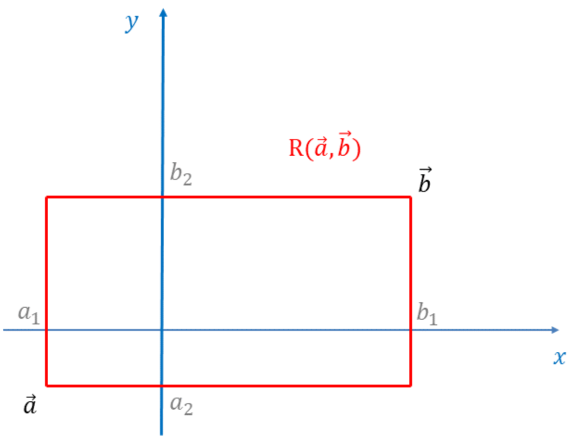
**1.** Για $n = 1$, δηλαδή στο $\mathbb{R}$ :
$i)$ Ανοικτό ορθογώνιο:
$R^o(a, b) = (a, b)$ (δηλαδή το ανοικτό διάστημα).
$ii)$ Κλειστό ορθογώνιο:
$R(a, b) = [a, b]$ (δηλαδή το κλειστό διάστημα).



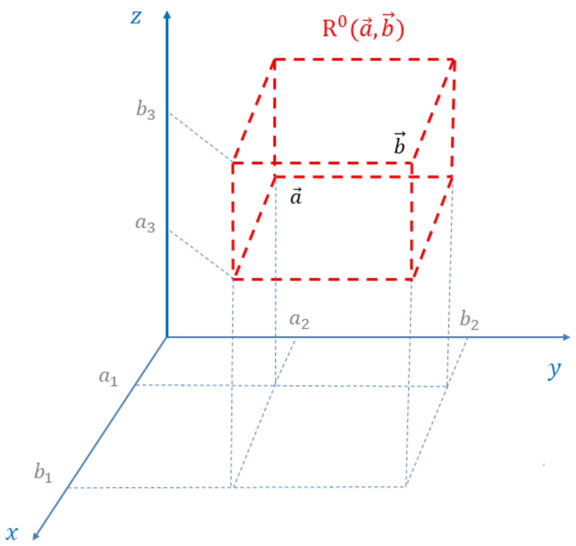



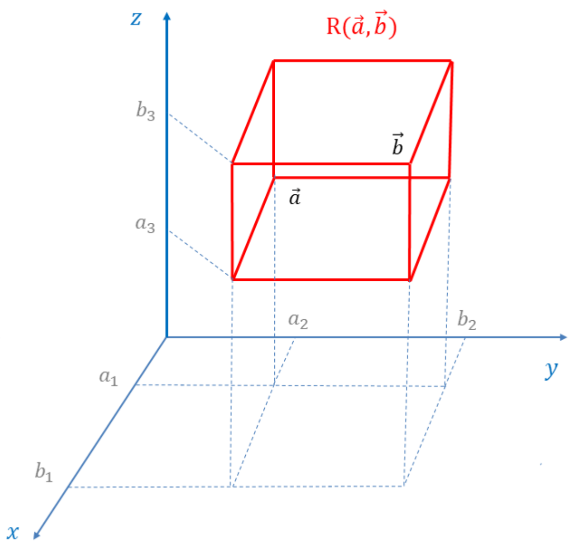

**2.** Για $n = 2$, δηλαδή στο $\mathbb{R}^2$ :
Έστω $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2)$, $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2)$
$i)$ Ανοικτό ορθογώνιο:
$R^o(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$.
$ii)$ Κλειστό ορθογώνιο:
$R(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$.




**3.** Για $n = 3$, δηλαδή στο $\mathbb{R}^3$ :
Έστω $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2, b_3)$
$i)$ Ανοικτό ορθογώνιο:
$R^o(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times (a_3, b_3)$.
$ii)$ Κλειστό ορθογώνιο:
$R(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$.






**Πρόταση**:

1. Το ανοικτό ορθογώνιο $R^o(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ είναι ανοικτό σύνολο.
2. Το κλειστό ορθογώνιο $R(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ είναι κλειστό σύνολο.

**Ορισμός**: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Ένα $\overrightarrow{x_0} \in \mathbb{R}^n$ λέγεται **σημείο συσσώρευσης (σ.σ.)** του $A$

αν $\forall \varepsilon > 0 \quad (B(\overrightarrow{x_0}, \varepsilon) \setminus \{\overrightarrow{x_0}\}) \cap A \neq \emptyset \;\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \overrightarrow{a} \in A: \quad 0 < \|\overrightarrow{x_0} - \overrightarrow{a}\| < \varepsilon$ .

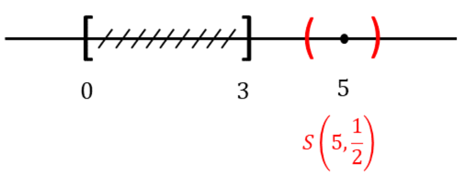
Το σύνολο των σ.σ. του $A$ συμβολίζεται με $A'$.

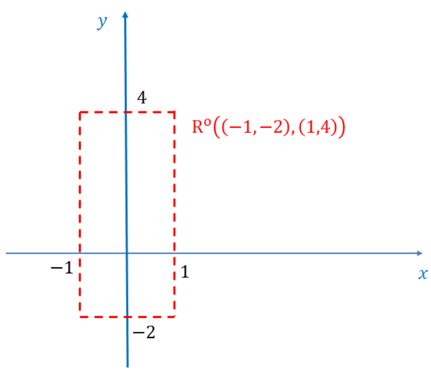
**Ορισμός**: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Ένα $\overrightarrow{x_0} \in A$ λέγεται **μεμονωμένο σημείο** του $A$

αν δεν είναι σ.σ. $\Leftrightarrow \;\exists \varepsilon > 0 : (B(\overrightarrow{x_0}, \varepsilon) \setminus \{\overrightarrow{x_0}\}) \cap A = \emptyset \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : B(\overrightarrow{x_0}, \varepsilon) \cap A = \{\overrightarrow{x_0}\}$ .

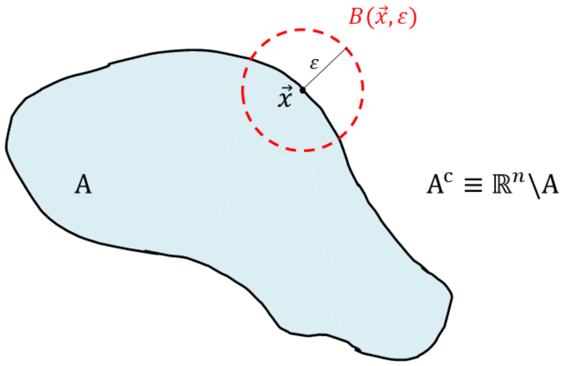
**Παραδείγματα:**

**1.** Έστω $A = [0,3]$. Τότε το σύνολο των σημείων συσσώρευσης του $A$ είναι το $A' = [0,3]'$. Ομοίως $(0,3)' = [0,3)' = (0,3]' = [0,3]$.
**2.** Έστω $A = [0,3] \cup \{5\}$. Τότε το σύνολο των σημείων συσσώρευσης είναι το $A' = [0,3]$ και το $\{5\}$ είναι μεμονωμένο σημείο, καθώς $\exists \varepsilon > 0$ (έστω $\varepsilon = \frac{1}{2}$) ώστε $B(5, \frac{1}{2}) \cap A = \{5\}$.
**3.** Έστω το ανοικτό ορθογώνιο του $\mathbb{R}^2$ $R^o\left((-1,-2),(1,4)\right) = (-1,1) \times (-2,4)$. Τότε το σύνολο των σημείων συσσώρευσης του $R^o$ είναι το $R'\left((-1,-2),(1,4)\right) = [-1,1] \times [-2,4]$.





**Ορισμός**: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$. **Σύνορο** του $A$ λέγεται το σύνολο
$\partial A = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \forall \varepsilon > 0 \quad B(\vec{x},\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ και $B(\vec{x},\varepsilon) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset\}$.




**Παραδείγματα:**
**1.** Έστω το σύνολο $A = [0,3]$. Το σύνορο του $A$ είναι το $\partial A = \partial([0,3]) = \{0,3\}$.
**2.** Έστω το ορθογώνιο $R^o\left((-1,-2),(1,4)\right) = (-1,1) \times (-2,4)$. Το σύνορο του $R^o$ είναι το $\partial R^o = \{(x,-2) : -1 \leq x \leq 1\} \cup \{(-1,y) : -2 \leq y \leq 4\} \cup \{(x,4) : -1 \leq x \leq 1\} \cup \{(1,y) : -2 \leq y \leq 4\}$.(Δηλαδή η περίμετρος του ορθογωνίου $R^o$)
**3.** Έστω μία μπάλα $B(x_0,\varepsilon)$. Το σύνορο της είναι : $\partial B(x_0,\varepsilon) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x} - \vec{x_0}\| = \varepsilon\}$.

**Πρόταση**: Έστω $A \in \mathbb{R}^n$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:
1) $A$ κλειστό σύνολο
2) $A' \subseteq A$
3) $\partial A \subseteq A$

## Ακολουθίες του $\mathbb{R}^n$

**Ορισμός:** Μία συνάρτηση $\vec{a} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ ονομάζεται **ακολουθία του** $\mathbb{R}^n$ (όπου $\mathbb{N}$ το σύνολο των φυσικών αριθμών).

**Συμβολισμός:** Η τιμή $\vec{a}(\nu)$ της συνάρτησης $\vec{a}$ για κάποιο $\nu \in \mathbb{N}$ συμβολίζεται με $\vec{a_\nu}$ και η ακολουθία $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ συμβολίζεται με $(\vec{a_\nu})$. Η τιμή $\vec{a_\nu}$ ονομάζεται ν-οστός όρος της ακολουθίας $(\vec{a_\nu})$ και είναι ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$ της μορφής $\vec{a_\nu} = (a_{1\nu}, a_{2\nu}, ..., a_{n\nu})$. Έτσι, οι ακολουθίες $(a_{n1})$ , $(a_{n2})$ , ... , $(a_{n\nu})$ του $\mathbb{R}$ ονομάζονται συνιστώσες ακολουθίες της ακολουθίας $(\vec{a_\nu})$ του $\mathbb{R}^n$.

**Ορισμός:** Μία ακολουθία $(\vec{a_\nu})$ του $\mathbb{R}^n$ λέμε ότι **συγκλίνει** στο στοιχείο $\vec{a}$ του $\mathbb{R}^n$ ή ότι έχει όριο το $\vec{a}$ (δηλαδή $\vec{a_\nu} \to \vec{a}$), όταν η ακολουθία $(||\vec{a_\nu} - \vec{a}||)$ του $\mathbb{R}$ είναι μηδενική (δηλαδή $||\vec{a_n} - \vec{a}|| \to 0$), δηλαδή όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει φυσικός αριθμός N =N($\varepsilon$) έτσι ώστε να ισχύει:
$$||\vec{a_n} - \vec{a}|| < \varepsilon \quad \text{για κάθε} \quad \nu \geq N \ .$$

Μία ακολουθία $(\vec{a_\nu})$ του $\mathbb{R}^n$ που έχει όριο ονομάζεται **συγκλίνουσα** ακολουθία του $\mathbb{R}^n$.
Το όριο $\vec{a}$ της ακολουθίας $(\vec{a_\nu})$ συμβολίζεται και ως $\lim_{\nu \to \infty} \vec{a_\nu} = \vec{a}$ ή $\lim \vec{a_\nu} = \vec{a}$.

**Πρόταση:** Το όριο μίας ακολουθίας $(\vec{a_\nu})$ του $\mathbb{R}^n$ (αν υπάρχει) είναι μοναδικό.

**Θεώρημα:** Έστω $(\overrightarrow{a_\nu})$ μια ακολουθία του $\mathbb{R}^n$ και $(\overrightarrow{a_{i\nu}})$ $(1 \leq i \leq n)$ οι συνιστώσες ακολουθίες της $(\overrightarrow{a_\nu})$. Επίσης έστω $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, ...a_n)$ ένα στοιχείο του $\mathbb{R}^n$. Τότε τα ακόλουθα

είναι ισοδύναμα:

$$1) \quad \overrightarrow{a_\nu} \to \overrightarrow{a}$$

$$2) \quad a_{i\nu} \to a_i \text{ (για κάθε } 1 \leq i \leq n) \ .$$

**Πρόταση:** Έστω $(\overrightarrow{a_\nu})$ μια ακολουθία του $\mathbb{R}^n$ και $\overrightarrow{a}$ ένα στοιχείο του $\mathbb{R}^n$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

$$1) \quad \text{Αν } \overrightarrow{a_\nu} \to \overrightarrow{a} \quad \text{τότε} \quad ||\overrightarrow{a_\nu}|| \to ||\overrightarrow{a}|| \quad \text{(Το αντίστροφο δεν ισχύει)} \ .$$

$$2) \quad \overrightarrow{a_\nu} \to \overrightarrow{0} \quad \text{αν και μόνο αν} \quad ||\overrightarrow{a_\nu}|| \to 0 \ .$$

**Θεώρημα:** Έστω $(\overrightarrow{a_\nu})$ και $(\overrightarrow{b_\nu})$ δύο συγκλίνουσες ακολουθίες του $\mathbb{R}^n$ με όρια τα στοιχεία $\overrightarrow{a}$ και $\overrightarrow{b}$ του $\mathbb{R}^n$ αντίστοιχα, δηλαδή $\overrightarrow{a_\nu} \to \overrightarrow{a}$ και $\overrightarrow{b_\nu} \to \overrightarrow{b}$. Τότε ισχύουν τα παρακάτω:

$$\begin{array}{ll} 1) & \overrightarrow{a_\nu} + \overrightarrow{b_\nu} \to \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} \\ 2) & \lambda\overrightarrow{a_\nu} \to \lambda\overrightarrow{a} \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \\ 3) & \overrightarrow{a_\nu} \cdot \overrightarrow{b_\nu} \to \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} \\ 4) & \overrightarrow{a_\nu} \times \overrightarrow{b_\nu} \to \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} \text{ (για } n = 3) \ . \end{array}$$

**Ορισμός:** Μία ακολουθία $(k_\nu)$ φυσικών αριθμών τέτοια ώστε $k_\nu < k_{\nu+1}$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ ονομάζεται υπακολουθία φυσικών αριθμών.

**Ορισμός:** Έστω ακολουθία $(\overrightarrow{a_\nu})$ του $\mathbb{R}^n$ και $(k_\nu)$ μία υπακολουθία φυσικών αριθμών. Τότε η ακολουθία $(\overrightarrow{a_{k_\nu}})$ ονομάζεται **υπακολουθία** της ακολουθίας $(\overrightarrow{a_\nu})$.

**Πρόταση:** Αν μία ακολουθία $(\overrightarrow{a_\nu})$ του $\mathbb{R}^n$ συγκλίνει στο $\overrightarrow{a}$ του $\mathbb{R}^n$ (δηλαδή $\overrightarrow{a_\nu} \to \overrightarrow{a}$), τότε κάθε υπακολουθία της $\overrightarrow{a_{k_\nu}}$ συγκλίνει στο $\overrightarrow{a}$ (δηλαδή $\overrightarrow{a_{k_\nu}} \to \overrightarrow{a}$).

**Ορισμός:** Μία ακολουθία $(\overrightarrow{a_\nu})$ του $\mathbb{R}^n$ ονομάζεται **φραγμένη** όταν υπάρχει πραγματικός αριθμός $M > 0$ τέτοιος ώστε να ισχύει:

$$||\overrightarrow{a_\nu}|| \leq M \quad \text{για κάθε} \quad \nu \in \mathbb{N} \ .$$

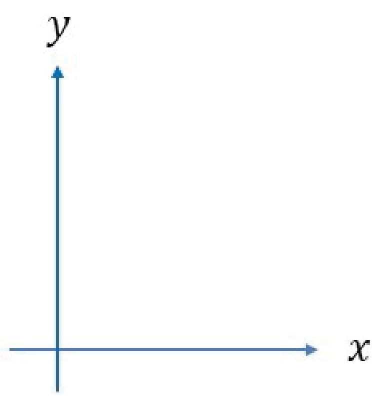
**Πρόταση:** Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία $(\overrightarrow{a_\nu})$ του $\mathbb{R}^n$ είναι φραγμένη.

**Θεώρημα** $(Bolzano - Weierstrass)$ **:** Κάθε φραγμένη ακολουθία του $\mathbb{R}^n$ έχει μία συγκλίνουσα υπακολουθία.

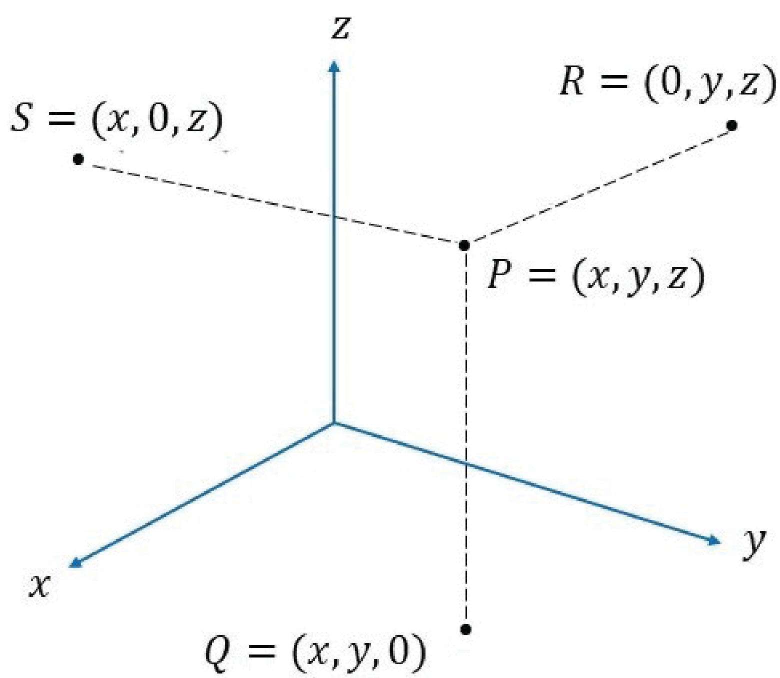
## Καρτεσιανές Συντεταγμένες

Στο $\mathbb{R}$: $x$


Στο $\mathbb{R}^2$: $(x, y)$

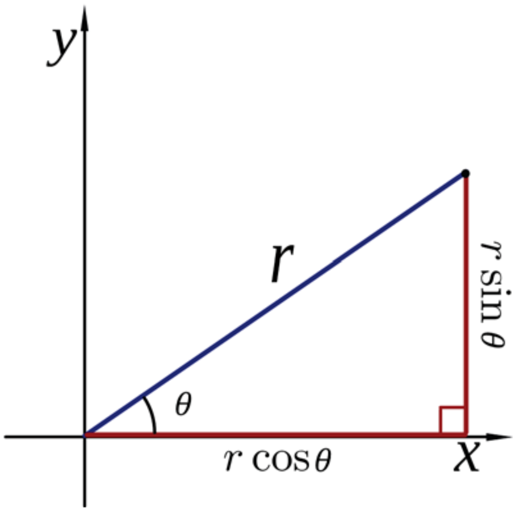



Στο $\mathbb{R}^3$: $(x, y, z)$



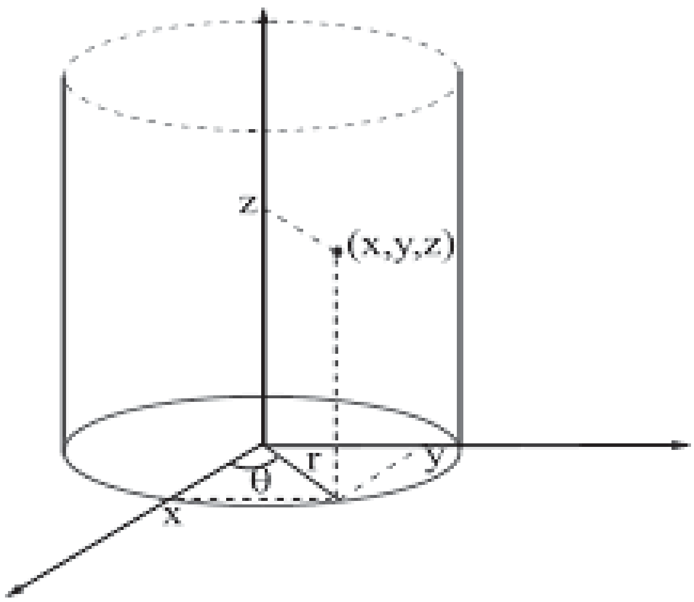
Πολικός Μετασχηματισμός (στο $\mathbb{R}^2$)

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$



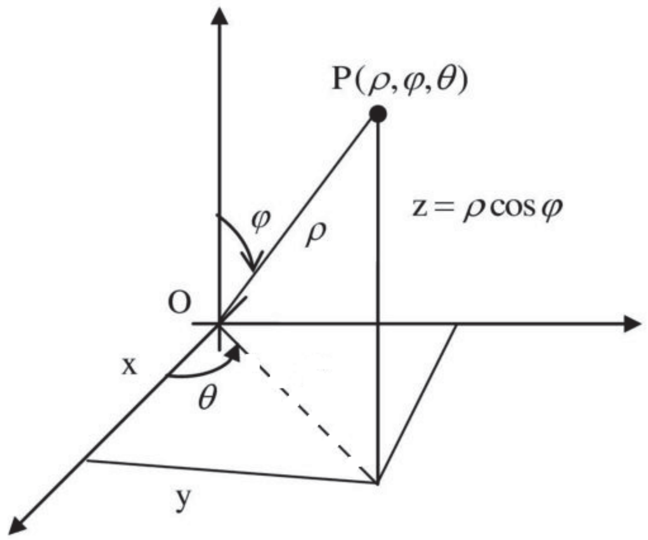

Κυλινδρικός Μετασχηματισμός (στο $\mathbb{R}^3$)

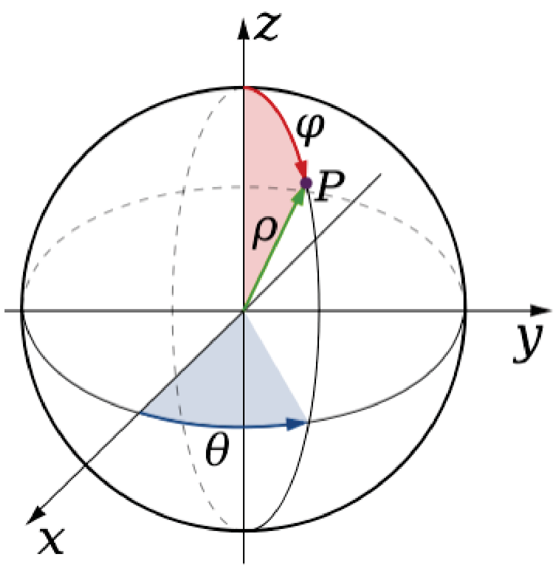
$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$
$$z = z$$



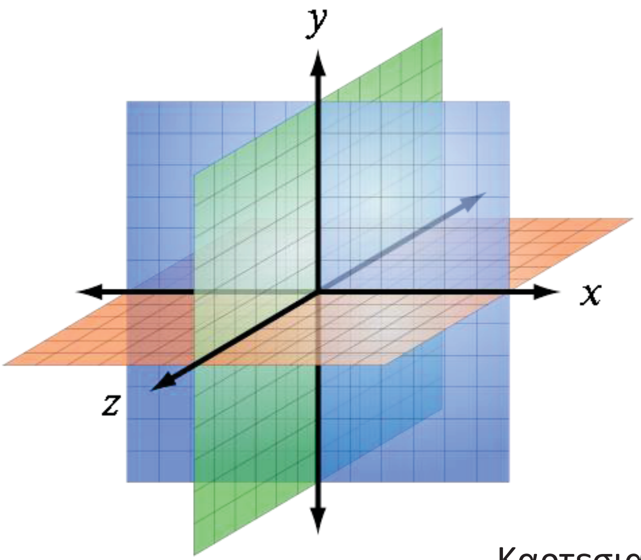
## Σφαιρικός Μετασχηματισμός (στο $\mathbb{R}^3$)

$$x = \rho\cos\theta\sin\phi\ , \quad 0 \le \theta < 2\pi$$
$$y = \rho\sin\theta\sin\phi\ , \quad 0 \le \phi < \pi$$
$$z = \rho\cos\phi\ , \quad 0 \le \rho < \infty$$

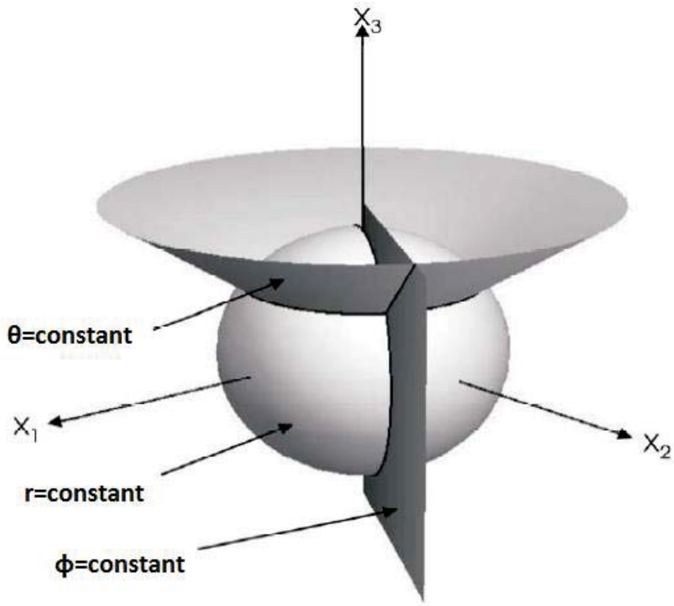


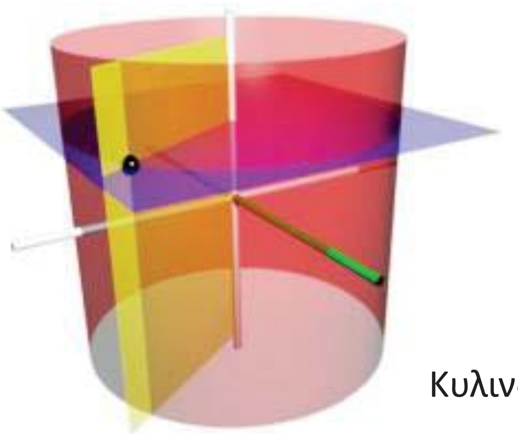
## Συστήματα Συντεταγμένων




Καρτεσιανό




Σφαιρικό



Κυλινδρικό

# Τετραγωνικές Επιφάνειες
# (Quadric Surfaces)

Η **γενική εξίσωση δευτέρου βαθμού με τρείς μεταβλητές** είναι :

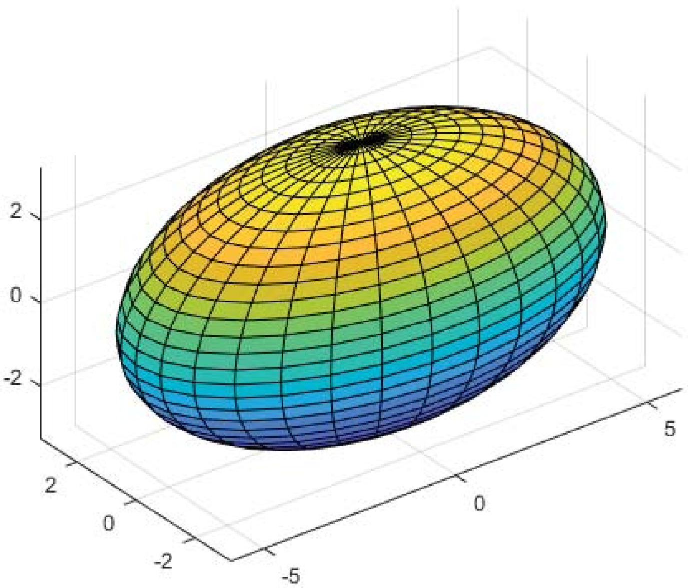
$$\mathrm{Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0}\ ,$$

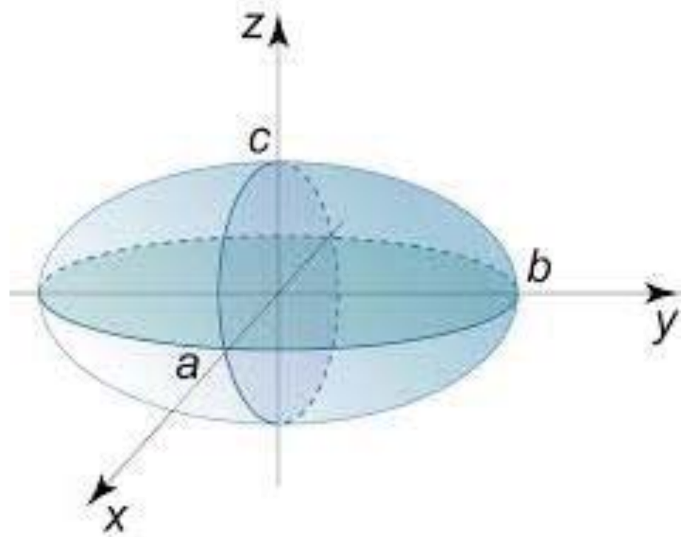
όπου A,B,C,D,E και F δεν είναι όλα μηδέν.
Τα γραφήματα αυτών των εξισώσεων ονομάζονται **τετραγωνικές επιφάνειες.**

Για να σχεδιάσουμε το γράφημα μιας τετραγωνικής επιφάνειας προσδιορίζουμε και σχεδιάζουμε τις καμπύλες της τομής της επιφάνειας με ορισμένα παράλληλα επίπεδα προς τα επίπεδα των συντεταγμένων. Αυτές οι καμπύλες ονομάζονται **ίχνη ή τομές** της επιφάνειας.

Εμείς θα μελετήσουμε τις περιπτώσεις
$\mathrm{Ax^2 + By^2 + Cz^2 + J = 0}$ και $\mathrm{Ax^2 + By^2 + Iz = 0}$.

# Τετραγωνικές Επιφάνειες



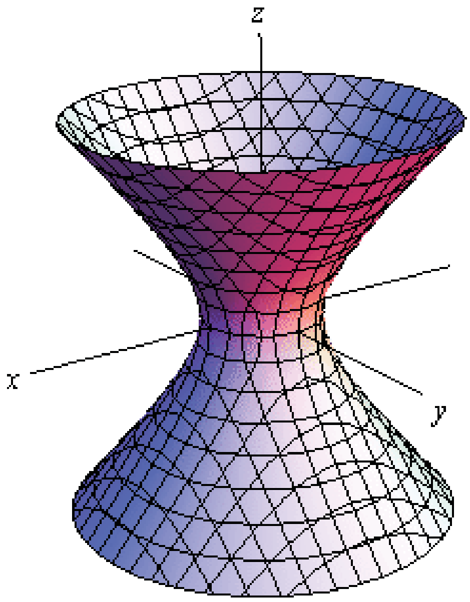




Ελλειψοειδές
(Ellipsoidal) :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

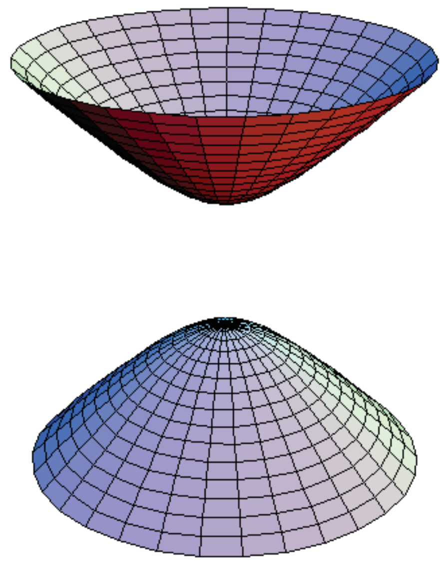
Ονομάζεται ελλειψοειδές
διότι τα ίχνη της είναι ελλείψεις

# Τετραγωνικές Επιφάνειες




Μονόχωνο Υπερβολοειδές
(Hyperboloid of one sheet) :

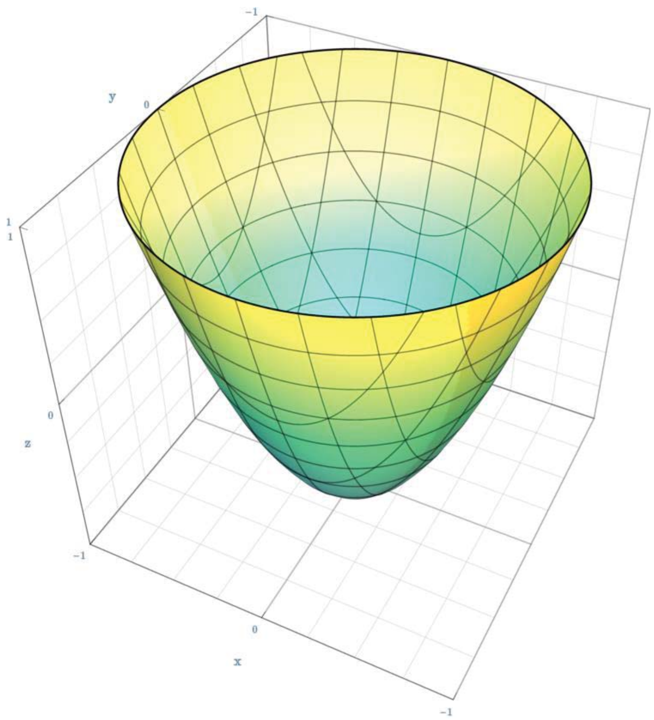
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



Δίχωνο Υπερβολοειδές
(Hyperboloid of two sheets) :

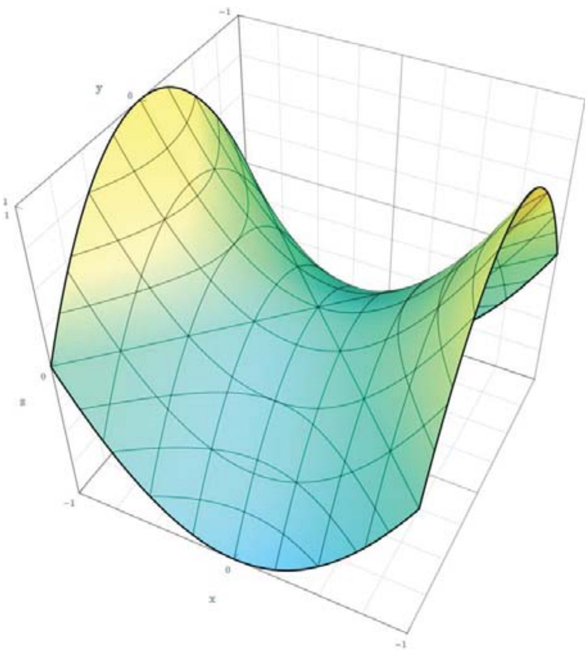
$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

# Τετραγωνικές Επιφάνειες



Ελλειπτικό Παραβολοειδές
(Elliptic Paraboloid) :

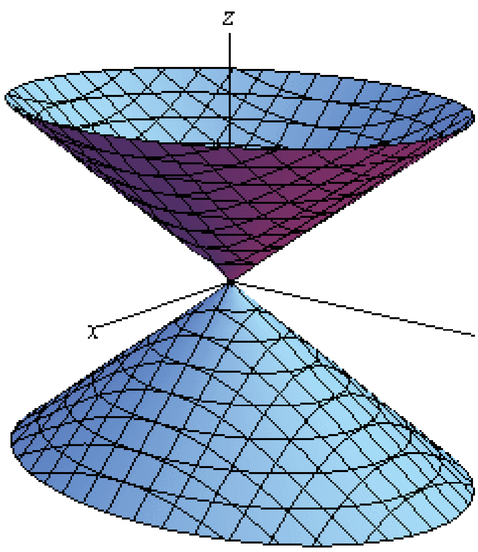
$$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

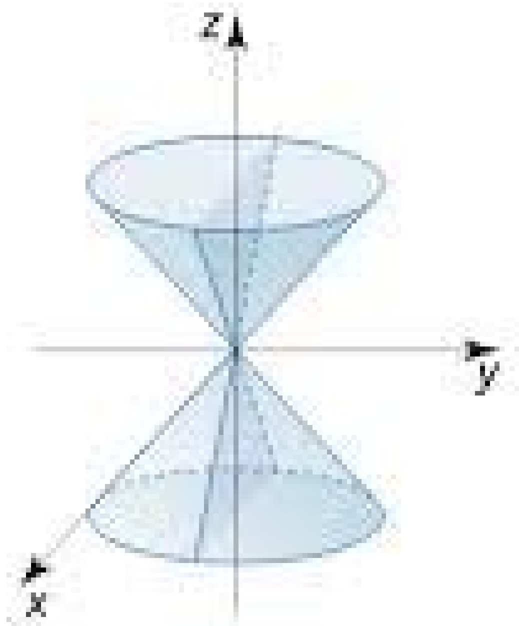


Υπερβολικό Παραβολοειδές
(Hyperbolic Paraboloid) :

$$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

# Τετραγωνικές Επιφάνειες

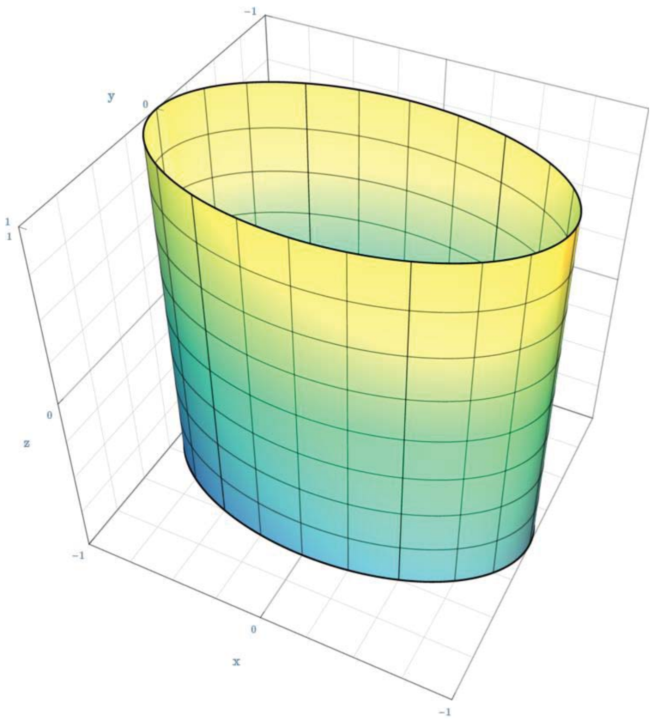


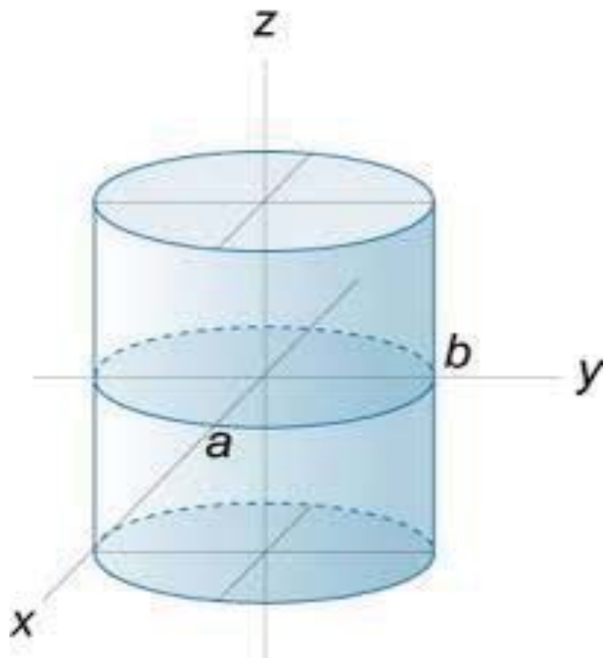




Ελλειπτικός Κώνος
(Elliptic Cone) :

$$\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

## Τετραγωνικές Επιφάνειες

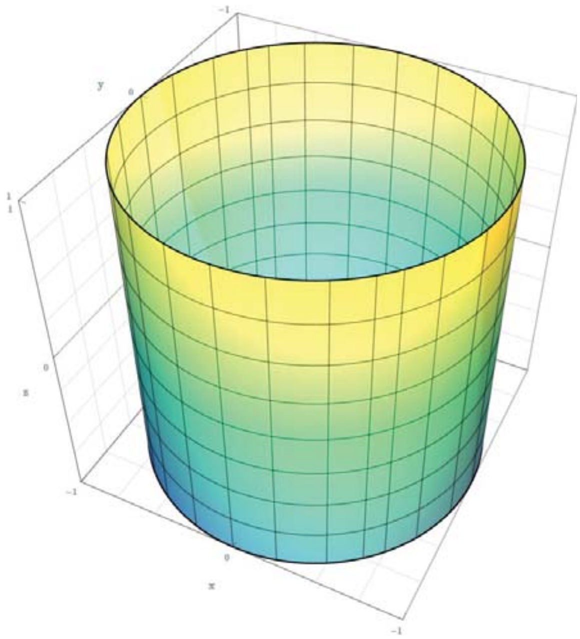




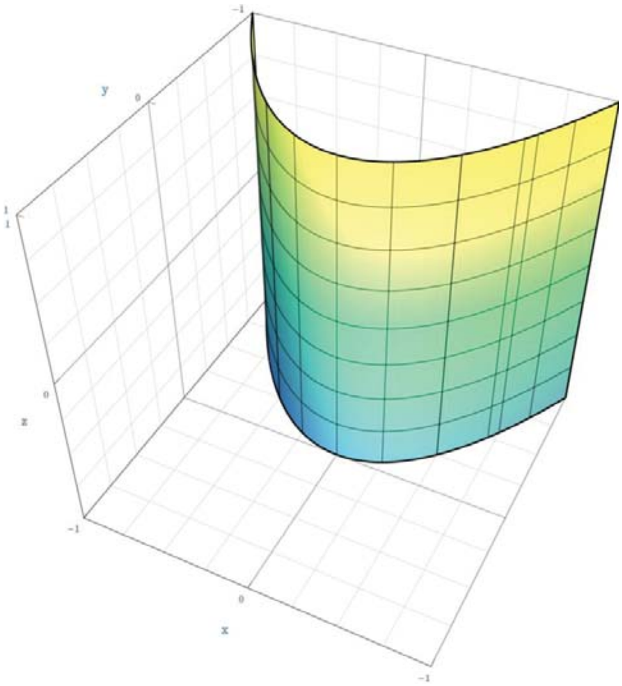

Ελλειπτικός Κύλινδρος
(Elliptic Cylinder) :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

# Τετραγωνικές Επιφάνειες



Κυκλικός Κύλινδρος
(Circular Cylinder) :
$x^2 + y^2 = 1$



Παραβολικός Κύλινδρος
(Parabolic Cylinder) :
$y = ax^2$