Διαφορισιμότητα Πραγματικών Συναρτήσεων

Ορισμός 1: Έστω $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών με A ανοικτό. Η συνάρτηση f ονομάζεται **διαφορίσιμη σε ένα σημείο** $\overrightarrow{a}$ του A, όταν υπάρχει γραμμικός μετασχηματισμός $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ έτσι ώστε να ισχύει

$$\lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{a}} \frac{|f(\overrightarrow{x}) - f(\overrightarrow{a}) - T(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a})|}{||\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a}||} = 0 \ ,$$

ή ισοδύναμα

$$\lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{a}} \frac{f(\overrightarrow{x}) - f(\overrightarrow{a}) - T(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a})}{||\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a}||} = 0 \ ,$$

για $\overrightarrow{x} \in A$ με $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{a}$.

Πρόταση 1: Έστω $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών με A ανοικτό. Η συνάρτηση f είναι **διαφορίσιμη στο σημείο** $\overrightarrow{a}$ του A αν και μόνο αν υπάρχει ένας $1 \times n$ πίνακας $\mathcal{A}$ έτσι ώστε να ισχύει

$$\lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{a}} \frac{|f(\overrightarrow{x}) - f(\overrightarrow{a}) - \mathcal{A} \cdot (\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a})|}{||\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a}||} = 0 \ ,$$

ή ισοδύναμα

$$\lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{a}} \frac{f(\overrightarrow{x}) - f(\overrightarrow{a}) - \mathcal{A} \cdot (\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a})}{||\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a}||} = 0 \ ,$$

όπου $\mathcal{A} \cdot (\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a})$ είναι το γινόμενο του $1 \times n$ πίνακα $\mathcal{A}$ με τον $n \times 1$ πίνακα $\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a}$ (δηλαδή είναι ένα στοιχείο του $\mathbb{R}$ αφού $(1 \times n)(n \times 1) = 1 \times 1$).

Θεώρημα 1: Έστω $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών, η οποία είναι διαφορίσιμη στο σημείο $\overrightarrow{a} \in A$. Τότε η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $\overrightarrow{a}$. Επιπλέον ισχύουν τα παρακάτω:

$$T(\overrightarrow{x}) = f_{x_1}(\overrightarrow{a})x_1 + f_{x_2}(\overrightarrow{a})x_2 + ... + f_{x_n}(\overrightarrow{a})x_n \ ,$$

για κάθε $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ και

$$\mathcal{A} = f'(\overrightarrow{a}) = [\ f_{x_1}(\overrightarrow{a})\ f_{x_2}(\overrightarrow{a})\ ...\ f_{x_n}(\overrightarrow{a})\,] \ ,$$

όπου T ο μετασχηματισμός του Ορισμού 1 και $\mathcal{A}$ ο πίνακας της Πρότασης 1.

Ορισμός 2: Έστω $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών με A ανοικτό, η οποία είναι διαφορίσιμη σε ένα σημείο $\overrightarrow{a} \in A$. Τότε **διαφορικό της συνάρτησης f στο σημείο $\overrightarrow{a}$** ονομάζεται ο γραμμικός μετασχηματισμός $Df(\overrightarrow{a}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$Df(\overrightarrow{a})(\overrightarrow{x}) := \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\overrightarrow{a})x_i \ ,$$

για $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Θεώρημα 2: Έστω $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών με A ανοικτό και $\overrightarrow{a} \in A$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
1. Η συνάρτηση f είναι διαφορίσιμη στο σημείο $\overrightarrow{a}$.
2. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $\overrightarrow{a}$ και ισχύει:

$$\lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{a}} \frac{f(\overrightarrow{x}) - f(\overrightarrow{a}) - f'(\overrightarrow{a}) \cdot (\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a})}{||\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a}||} = 0 \ ,$$

όπου $f'(\overrightarrow{a}) \cdot (\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a})$ είναι το γινόμενο του $1 \times n$ πίνακα $f'(\overrightarrow{a})$ με τον $n \times 1$ πίνακα $\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a}$, η οποία γράφεται ισοδύναμα ως

$$\lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{a}} \frac{f(\overrightarrow{x}) - f(\overrightarrow{a}) - \nabla f(\overrightarrow{a}) \cdot (\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a})}{||\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a}||} = 0 \ .$$

Επιπλέον, αν ισχύει ένας από τους παραπάνω ισοδύναμους ισχυρισμούς τότε για το διαφορικό της f στο σημείο $\overrightarrow{a}$ ισχύει ο ακόλουθος τύπος:

$$Df(\overrightarrow{a})(\overrightarrow{x}) = f'(\overrightarrow{a}) \cdot \overrightarrow{x} = Jf(\overrightarrow{a}) \cdot \overrightarrow{x} = \nabla f(\overrightarrow{a}) \cdot \overrightarrow{x}$$

Πόρισμα 2: Έστω $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μία διαφορίσιμη συνάρτηση στο σημείο $\overrightarrow{a} \in A$. Τότε η f είναι συνεχής στο σημείο $\overrightarrow{a}$. Ο αντίθετος ισχυρισμός δεν ισχύει πάντα.

Θεώρημα 3: Έστω $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μία C^1 συνάρτηση (ή αλλιώς συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση) σε ένα σημείο $\overrightarrow{a} \in A$. Τότε η συνάρτηση f είναι διαφορίσιμη στο σημείο $\overrightarrow{a}$. Ο αντίθετος ισχυρισμός δεν ισχύει πάντα.

Παρατήρηση: Μία διαφορίσιμη συνάρτηση σε ένα σημείο $\overrightarrow{a}$, έχει μερικές παραγώγους $f_{x_i}(\overrightarrow{a})$ $(1 \leq i \leq n)$ στο $\overrightarrow{a}$. Ο αντίθετος ισχυρισμός δεν ισχύει πάντα.

Άσκηση 1: Να δειχθεί ότι η παρακάτω συνάρτηση f είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$ με διαφορικό $Df(0,0) = 0$, όπου

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Λύση: Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο
$f'(0,0) = [f_x(0,0)\ ,\ f_y(0,0)] = [\,0\ \ 0\,]$ ή ισοδύναμα με κλίση (ανάδελτα)
$\nabla f(0,0) = (f_x(0,0),\ f_y(0,0)) = (0,0)$. Επίσης,

$$\frac{|f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot(x,y)|}{||(x,y)-(0,0)||} = \frac{|f(x,y) - (0,0)\cdot(x,y)|}{||(x,y)-(0,0)||}$$

$$= \frac{\dfrac{|x|y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{|x|y^2}{x^2+y^2} \leq \frac{|x|y^2}{y^2} = |x| \to 0$$

για $(x,y) \to (0,0)$. Επομένως από την παραπάνω σχέση και τις ιδιότητες ορίων έχουμε ότι:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot(x,y)|}{||(x,y)-(0,0)||} = 0\ .$$

Επομένως από το Θεώρημα 2 έχουμε ότι το διαφορικό δίνεται από τον τύπο

$$Df(0,0)(x,y) = \nabla f(0,0) \cdot (x,y) = (0,0) \cdot (x,y) = 0x + 0y = 0 \ .$$

Άσκηση 2: Να αποδειχθεί ότι η παρακάτω συνάρτηση f δεν είναι διαφορίσιμη στο σημείο $(0,0)$, όπου

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}\,, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad .$$

Λύση: Η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$, καθώς για τις διαδρομές $y=0$ και $x=y$ παίρνουμε αντίστοιχα $f(x,0)=0 \to 0$ και $f(x,x) = \dfrac{1}{2} \to \dfrac{1}{2}$, για $x \to 0$. Άρα δεν υπάρχει το όριο $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. Άρα η συνάρτηση δεν ειναι συνεχής στο (0,0). Επομένως από το Πόρισμα 2 η f δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$.

Παράγωγος και Διαφορικό Διανυσματικών Συναρτήσεων

Παραγωγισιμότητα διανυσματικής συνάρτησης

Ορισμός 1: Έστω $\overrightarrow{f} : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ μία διανυσματική συνάρτηση n μεταβλητών. Η συνάρτηση $\overrightarrow{f}$ ονομάζεται **παραγωγίσιμη σε ενα σημείο** $\overrightarrow{a} \in A$ όταν οι συνιστώσες (πραγματικές) συναρτήσεις $f_j : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ για $j = 1, 2, .., m$, είναι παραγωγίσιμες στο σημείο $\overrightarrow{a}$, δηλαδή όταν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $f_{j_{x_i}}(\overrightarrow{a}) \equiv \dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}(\overrightarrow{a})$ για κάθε $i = 1, 2, ..., n$ και $j = 1, 2, ..., m$. Τότε, **παράγωγος της διανυσματικής συνάρτησης** $\overrightarrow{f}$ **στο σημείο** $\overrightarrow{a}$ είναι ο $m \times n$ πίνακας

$$\overrightarrow{f}'(\overrightarrow{a}) \equiv J\overrightarrow{f}(\overrightarrow{a}) := \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\overrightarrow{a}) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(\overrightarrow{a}) & ... & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(\overrightarrow{a}) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(\overrightarrow{a}) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(\overrightarrow{a}) & ... & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}(\overrightarrow{a}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(\overrightarrow{a}) & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2}(\overrightarrow{a}) & ... & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(\overrightarrow{a}) \end{bmatrix}.$$

Δηλαδή η $\overrightarrow{f}'(\overrightarrow{a})$ (παράγωγος στο σημείο $\overrightarrow{a}$) είναι ένας $m \times n$ πίνακας με στοιχεία αριθμούς και συγκεκριμένα το στοιχείο της j-οστής γραμμής και i-οστής στήλης του είναι η τιμή της μερικής παραγώγου $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}$ στο σημείο $\overrightarrow{a}$ (όπου $j = 1, 2, ..., m$ και $i = 1, 2, ..., n$).

Η συνάρτηση $\overrightarrow{f}$ ονομάζεται **παραγωγίσιμη** (στο A) όταν οι συνιστώσες (πραγματικές) συναρτήσεις $f_j : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ για $j = 1, 2, .., m$, είναι παραγωγίσιμες, δηλαδή όταν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $f_{j_{x_i}}(\overrightarrow{x}) \equiv \dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}(\overrightarrow{x})$ για κάθε $\overrightarrow{x} \in A$ και για κάθε $i = 1, 2, ..., n$ και $j = 1, 2, ..., m$.
Τότε, **παράγωγος της διανυσματικής συνάρτησης** $\overrightarrow{f}$ είναι ο συναρτησιακός $m \times n$ πίνακας

$$\overrightarrow{f}' \equiv J\overrightarrow{f} := \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Δηλαδή η $\overrightarrow{f}'$ παράγωγος είναι ένας $m \times n$ πίνακας με στοιχεία πραγματικές συναρτήσεις και συγκεκριμένα το στοιχείο της j-οστής γραμμής και i-οστής στήλης του είναι η μερική παραγώγος $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}$ (όπου $j = 1, 2, ..., m$ και $i = 1, 2, ..., n$).

Σχόλιο: Ο (αριθμητικός) πίνακας $J\overrightarrow{f}(\overrightarrow{a})$ ονομάζεται και **πίνακας Jacobi** της συνάρτησης $\overrightarrow{f}$ **στο σημείο** $\overrightarrow{a}$. Αντίστοιχα, ο συναρτησιακός πίνακας $J\overrightarrow{f}$ ονομάζεται **πίνακας Jacobi** της συνάρτησης $\overrightarrow{f}$.
(**Συμβολισμός:** $\overrightarrow{f}' \equiv J\overrightarrow{f} \equiv \dfrac{\partial \overrightarrow{f}}{\partial \overrightarrow{x}}$).

C^1 Διανυσματική Συνάρτηση

Ορισμός 2: Έστω $\overrightarrow{f} : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ μία διανυσματική συνάρτηση n μεταβλητών. Η $\overrightarrow{f}$ ονομάζεται C^1 (ή συνεχώς παραγωγίσιμη) συνάρτηση στο σημείο $\overrightarrow{a} \in A$, όταν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}$ (για $i = 1, 2, ..., n$ και $j = 1, 2, ..., m$) σε μία περιοχή $B_\delta(\overrightarrow{a}) \subseteq A$ και οι συναρτήσεις $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i} : B_\delta(\overrightarrow{a}) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς στο σημείο $\overrightarrow{a}$.

Η $\overrightarrow{f}$ ονομάζεται C^1 (ή συνεχώς παραγωγίσιμη) συνάρτηση (στο A), όταν οι συνιστώσες συναρτήσεις $f_j : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (για $j = 1, 2, ..., m$) είναι C^1, δηλαδή όταν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}(\overrightarrow{x})$ για κάθε $\overrightarrow{x} \in A$ και για κάθε $i = 1, 2, ..., n$ και $j = 1, 2, ..., m$ και οι συναρτήσεις $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i} : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς.

Διαφορισιμότητα Διανυσματικής Συνάρτησης:

Ορισμός 3: Έστω $\overrightarrow{f} : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ μία διανυσματική συνάρτηση n μεταβλητών με A ανοικτό. Η συνάρτηση $\overrightarrow{f}$ ονομάζεται **διαφορίσιμη σε ένα σημείο** $\overrightarrow{a} \in A$ όταν υπάρχει γραμμικός μετασχηματισμός $\overrightarrow{T} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ τέτοιος ώστε να ισχύει

$$\lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{a}} \frac{||\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) - \overrightarrow{f}(\overrightarrow{a}) - \overrightarrow{T}(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a})||}{||\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a}||} = 0 \tag{1}$$

ή ισοδύναμα όταν υπάρχει ένας $m \times n$ πίνακας $\mathcal{A}$ έτσι ώστε

$$\lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{a}} \frac{||\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) - \overrightarrow{f}(\overrightarrow{a}) - \mathcal{A} \cdot (\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a})||}{||\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a}||} = 0 \ , \tag{2}$$

όπου $\mathcal{A} \cdot (\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a})$ είναι το γινόμενο του $m \times n$ πίνακα $\mathcal{A}$ με τον $n \times 1$ πίνακα $\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a}$, δηλαδή το αποτέλεσμα του γινομένου αυτού είναι ένας πίνακας $m \times 1$ ή ισοδύναμα ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^m$.

Παρατήρηση 1: Έστω $\overrightarrow{f} = (f_1, f_2, ...f_m) : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ και γραμμικός μετασχηματισμός $\overrightarrow{T} = (T_1, T_2, ..., T_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Ισχύει ότι

$$\lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{a}} \frac{||\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) - \overrightarrow{f}(\overrightarrow{a}) - \overrightarrow{T}(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a})||}{||\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a}||} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{a}} \frac{|f_j(\overrightarrow{x}) - f_j(\overrightarrow{a}) - T_j(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a})|}{||\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a}||} = 0 \quad \text{για κάθε} \quad j = 1, 2, ..., m$$

Θεώρημα 1: Έστω $\overrightarrow{f} = (f_1, f_2, ...f_m) : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ με συνιστώσες $f_j : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ για $j = 1, 2, ..., m$. Η συνάρτηση $\overrightarrow{f}$ είναι διαφορίσιμη στο σημείο $\overrightarrow{a} \in A$ αν και μόνο αν οι συνιστώσες (πραγματικές) συναρτήσεις f_j για $j = 1, 2, ..., m$ είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις στο σημείο $\overrightarrow{a}$.

Θεώρημα 2: Έστω $\overrightarrow{f} = (f_1, f_2, ...f_m) : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ μία διανυσματική συνάρτηση n μεταβλητών που είναι διαφορίσιμη στο σημείο $\overrightarrow{a} \in A$. Τότε η συνάρτηση $\overrightarrow{f}$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $\overrightarrow{a}$. Επιπλέον ισχύουν οι σχέσεις:

$$\overrightarrow{T} = (Df_1(\overrightarrow{a}), Df_2(\overrightarrow{a}), ..., Df_m(\overrightarrow{a}))$$

$$\mathcal{A} = \overrightarrow{f}'(\overrightarrow{a}) \equiv J\overrightarrow{f}(\overrightarrow{a}) \equiv \frac{\partial \overrightarrow{f}}{\partial \overrightarrow{x}}(\overrightarrow{a})$$

όπου $\overrightarrow{T}$ ο γραμμικός μετασχηματισμός και $\mathcal{A}$ ο $m \times n$ πίνακας του Ορισμού 3.

Ορισμός 4: Έστω $\overrightarrow{f} = (f_1, f_2, ...f_m) : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ μία διανυσματική συνάρτηση n μεταβλητών που είναι διαφορίσιμη στο σημείο $\overrightarrow{a} \in A$. Τότε **διαφορικό της συνάρτησης $\overrightarrow{f}$ στο σημείο $\overrightarrow{a}$** ονομάζεται ο γραμμικός μετασχηματισμός

$$\overrightarrow{D}\overrightarrow{f}(\overrightarrow{a}) := (Df_1(\overrightarrow{a}), Df_2(\overrightarrow{a}), ..., Df_m(\overrightarrow{a})) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

Από το Θεώρημα 2, τον Ορισμό 3 και τον Ορισμό 4 καταλήγουμε στο παρακάτω.

Πόρισμα 1: Έστω $\overrightarrow{f} : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ μία διανυσματική συνάρτηση n μεταβλητών. Από τον Ορισμό 3, αν υπάρχει γραμμικός μετασχηματισμός $\overrightarrow{T} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ τέτοιος ώστε να ισχύει η σχέση (1) ή ισοδύναμα αν υπάρχει $m \times n$ πίνακας $\mathcal{A}$ ωστε να ισχύει η σχέση (2), τότε η συνάρτηση $\overrightarrow{f}$ είναι διαφορίσιμη στο σημείο $\overrightarrow{a} \in A$ και ισχύουν τα παρακάτω:

$$\overrightarrow{D}\overrightarrow{f}(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{T} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{f}'(\overrightarrow{a}) \equiv J\overrightarrow{f}(\overrightarrow{a}) = \mathcal{A}$$

Θεώρημα 3: Έστω $\overrightarrow{f} : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ μία διανυσματική συνάρτηση n μεταβλητών και έστω $\overrightarrow{a} \in A$. Τότε οι παρακάτω ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:

1. Η $\overrightarrow{f}$ είναι διαφορίσιμη στο σημείο $\overrightarrow{a}$.
2. Η $\overrightarrow{f}$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $\overrightarrow{a}$ και ισχύει η σχέση

$$\lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{a}} \frac{||\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) - \overrightarrow{f}(\overrightarrow{a}) - \overrightarrow{f}'(\overrightarrow{a}) \cdot (\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a})||}{||\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a}||} = 0$$

όπου $\overrightarrow{f}'(\overrightarrow{a}) \cdot (\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a})$ είναι το γινόμενο του $m \times n$ πίνακα $\overrightarrow{f}'(\overrightarrow{a})$ με τον $n \times 1$ πίνακα $\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a}$, η οποία ισοδύναμα γράφεται και ως

$$\lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{a}} \frac{\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) - \overrightarrow{f}(\overrightarrow{a}) - \overrightarrow{f}'(\overrightarrow{a}) \cdot (\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a})}{||\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a}||} = \overrightarrow{0}$$

Αν ισχύει ένας από τους παραπάνω ισοδύναμους ισχυρισμούς, τότε για το διαφορικό $\overrightarrow{D}\overrightarrow{f}(\overrightarrow{a})$ της συνάρτησης $\overrightarrow{f}$ στο σημείο $\overrightarrow{a}$ ισχύει ο τύπος:

$$\overrightarrow{D}\overrightarrow{f}(\overrightarrow{a})(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{f}'(\overrightarrow{a}) \cdot \overrightarrow{x} \equiv J\overrightarrow{f}(\overrightarrow{a}) \cdot \overrightarrow{x}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\overrightarrow{a}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\overrightarrow{a}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\overrightarrow{a}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\overrightarrow{a}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\overrightarrow{a}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\overrightarrow{a}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\overrightarrow{a}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\overrightarrow{a}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\overrightarrow{a}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Θεώρημα 4: Μία διανυσματική συνάρτηση $\overrightarrow{f} : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ η οποία είναι C^1 στο σημείο $\overrightarrow{a}$, τότε είναι διαφορίσιμη στο σημείο $\overrightarrow{a}$. Ο αντίθετος ισχυρισμός δεν ισχύει πάντα.

Θεώρημα 5: Έστω $\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g} : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ δύο διανυσματικές συναρτήσεις n μεταβλητών και $\phi : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών, οι οποίες είναι διαφορίσιμες στο σημείο $\overrightarrow{a} \in A$. Τότε, οι συναρτήσεις $\overrightarrow{f} + \overrightarrow{g}$, $\lambda \overrightarrow{f}$ (για $\lambda \in \mathbb{R}$) και $\phi \overrightarrow{f}$ είναι διαφορίσιμες στο σημείο $\overrightarrow{a}$ και ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$1)\ \overrightarrow{D}(\overrightarrow{f} + \overrightarrow{g})(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{D}\overrightarrow{f}(\overrightarrow{a}) + \overrightarrow{D}\overrightarrow{g}(\overrightarrow{a})$$
$$2)\ \overrightarrow{D}(\lambda \overrightarrow{f})(\overrightarrow{a}) = \lambda \overrightarrow{D}\overrightarrow{f}(\overrightarrow{a})$$
$$3)\ \overrightarrow{D}(\phi \overrightarrow{f})(\overrightarrow{a}) = \phi(\overrightarrow{a})\overrightarrow{D}\overrightarrow{f}(\overrightarrow{a}) + D\phi(\overrightarrow{a})\overrightarrow{f}(\overrightarrow{a})$$

Άσκηση 1: Να υπολογιστεί το διαφορικό της παρακάτω διανυσματικής συνάρτησης $\overrightarrow{f}$ στο σημείο $(-1, 1, 2)$, όπου

$$\begin{aligned}\overrightarrow{f}(x,y,z) &= (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), f_3(x,y,z)) \\ &= (e^y z^2 + x,\ z^2 - 3y^3,\ 2xz + x^2 y)\end{aligned}$$

Λύση: Η συνάρτηση f είναι διαφορίσιμη (στο $\mathbb{R}^3$) διότι είναι C^1 (στο $\mathbb{R}^3$), καθώς οι μερικές παράγωγοί $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}(\overrightarrow{x})$ για κάθε $\overrightarrow{x} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ και για κάθε $j = 1,2,3$ και $i = 1,2,3$, υπάρχουν και είναι συνεχείς (βλ. Θεώρημα 4 και Ορισμό 2). Η παράγωγος της $\overrightarrow{f}$ δίνεται από τον Ορισμό 1 ως:

$$\overrightarrow{f}'(\overrightarrow{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(\overrightarrow{x}) & \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(\overrightarrow{x}) & \dfrac{\partial f_1}{\partial z}(\overrightarrow{x}) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(\overrightarrow{x}) & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(\overrightarrow{x}) & \dfrac{\partial f_2}{\partial z}(\overrightarrow{x}) \\ \dfrac{\partial f_3}{\partial x}(\overrightarrow{x}) & \dfrac{\partial f_3}{\partial y}(\overrightarrow{x}) & \dfrac{\partial f_m}{\partial z}(\overrightarrow{x}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & z^2 e^y & 2ze^y \\ 0 & -9y^2 & 2z \\ 2z + 2xy & x^2 & 2x \end{bmatrix}$$

Επομένως, το διαφορικό της συνάρτησης $\overrightarrow{f}$ στο σημείο (-1,1,2) είναι:

$$\overrightarrow{D}\overrightarrow{f}(-1,1,2)(x,y,z) = \overrightarrow{f}'(-1,1,2)\cdot(x,y,z) = \begin{bmatrix} 1 & 4e & 4e \\ 0 & -9 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$= (x + 4e(y+z),\ -9y + 4z,\ 2x + y - 2z)$$